МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Технологии металлов»

МЕХАНИКА МАТЕРИАЛОВ

Методические рекомендации к самостоятельной работе для студентов специальностей 1-37 01 06 «Техническая эксплуатация автомобилей (по направлениям), 1-37 01 07 «Автосервис» очной формы обучения

Часть 2

Могилев 2021

УДК 539.3/.6
ББК 30.121
М55

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Технологии металлов» «31» августа 2021 г., протокол № 1

Составитель ст. преподаватель С. В. Гонорова

Рецензент канд. техн. наук, доц. А. П. Прудников

Методические рекомендации составлены в соответствии с рабочими программами дисциплины «Механика материалов» для студентов специальностей 1-37 01 06 «Техническая эксплуатация автомобилей (по направлениям), 1-37 01 07 «Автосервис» очной формы обучения. Содержат материалы для выполнения расчетно-проектировочных заданий.

Учебно-методическое издание

МЕХАНИКА МАТЕРИАЛОВ

Часть 2

Ответственный за выпуск	Д. И. Якубович
Корректор	А. А. Подошевко
Компьютерная верстка	Н. П. Полевничая

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 66 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение :
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира. 43, 212022, г. Могилев.

Содержание

Введение

Целью выполнения расчетно-проектировочных заданий является закрепление теоретических знаний и приобретение навыков в расчетах на прочность при совместном действии изгиба и кручения, на устойчивость и ударном нагружении.

Методические рекомендации составлены в соответствии с рабочей программой курса «Механика материалов» для студентов специальностей 1-37 01 06 «Техническая эксплуатация автомобилей (по направлениям), 1-37 01 07 «Автосервис»

1 Общие требования к оформлению заданий

Исходные данные к выполнению задания и необходимые методические материалы студент получает у преподавателя.

Рекомендуется изучить теоретический материал по теме задания [1, 2] и ознакомиться с решением типовых задач [3−5]. Расширенные сведения о физико-механических свойствах материалов и геометрических характеристиках некоторых типовых поперечных сечений можно получить в [1−5].

Расчет задания производится в последовательности, предусмотренной методическими рекомендациями. Обязательными являются краткие, без сокращения слов, пояснения к расчетам. Расчеты ведутся в СИ. Для определения искомой величины записывается формула, затем в формулу подставляются значения, записывается результат и указывается единица измерения. Точность вычислений зависит от характера поставленной задачи.

Сроки выполнения и защиты индивидуальных заданий определяются преподавателем в соответствии с рабочей программой курса.

Пояснительная записка выполняется на листе формата А4, графическая часть − на листе формата А4 или А3. Допускается выполнение чертежей с применением специализированных пакетов компьютерных программ.

После проверки задания преподавателем и исправления указанных недочетов, студент получает допуск к защите задания.

Для защиты задания студент должен знать теоретический материал и уметь использовать его для решения типовых задач по теме соответствующего раздела курса.

2 Расчетно-проектировочное задание № 4. Расчет вала при совместном действии изгиба и кручения

2.1 Определение внешних сил и внутренних силовых факторов

Совместное действие изгиба и кручения является одном из видов сложного сопротивления. Этот вид нагружения распространен в технике [1−4]: валы редукторов, коробок скоростей, коробок передач, валы приводов конвейеров и т. д.

Силы, действующие на вал (собственный вес вала и вес колес, давление на зубья шестерен, натяжение ремней шкивов и т. п.), вызывают в его поперечном сечении возникновение внутренних силовых факторов (ВСФ): $M_{кр}$, M_x, M_y, Q_x, Q_y. Действием поперечных сил Q_x, Q_y, как правило, пренебрегают. В практических расчетах действие крутящих моментов $M_{кр}$ и изгибающих моментов M_x и M_y рассматривают по отдельности с последующим суммированием результата по соответствующим теориям прочности.

Передаваемая валом мощность N является работой внешнего скручивающего момента m [1−4] и определяется по формуле

$$N = m \cdot \omega = m \cdot \frac{\pi \cdot n}{30}, \tag{2.1}$$

где n – частота вращения вала, об/мин;

ω – угловая скорость, с$^{-1}$.

Внешний скручивающий момент можно найти по формуле

$$m = \frac{N}{\omega} = \frac{N \cdot 30}{\pi \cdot n}. \tag{2.2}$$

Основными изгибающими силами являются окружные усилия на зубьях шестерен F и усилия натяжения ветвей ременной передачи на шкивах. Приведение изгибающих усилий к центру тяжести вала диаметром d в том его сечении, где располагается шкив, показано на рисунке 2.1, *а* ; в том сечении, где располагается шестерня – на рисунке 2.1, *б*. Окружное усилие на зубчатом колесе средним диаметром D находят по формуле

$$F = \frac{2 \cdot m}{D}. \tag{2.3}$$

Изгибающую силу на шкиве диаметром D при отношении усилий ременной передачи $T = 2 \cdot t$ и t находят по формуле

$$F = T + t = 2 \cdot t + t = 3 \cdot t = 3 \cdot \frac{2 \cdot m}{D}, \tag{2.4}$$

где t – усилие натяжения на ведомой ветви ременной передачи.

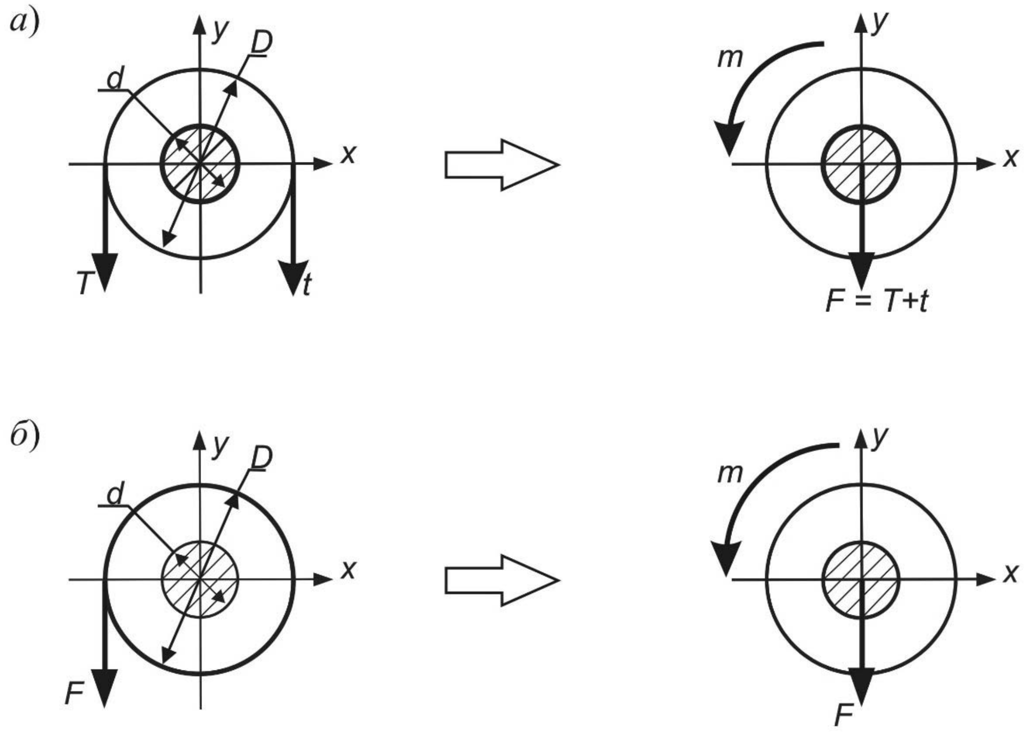


Рисунок 2.1 – К определению изгибающих усилий

Пользуясь принципом независимости действия сил, отдельно рассматриваем кручение вала и изгиб вала.

Кручение вала вызывается внешним моментом m, а внутренним силовым фактором является крутящий момент M_K. Эпюра крутящего момента строится так, как и при чистом кручении.

Изгибающие силы, действующие в разных плоскостях, раскладывают на вертикальную и горизонтальную составляющие. Затем отдельно рассматривают схему изгиба вала от всех вертикальных сил и схему изгиба вала от всех горизонтальных сил. Для каждой схемы действия изгибающих сил отдельно определяют реакции на опорах и строят эпюры изгибающих моментов.

Так как у брусьев круглого поперечного сечения косой изгиб невозможен, то поперечное сечение вала будет испытывать прямой изгиб под действием полного (суммарного) изгибающего момента. Величину этого суммарного изгибающего момента определяют из выражения [1−5]

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}\,, \qquad (2.5)$$

где M_x, M_y – изгибающие моменты в вертикальной и горизонтальной плоскостях соответственно.

По результатам расчета полного (суммарного) изгибающего момента в характерных точках вала строится эпюра M, которая характеризует только величину изгибающего момента. Плоскости действия полных изгибающих моментов в различных сечениях вала различны, но на эпюре все ординаты условно расположены в плоскости чертежа.

Для вала постоянного поперечного сечения при помощи эпюр M_K и M определяют опасное сечение, в котором наиболее неблагоприятное сочетание крутящего и изгибающего моментов [1−5].

2.2 Определение напряжений. Условие прочности

Расчет вала на прочность ведется в опасном сечении. В опасных точках опасного сечения максимальные значения нормальных напряжений σ_{max} от изгибающего момента и максимальные значения касательных напряжений τ_{max} от крутящего момента [1−4] находятся следующим образом:

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W_X} = \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2}}{W_X}; \tag{2.6}$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_K}{W_\rho}, \tag{2.7}$$

где W_X – осевой момент сопротивления поперечного сечения вала;
W_ρ – полярный момент сопротивления поперечного сечения вала.

В опасных точках вала возникает плоское напряженное состоянии, поэтому расчет на прочность производится с использованием теорий прочности. Валы изготавливаются из пластичного материала – стали, то расчет выполняется по третьей или четвертой теориям прочности [1−4]:

$$\sigma_{экв}^{\mathrm{III}} = \sqrt{\sigma_{\max}^2 + 4\cdot\tau_{\max}^2} = \sqrt{\left(\frac{M}{W_X}\right)^2 + 4\cdot\left(\frac{M_K}{2\cdot W_X}\right)^2} \le [\sigma]; \tag{2.8}$$

$$\sigma_{экв}^{\mathrm{IV}} = \sqrt{\sigma_{\max}^2 + 3\cdot\tau_{\max}^2} = \sqrt{\left(\frac{M}{W_X}\right)^2 + 3\cdot\left(\frac{M_K}{2\cdot W_X}\right)^2} \le [\sigma]. \tag{2.9}$$

Для вала круглого поперечного сечения осевой и полярный моменты сопротивления определяются по формулам:

$$W_X = W_У = \frac{\pi\cdot d^3}{32}; \tag{2.10}$$

$$W_{\rho} = \frac{\pi d^3}{16} = 2 \cdot W_X . \qquad (2.11)$$

Подставляя в теории прочности выражения (2.10) и (2.11), получим условие прочности для расчета вала при совместном действии изгиба и кручения:

$$\sigma_{экв}^{\mathrm{III(IV)}} = \frac{M_{экв}^{\mathrm{III(IV)}}}{W_X} \le [\sigma], \qquad (2.12)$$

где $M_{экв}^{\mathrm{III(IV)}}$ – эквивалентный момент по третьей (или четвертой) теориям прочности.

Эквивалентный момент по третьей и четвертой теориям прочности рассчитывается по формулам [1−4]:

$$M_{экв}^{\mathrm{III}} = \sqrt{M^2 + M_K^2} ; \qquad (2.13)$$

$$M_{экв}^{\mathrm{IV}} = \sqrt{M^2 + 0{,}75 \cdot M_K^2} . \qquad (2.14)$$

Из условия прочности (2.12) расчетный диаметр вала

$$d_{экв}^{\mathrm{III(IV)}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_{экв}^{\mathrm{III(IV)}}}{\pi \cdot [\sigma]}} . \qquad (2.15)$$

Пример (***для выполнения расчетно-проектировочного задания № 4***) – Вал, изображенный на рисунке 2.2, вращается с угловой скоростью ω. Шкив диаметром D и углом наклона ветвей гибкой передачи α передает мощность N. Собственный вес шкива G. На валу установлены шестерни диаметрами D_1 и D_2, окружные усилия на зубьях шестерен расположены под углами α_1 и α_2 соответственно . Известно, что шестерня диаметром D_1 передает мощность N_1. Требуется определить диаметр вала при заданном допускаемом напряжении

Исходные данные: N = 28 кВт; N_1 = 16 кВт; ω = 30 рад/с; D = 0,4 м; D_1 = 0,25 м; D_2 = 0,18 м; α = 60°; α_1 = 25°; α_2 = 40°; G = 500 Н; a = 0,2 м; [σ] = 80 МПа.

Решение

Вычерчиваем заданный вал (рисунок 2.3, *а*).

Приводим действующие нагрузки к центру тяжести вала (таблица 2.1).

Внешние моменты на шкиве и шестерне определяем, используя формулу (2.2):

$$m = \frac{N}{\omega} = \frac{28 \cdot 10^3}{100} = 280 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$m_1 = \frac{N_1}{\omega} = \frac{16 \cdot 10^3}{100} = 160 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

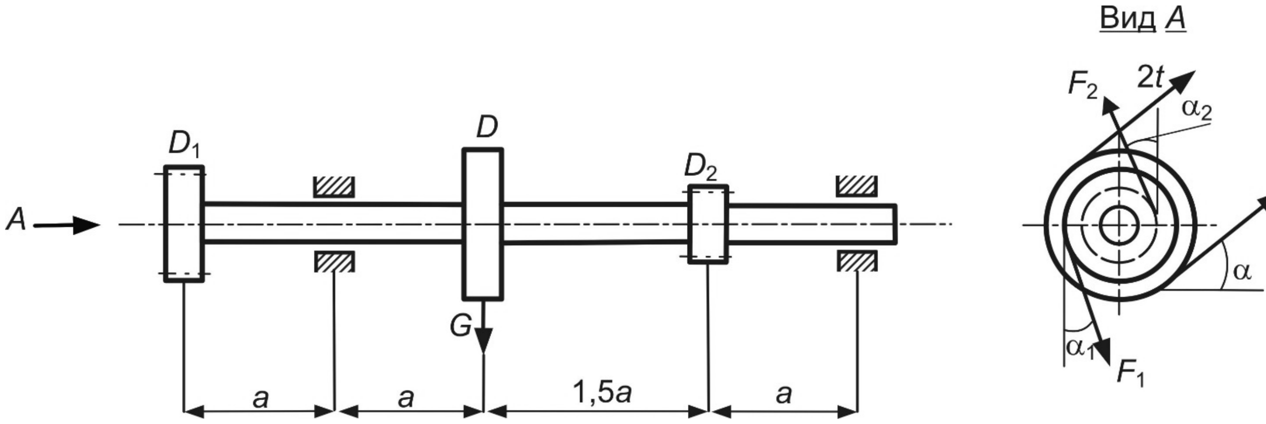
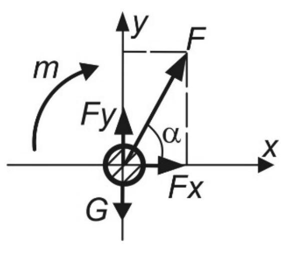
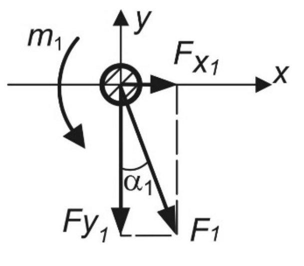
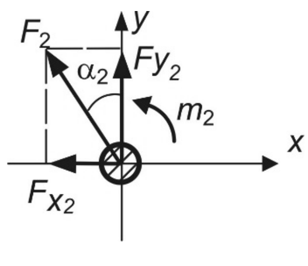


Рисунок 2.2 − Исходные данные к заданию № 4

Таблица 2.1 – К определению внешних нагрузок

Рассматриваемое сечение		
Шкив	Шестерня 1	Шестерня 2
		

Составляем схему действия на вал внешних моментов (рисунок 2.3, *б*) и из условия равновесия вала определяем внешний момент на шкиве 2:

$$\sum m_i = 0;\; m_1 + m_2 - m = 0;\; m_2 = m - m_1 = 280 - 160 = 120 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

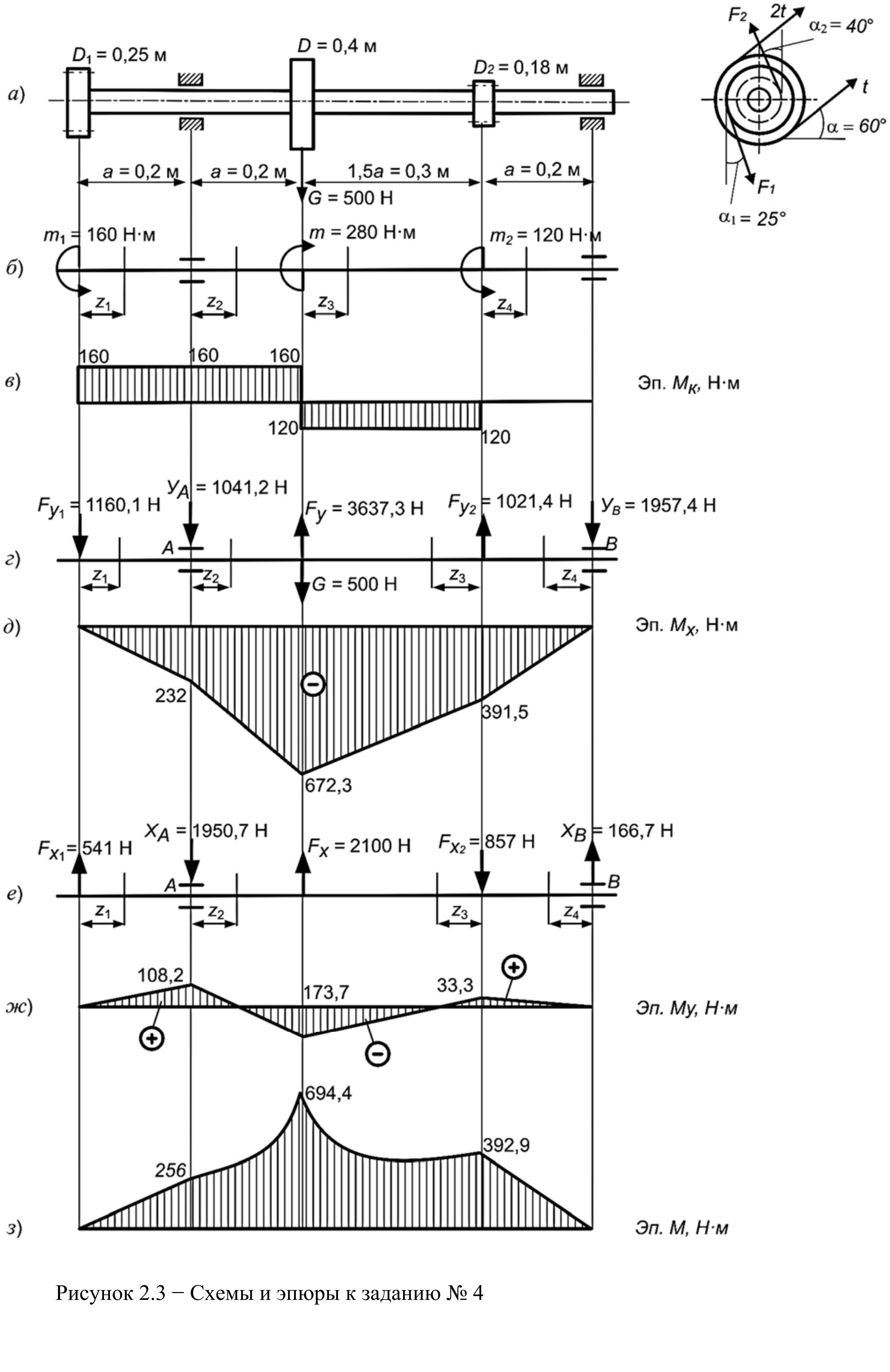


Рисунок 2.3 − Схемы и эпюры к заданию № 4

Определяем значения крутящих моментов по участкам вала в соответствии с рисунком 2.3, *б* и строим эпюру крутящих моментов (рисунок 2.3, *в*).

Участок 1: $0 \le z_1 \le 0,2$ м.

$$M_K = m_1 = 160 \text{ Н·м.}$$

Участок 2: $0 \le z_2 \le 0,2$ м.

$$M_K = m_1 = 160 \text{ Н·м.}$$

Участок 3: $0 \le z_3 \le 0,3$ м.

$$M_K = m_1 - m = 160 - 280 = -120 \text{ Н·м.}$$

Участок 4: $0 \le z_4 \le 0,2$ м.

$$M_K = m_1 - m + m_2 = 160 - 280 + 120 = 0 \text{ Н·м.}$$

Определяем изгибающие усилия, воспринимаемые валом со стороны шестерен, используя формулу (2.3):

$$F_1 = \frac{2 \cdot m_1}{D_1} = \frac{2 \cdot 160}{0,25} = 1280 \text{ Н;}$$

$$F_2 = \frac{2 \cdot m_2}{D_2} = \frac{2 \cdot 120}{0,18} = 1333,3 \text{ кН.}$$

Определяем изгибающее усилие, воспринимаемое валом со стороны шкива в соответствии с формулой (2.4):

$$F = 3 \cdot t = 3 \cdot \frac{2 \cdot m}{D} = 3 \cdot \frac{2 \cdot 280}{0,4} = 4200 \text{ Н}.$$

Определяем вертикальные и горизонтальные составляющие изгибающих усилий, действующих на вал со стороны шкива и шестерен, в соответствии с таблицей (2.1):

$$F_X = F \cdot \cos\alpha = 4200 \cdot \cos 60° = 2100 \text{ Н;}$$

$$F_У = F \cdot \sin\alpha = 4200 \cdot \sin 60° = 3637,7 \text{ Н}.$$

$$F_{X_1} = F_1 \cdot \sin\alpha_1 = 1280 \cdot \sin 25° = 541 \text{ Н};$$

$$F_{У_1} = F_1 \cdot \cos\alpha_1 = 1280 \cdot \cos 25° = 1160{,}1 \text{ Н};$$

$$F_{X_2} = F_2 \cdot \sin\alpha_2 = 1333{,}3 \cdot \sin 40° = 857 \text{ Н};$$

$$F_{У_2} = F_2 \cdot \cos\alpha_2 = 1333{,}3 \cdot \cos 40° = 1021{,}4 \text{ Н}.$$

Составим схему действия на вал сил в вертикальной плоскости (рисунок 2.3, *г*) и определяем опорные реакции:

$$\sum M_A = 1160{,}1 \cdot 0{,}2 - 500 \cdot 0{,}2 + 3637{,}3 \cdot 0{,}2 + 1021{,}4 \cdot 0{,}5 - У_B \cdot 0{,}7 = 0;$$

$$У_B = 1957{,}4 \text{ Н};$$

$$\sum M_B = 1160{,}1 \cdot 0{,}9 + 500 \cdot 0{,}5 - 3637{,}3 \cdot 0{,}5 - 1021{,}4 \cdot 0{,}2 - У_A \cdot 0{,}7 = 0;$$

$$У_A = 1041{,}2 \text{ Н};$$

$$\sum У = -1160{,}1 - 1041{,}2 + 3637{,}3 - 500 + 1021{,}4 - 1957{,}4 = 0.$$

Определяем величины изгибающих моментов от сил в вертикальной плоскости и по полученным значениям строим эпюру (рисунок 2.3, *д*).

Участок 1: $0 \le z_1 \le 0{,}2$ м.

$$M_X = -1160{,}1 \cdot z_1;\ z_1 = 0;\ M_X = 0;\ z_1 = 0;\ M_X = -232 \text{ Н·м}.$$

Участок 2: $0 \le z_2 \le 0{,}2$ м.

$$M_X = -1160{,}1 \cdot \left(0{,}2 + z_2\right) - 2201{,}3 \cdot z_2;$$

$$z_2 = 0;\ M_X = -232 \text{ Н·м};\ z_2 = 0;\ M_X = -672{,}3 \text{ Н·м}.$$

Участок 3: $0 \le z_3 \le 0{,}3$ м.

$$M_X = -1957{,}4 \cdot \left(0{,}2 + z_3\right) - 1021{,}2 \cdot z_3;$$

$$z_3 = 0;\ M_X = -391{,}5 \text{ Н·м};\ z_3 = 0;\ M_X = -672{,}3 \text{ Н·м}.$$

Участок 4: $0 \le z_4 \le 0,2$ м.

$$M_X = -1957,4 \cdot z_4; z_4 = 0;\ M_X = 0;\ z_4 = 0;\ M_X = -391,5 \text{ Н·м.}$$

Составим схему действия на вал сил в вертикальной плоскости (рисунок 2.3, *е*) и определяем опорные реакции:

$$\sum M_A = -541 \cdot 0,2 + 2100 \cdot 0,2 - 857 \cdot 0,5 + X_B \cdot 0,7 = 0;\ X_B = 166,7 \text{ Н;}$$

$$\sum M_B = -541 \cdot 0,9 - 2110 \cdot 0,5 + 857 \cdot 0,2 + X_A \cdot 0,7 = 0;\ X_A = 1950,7 \text{ Н;}$$

$$\sum X = 541 - 1950,7 + 2100 - 857 + 166,7 = 0.$$

Определяем величины изгибающих моментов от сил в горизонтальной плоскости и по полученным значениям строим эпюру (рисунок 2.3, *ж*).

Участок 1: $0 \le z_1 \le 0,2$ м.

$$M_У = 541 \cdot z_1;\ \ z_1 = 0;\ M_У = 0;\ z_1 = 0;\ M_У = 108,2 \text{ Н·м.}$$

Участок 2: $0 \le z_2 \le 0,2$ м.

$$M_У = 541 \cdot \left(0,2 + z_2\right) - 1950,7 \cdot z_2;$$

$$z_2 = 0;\ M_У = 108,2 \text{ Н·м};\ \ z_2 = 0;\ M_У = -173,7 \text{ Н·м.}$$

Участок 3: $0 \le z_3 \le 0,3$ м.

$$M_У = 166,7 \cdot \left(0,2 + z_3\right) - 1950,7 \cdot z_3;$$

$$z_3 = 0;\ M_У = 33,3 \text{ Н·м};\ \ z_3 = 0;\ M_У = -173,7 \text{ Н·м.}$$

Участок 4: $0 \le z_4 \le 0,2$ м.

$$M_У = 166,7 \cdot z_4;\quad z_4 = 0;\ M_У = 0;\quad z_4 = 0,2 \text{ м};\ M_У = 33,3 \text{ Н·м.}$$

Определяем суммарные изгибающие моменты в характерных сечениях вала по формуле (2.5):

$$M = 0;\ M = \sqrt{(-232)^2 + 108,2^2} = 256 \text{ Н·м};$$

$$M = \sqrt{(-672,3)^2 + (-173,7)^2} = 694,4 \text{ Н·м};$$

$$M = \sqrt{(-391,5)^2 + 33,3^2} = 392,9 \text{ Н·м}; \ M = 0.$$

Из совместного рассмотрения эпюр суммарных изгибающих и крутящих моментов (см. рисунок 2.3) определим опасное сечение. В этом сечении одновременно действуют наибольший изгибающий момент M = 694,4 Н·м и наибольший крутящий момент M_K = 160 Н·м.

Значения эквивалентных моментов по третьей и четвертой теориям прочности находят по формулам:

$$M_{экв}^{\text{III}} = \sqrt{M^2 + M_K^2} = \sqrt{694,4^2 + 160^2} = 712,6 \text{ Н·м};$$

$$M_{экв}^{\text{IV}} = \sqrt{M^2 + 0,75 \cdot M_K^2} = \sqrt{694,4^2 + 0,75 \cdot 160^2} = 708,1 \text{ Н·м}.$$

Расчетные значения диаметров вала по третьей и четвертой теориям прочности следующие:

$$d^{\text{III}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_{экв}^{\text{III}}}{\pi \cdot [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 712,6}{3,14 \cdot 80 \cdot 10^6}} = 0,0449 \text{ м} = 44,9 \text{ мм};$$

$$d^{\text{IV}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_{экв}^{\text{IV}}}{\pi \cdot [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 708,1}{3,14 \cdot 80 \cdot 10^6}} = 0,0448 \text{ м} = 44,8 \text{ мм}.$$

Полученные значения диаметров практически одинаковы.

В соответствии с таблицей А.1 принимаем диаметр вала d = 45 мм.

Вывод. В результате расчета заданного вала при совместном действии изгиба и кручения был принят его диаметр d = 45 мм, с которым обеспечивается прочность.

Контрольные вопросы

1 Дайте определение сложному сопротивлению.

2 Какой принцип положен в основу расчетов при сложном сопротивлении?

3 Какие внутренние силовые факторы возникают при совместном действии изгиба и кручения?

4 Как определяется внешний момент, если известна мощность, передаваемая колесом или шкивом?

5 Как определить усилие, изгибающее вал со стороны колеса (шестерни)?

6 Как определить усилие, изгибающее вал со стороны шкива?

7 Какие нагрузки необходимо рассматривать при определении изгибающего момента в вертикальной плоскости?

8 Какие нагрузки необходимо рассматривать при определении изгибающего момента в горизонтальной плоскости?

9 Запишите формулу для определения полного (суммарного) изгибающего момента.

10 При помощи каких эпюр определяют опасное сечение вала?

11 Какие напряжения возникают в поперечном сечении вала при совместном действии изгиба и кручения?

12 Какие точки поперечного сечения являются опасными при совместном действии изгиба и кручения?

13 Запишите выражения для определения эквивалентного момента по третьей и четвертой теориям прочности.

14 Запишите условие прочности при совместном действии изгиба и кручения.

3 Расчетно-проектировочное задание № 5. Расчет на устойчивость

3.1 Общие понятия и определения

Устойчивость – способность деформируемого тела сохранять под нагрузкой первоначальную форму равновесия.

В механике известны три формы равновесия твердого тела: устойчивая, безразличная и неустойчивая. Указанные формы применимы к деформируемым системам и зависят от их размеров, материала и характера приложенных нагрузок. В деформируемых системах имеет место потеря устойчивости, которая возможна при любом виде нагружения.

Потеря устойчивости деформируемых систем − это потеря первоначального упругого равновесия. Характеризуется быстрым ростом деформаций при незначительном увеличении нагрузки. Признак потери устойчивости – внезапная смена формы равновесия [1−3].

Наиболее простой и в то же время актуальной является задача обеспечения устойчивости центрально-сжатого стержня большой гибкости.

Сжимающая нагрузка, приложенная к стержню большой гибкости вызывает продольный изгиб стержня. При этом в поперечном сечении бруса возникает продольная сила и изгибающий момент.

3.2 Определение критической силы

Продольный изгиб связан с потерей прямолинейной формы равновесия. На устойчивость формы равновесия влияет величина приложенной нагрузки.

Критическая сила – это наименьшее значение сжимающей нагрузки, при которой прямолинейная форма равновесия стержня перестает быть устойчивой и переходит в безразличную форму. Критическая сила для заданного стержня определяется в зависимости от значения гибкости стержня [1−5]:

$$\lambda = \frac{\mu \cdot L}{i_{\min}}, \tag{3.1}$$

где μ − коэффициент приведения длины, его величина зависит от условий закрепления концов стержня (рисунок 3.1);

L − длина стержня;

$i_{\min}$ − минимальный радиус инерции поперечного сечения, определяемого в системе главных центральных осей.

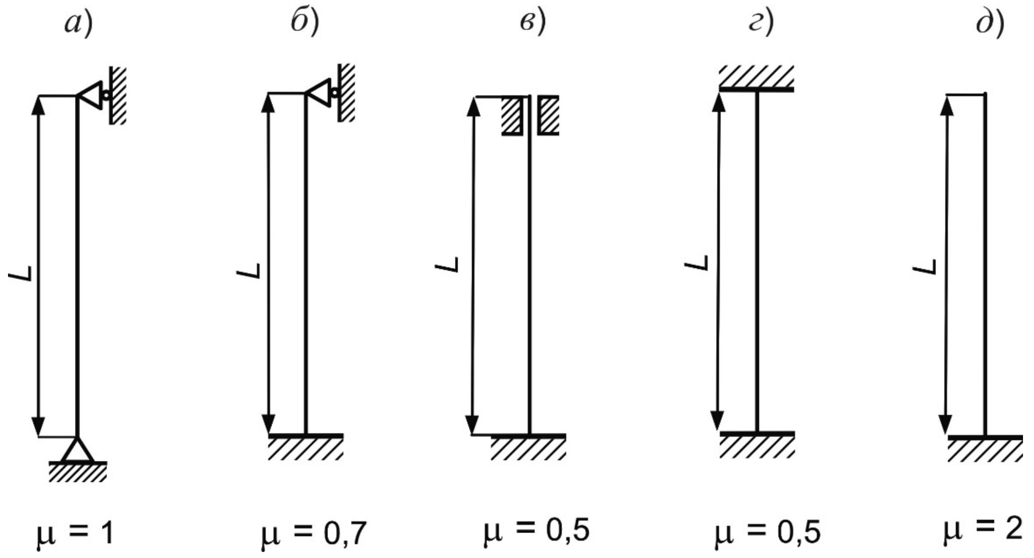


Рисунок 3.1 – К определению коэффициента продольного изгиба

Критическая сила для заданного стержня определяется в зависимости от значения гибкости стержня λ в сравнении со значением предельной гибкости $\lambda_{пред}$ [1−4]. Значения предельной гибкости для различных материалов приведены в таблице В.1.

Для стержней большой гибкости ($\lambda > \lambda_{пред}$) критическая сила определяется по формуле Эйлера:

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{\min}}{(\mu \cdot L)^2}; \tag{3.2}$$

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2} A, \tag{3.3}$$

где $I_{\min}$ − минимальный момент инерции поперечного сечения, определяемого в системе главных центральных осей;

A – площадь поперечного сечения стержня;

E – модуль упругости первого рода (модуль Юнга).

Для стержней средней гибкости $(\lambda < \lambda_{пред})$ критическая сила определяется по формуле Ясинского:

$$F_{кр} = (a - b \cdot \lambda) \cdot A, \tag{3.4}$$

где a, b – коэффициенты формулы Ясинского, зависящие от свойств материала стержня.

Значения коэффициентов формулы Ясинского для различных материалов представлены в таблице В.1.

3.3 Условие устойчивости. Коэффициент запаса

Условие устойчивости

$$\sigma = \frac{F}{A} \le \varphi \cdot [\sigma], \tag{3.5}$$

где σ – нормальное напряжение в сечении стержня;

F − сжимающая осевая нагрузка;

$[\sigma]$ − значение допускаемого напряжения на сжатие;

φ − коэффициент продольного изгиба (коэффициент снижения допускаемого напряжения).

В отличие от условия прочности при растяжении−сжатии вводится коэффициент продольного изгиба φ. Иначе говоря – потеря устойчивости сжатого стержня произойдет при напряжениях меньших, чем при потере прочности.

Величина коэффициента φ определяется в зависимости от материала стойки и значения гибкости стержня λ. Значения коэффициента φ для разных материалов приводится в таблице Б.1. В этой таблице значения гибкости λ задаются через 10 единиц. Поэтому для уточнения коэффициента φ при рассчитанной гибкости λ используется метод линейной интерполяции.

Допускаемая нагрузка рассчитывается из условия устойчивости (3.5):

$$[F] = A \cdot \varphi \cdot [\sigma]. \tag{3.6}$$

Коэффициент запаса устойчивости определяется по формуле

$$n_у = \frac{F_{кр}}{[F]}. \tag{3.7}$$

***Пример* (*для выполнения расчетно-проектировочного задания № 5*)** – Для стального стержня (рисунок 3.2) требуется определить допускаемое значение сжимающей нагрузки [F] при допускаемом напряжении [σ], критическую силу $F_{кр}$ и коэффициент запаса устойчивости n_y.

Исходные данные: материал стержня – сталь Ст 3, модуль продольной упругости стали $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, a = 310 МПа, b = 1,14 МПа (см. таблицу В.1), μ = 1 в соответствии с рисунком 3.1, a; [σ] = 160 МПа.

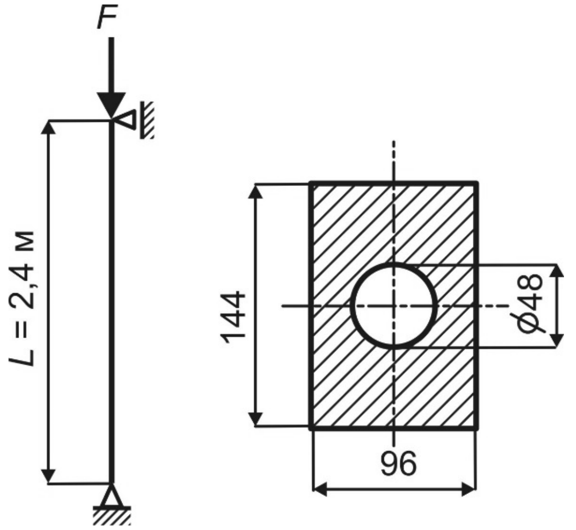


Рисунок 3.2 – Исходные данные к заданию № 5

Решение

Определим геометрические характеристики заданного поперечного сечения, которое состоит из двух простых фигур: *1* − прямоугольник, *2* − круг (рисунок 3.3).

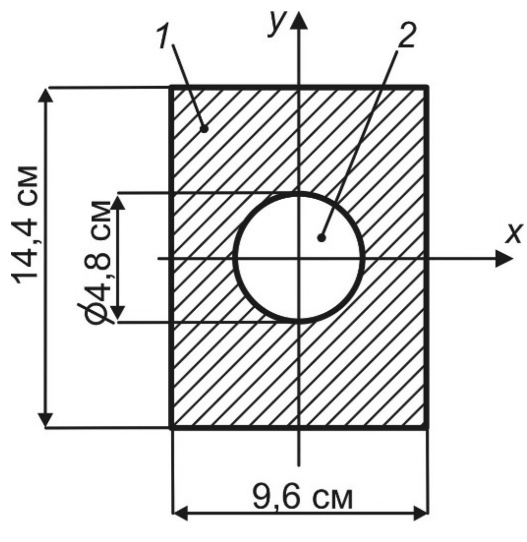


Рисунок 3.3 − Поперечное сечение стержня

Площадь сечения

$$A = A_1 - A_2 = 9,6 \cdot 14,4 - \frac{3,14 \cdot 4,8^2}{4} = 120,14 \text{ см}^2.$$

Главные центральные моменты инерции [1−4]

$$I_X = I_{X_1} - I_{X_2} = \frac{9,6 \cdot 14,4^3}{12} - \frac{3,14 \cdot 4,8^4}{64} = 2362,73 \text{ см}^4;$$

$$I_У = I_{У_1} - I_{У_2} = \frac{14,4 \cdot 9,6^3}{12} - \frac{3,14 \cdot 4,8^4}{64} = 1035,63 \text{ см}^4.$$

Минимальный момент инерции $I_{\min} = I_X = 1035,63$ см^4.
Минимальный радиус инерции

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{1035,63}{120,14}} = 2,93 \text{ см}.$$

Определяем максимальную гибкость стержня относительно оси x, используя формулу (3.1):

$$\lambda_X = \frac{\mu \cdot l}{i_{\min}} = \frac{1 \cdot 2,4}{2,93 \cdot 10^{-2}} = 81,9.$$

Определяем коэффициент продольного изгиба в соответствии с таблицей Б.1:

$$\lambda = 80; \qquad \varphi = 0,75;$$
$$\lambda = 90; \qquad \varphi = 0,69.$$

Уточним значение коэффициента продольного изгиба φ по методу интерполяции:

$$\varphi = 0,75 - \frac{0,75 - 0,69}{90 - 80} \cdot (81,9 - 80) = 0,74.$$

Допускаемое значение сжимающей силы по формуле (3.6):

$$[F] = \varphi \cdot A \cdot [\sigma] = 0,74 \cdot 120,14 \cdot 10^{-4} \cdot 160 \cdot 10^6 = 14224,6 \cdot 10^2 \text{ Н}.$$

Так как полученное значение гибкости меньше предельного значения для стали Ст3 $\lambda_{пред}$ =100 (см. таблицу В.1), то критическую силу определяем по формуле Ясинского. Для расчета указанной силы используем формулу (3.4):

$$F_{кр} = \left(a - b \cdot \lambda\right) \cdot A = \left(310 - 1{,}14 \cdot 81{,}9\right) \cdot 10^2 \cdot 120{,}14 \cdot 10^{-4} = 26026{,}4 \cdot 10^2 \text{ Н.}$$

Коэффициент запаса устойчивости в соответствии с формулой (3.7):

$$n_у = \frac{F_{кр}}{\left[F\right]} = \frac{26026{,}4 \cdot 10^2}{14224{,}6 \cdot 10^2} = 1{,}83.$$

Контрольные вопросы

1 Дайте определение устойчивости.

2 Назовите формы равновесия .

3 Что является признаком потери устойчивости?

4 Дайте определение критической силы.

5 Запишите формулу для определения гибкости стержня.

6 Как определить коэффициент приведения длины стержня?

7 Запишите формулу Эйлера. В каких случаях она применима для определения критической силы?

8 Запишите формулу Ясинского. В каких случаях она применима для определения критической силы?

9 Запишите условие устойчивости.

10 Как определяется коэффициент продольного изгиба?

11 Запишите выражение для определения коэффициента запаса устойчивости.

4 Расчетно-проектировочное задание № 6. Расчет напряжений и перемещений при ударе

4.1 Общие понятия

Ударное нагружение относится к динамическому воздействию, при котором происходит резкое изменение скорости соприкоснувшихся тел за очень малый промежуток времени.

Задача расчета конструкций на ударную нагрузку содержит большие теоретические и экспериментальные трудности. Кроме того, при ударном нагружении невозможно определить силу инерции. Поэтому в практических расчетах используют приближенный метод, основанный на следующих допущениях [1−3]:

− при ударном нагружении справедлив закон Гука;

– ударяющее тело является абсолютно жестким и не деформируется;

– масса ударяемой конструкции мала, в расчет не принимается;

– не учитывается сопротивление движению;

– кинетическая энергия ударяющего тела полностью переходит в потенциальную энергию упругой деформации бруса, воспринимающего удар.

При указанных допущениях динамические напряжения $\sigma_Д$ и перемещения $\Delta_Д$ в ударяемом брусе могут быть найдены по формулам:

$$\sigma_Д = k_Д \cdot \sigma_{CT}; \tag{4.1}$$

$$\Delta_Д = k_Д \cdot \Delta_{CT}, \tag{4.2}$$

где $k_Д$ – динамический коэффициент, показывающий во сколько раз возросли напряжения и перемещения в конструкции при ударе по сравнению с напряжениями и перемещениями при той же нагрузке, но приложенной статически;

σ_{CT} – напряжение при статической нагрузке;

Δ_{CT} – перемещение при статической нагрузке.

Если известна высота, с которой падает груз, то величину динамического коэффициента можно определить по формуле

$$k_Д = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{CT}}}, \tag{4.3}$$

где h – высота падения груза;

Δ_{CT} – линейное перемещение бруса в точке удара при статически приложенной нагрузке.

Ударное нагружение характерно тем, что результирующие напряжения зависят от жесткости ударяемой конструкции. Чем больше возникающие при ударе деформации, тем меньше динамический коэффициент, а следовательно, меньше возникающие напряжения.

Условие прочности при ударе имеет вид:

$$\sigma_Д = k_Д \cdot \sigma_{CT} \le [\sigma] . \tag{4.4}$$

4.2 Определение напряжений и перемещений при поперечном ударе

Если ударяемый брус испытывает деформацию изгиба, то такой удар называется поперечным.

Практическое значение для прочностных расчетов имеет наибольшее нормальное напряжение, которое определяется в опасном сечении балки по эпюре изгибающих моментов.

Если балка стальная, то значение максимального момента $M_{\max}$ выбирают по эпюре независимо от знака момента. Так как на практике обычно применяют балки симметричного поперечного сечения, например, двутаврового профиля, то максимальные напряжения определяют по формуле

$$\sigma_{CT}^{\max} = \frac{M_{\max}}{W_X}, \tag{4.5}$$

где W_X – осевой момент сопротивления сечения;

$M_{\max}$ – максимальный изгибающий момент для опасного сечения.

Деформация бруса при статически приложенной нагрузке Δ_{CT} определяется разными методами, например, способом Верещагина.

Графоаналитический способ решения интеграла Мора для определения деформаций называют способом Верещагина. Искомые деформации в долях от жесткости поперечного сечения получаются в результате перемножения эпюр изгибающих моментов, одна из которых является грузовой M_F, а другая – единичной $\bar{M}$.

Грузовая эпюра M_F строится для заданной балки от груза G, приложенного статически. Единичная эпюра $\bar{M}$ строится от единичной силы, приложенной в месте падения груза.

Обе эпюры разбиваются на общее количество участков, границами которых являются точки излома линии эпюр.

Перемещение Δ_{CT} вычисляется по формуле

$$\Delta_{CT} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\omega_F \cdot \bar{y}_c}{E \cdot I_x}, \tag{4.6}$$

где n – число участков балки;

ω_F – площадь грузовой эпюры M_F на участке;

$\bar{y}_c$ – ордината единичной эпюры под центром тяжести грузовой на этом же участке;

E – модуль продольной упругости материала;

I_x – осевой момент инерции сечения.

Результат перемножения эпюр может быть положительным или отрицательным, в зависимости от знаков перемножаемых эпюр.

Пример **(*для выполнения расчетно-проектировочного задания № 6*)** − На двутавровую стальную балку с высоты h падает груз G (рисунок 4.1, *а*). Определить возникающие напряжения и перемещения. Проверить прочность, если $[\sigma] =$ 160 МПа.

Исходные данные: двутавр № 20 (W_x = 184 см^3, I_x = 1840 см^4), модуль продольной упругости $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $[\sigma] =$ 160 МПа.

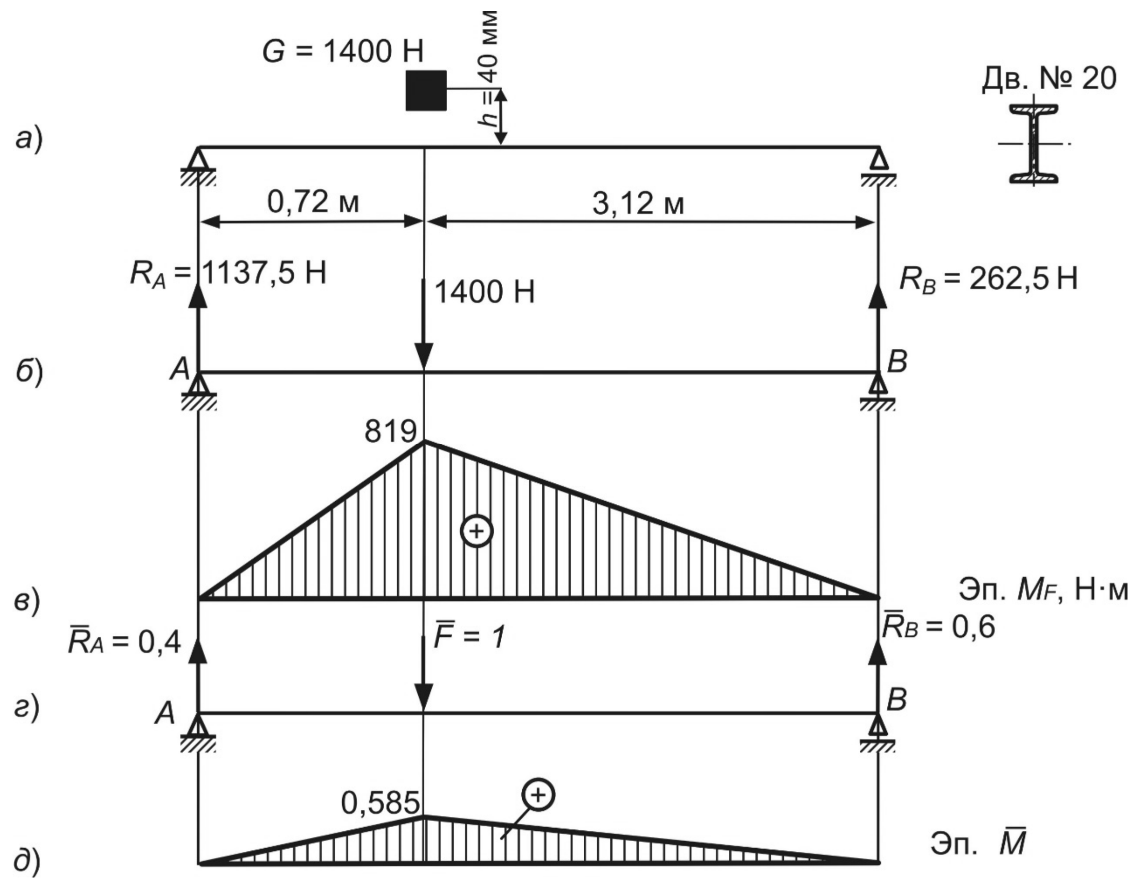


Рисунок 4.1 − К определению напряжений и перемещений

Решение

Ударная нагрузка вызывает изгиб заданной балки (см. рисунок 4.1, *а*).

Прикладываем к балке груз G статически (рисунок 4.1, *б*). Определяем реакции опор от статической нагрузки. Строим эпюру изгибающих моментов M_F от статической нагрузки (рисунок 4.1, *в*). По этой эпюре определяем величину максимального изгибающего момента $M_{\max} = 819$ Н·м.

Максимальные статические напряжения по формуле (4.4):

$$\sigma_{CT}^{\max} = \frac{M_{\max}}{W_X} = \frac{819}{184 \cdot 10^{-6}} = 4{,}45 \text{ МПа}.$$

Прикладываем к балке единичную силу $\overline{F} = 1$. Определяем реакции опор от единичной силы (рисунок 4.1, *г*).

Строим единичную эпюру $\overline{M}$ (см. рисунок 4.1, *в*).

По способу Верещагина определяем перемещение в точке удара, применив формулу (4.5):

$$\Delta_{CT} = \frac{M_F \cdot \overline{M}}{EI_X} = \left(\frac{1}{2} \cdot 819 \cdot 0,72 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,585 + \frac{1}{2} \cdot 819 \cdot 3,12 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,585 \right) =$$

$$= \frac{613,27}{EI_X} = \frac{613,27}{2 \cdot 10^{11} \cdot 1840 \cdot 10^{-8}} = 0,000166 \text{ м.}$$

Динамический коэффициент из формулы (4.3):

$$k_Д = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{CT}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 40 \cdot 10^{-3}}{0,000166}} = 24.$$

Максимальные динамические напряжения на основании формулы (4.1):

$$\sigma_Д^{\max} = k_Д \cdot \sigma_{CT}^{\max} = 24 \cdot 4,45 = 106,8 \text{ МПа.}$$

Проверка прочности из условия (4.4):

$$\sigma_{\max}^Д = 106,8 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа.}$$

Условие прочности выполнено. Прочность обеспечена.

Перемещение определим по формуле (4.2):

$$\Delta_Д = k_Д \cdot \Delta_{CT} = 24 \cdot 0,000166 = 0,004 \text{ м.}$$

Контрольные вопросы

1 Какая нагрузка называется динамической?

2 Что такое динамический коэффициент?

3 Запишите формулу для определения напряжений при динамическом действии нагрузок.

4 Запишите выражение для определения динамического коэффициента в случае, когда груз поднимается (опускается) с постоянным ускорением.

5 Что такое удар?

6 Какие допущения приняты при расчете на ударное нагружение?

7 Запишите формулу для определения динамического коэффициента при ударе.

8 Запишите условие прочности для случая, когда удар вызывает изгиб бруса.

9 Запишите условие прочности для случая, когда удар вызывает растяжение (сжатие) бруса.

Список литературы

1 **Дарков, А. В.** Сопротивление материалов : учебник / А. В. Дарков, Г. С. Шпиро. − 5-е изд., перераб. и доп. − Москва: АльянС, 2018. – 624 с.

2 **Волосухин, В. А.** Сопротивление материалов: учебник / В. А. Волосухин, В. Б. Логвинов, С. И. Евтушенко. − 5-е изд. − Москва: РИОР; ИНФРА-М, 2014. − 543 с.

3 **Муморцев, А. Н.** Сборник задач по сопротивлению материалов: учебное пособие / А. Н. Муморцев, Е. А. Фролов. − Москва: ФОРУМ; ИНФРА-М, 2015. − 112 с. : ил.

4 **Кривошапко, С. Н.** Сопротивление материалов : учебник и практикум для прикладного бакалавриата / С. Н. Кривошапко. − Москва: Юрайт, 2016. − 413 с.

5 Сопротивление материалов. Практикум: учебно-методическое пособие / С. И. Зиневич [и др.]. – Минск: Новое знание ; Москва: ИНФРА-М, 2015. – 316 с.: ил.

Приложение А
(справочное)

Таблица А.1 − Численные значения нормальных линейных размеров

Ряд				Ряд			
Ra 5	*Ra* 10	*Ra* 20	*Ra* 40	*Ra* 5	*Ra* 10	*Ra* 20	*Ra* 40
10	10	10	10 10,5	100	100	100	100 105
		11	11 1,5			110	110 120
	12	12	12 13		125	125	125 130
		14	14 15			140	140 150
16	16	16	16 17	160	160	160	160 170
		18	18 19			180	180 190
	20	20	20 21		200	200	200 210
		22	22 24			220	220 240
25	25	25	25 26	250	250	250	250 260
		28	28 30			280	280 300
	32	32	32 34		320	320	320 340
		36	36 38			360	360 380
40	40	40	40 42	400	400	400	400 420
		45	45 48			450	450 480
	50	50	50 53		500	500	500 530
		56	56 60			56	560 600
63	63	63	63 67	630	630	630	630 670
		71	71 75			710	710 750
	80	80	80 85		800	800	800 850
		90	90 95			900	900 950

Примечание – При определении диаметра вала предпочтение отдается ряду с градацией *Ra* 40

Приложение Б
(справочное)

Таблица Б.1 – Значения коэффициента продольного изгиба φ

Гибкость λ	Сталь марок			Чугун марок		Дюралюминий Д16Т	Дерево (сосна, ель)
	Ст2, Ст3, Ст4	Ст5	14Г2, 15ГС, 10Г2С, 10Г2СД, 15ХСНД	СЧ12-28, СЧ15-32, СЧ18-36, СЧ 21-40	СЧ24-44 СЧ28-48		
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
10	0,99	0,98	0,98	0,97	0,95	0,999	0,99
20	0,97	0,96	0,95	0,91	0,87	0,998	0,97
30	0,95	0,93	0,92	0,8	0,75	0,835	0,93
40	0,92	0,90	0,89	0,69	0,60	0,700	0,87
50	0,89	0,85	0,84	0,57	0,43	0,568	0,80
60	0,86	0,80	0,78	0,44	0,32	0,455	0,71
70	0,81	0,74	0,71	0,34	0,23	0,353	0,61
80	0,75	0,67	0,63	0,26	0,18	0,269	0,49
90	0,69	0,59	0,54	0,20	0,14	0,212	0,38
100	0,60	0,50	0,46	0,16	0,12	0,172	0,31
110	0,52	0,43	0,39			0,142	0,25
120	0,45	0,37	0,33			0,119	0,22
130	0,40	0,32	0,29			0,101	0,18
140	0,36	0,28	0,25			0,087	0,16
150	0,32	0,25	0,23			0,076	0,14
160	0,29	0,23	0,21				0,12
170	0,26	0,21	0,19				0,11
180	0,23	0,19	0,17				0,10
190	0,21	0,17	0,15				0,09
200	0,19	0,15	0,13				0,08
210	0,17	0,14	0,12				
220	0,16	0,13	0,11				

Приложение В
(справочное)

Таблица В.1 − Значения a, b, c, λ_o, $\lambda_{пред}$

Материал	a, МПа	b, МПа	c, МПа	λ_o	$\lambda_{пред}$
Ст2	264	0,7	0	62	105
Ст3	310	1,14	0	40…60	100
Ст4, сталь 20	328	1,11	0	60	96
Ст5, сталь 25	350	1,15	0	57	92
Сталь 45	449	1,67	0	52	85
Сталь 14Г2	469	2,62	0	52	85
Сталь 30ХМА	1000	5,40	0	50	83
Дюралюминий Д16Т	406	2,83	0	30	53
Чугун	761	11,77	0,052	–	80
Дерево	29	0,19	0	–	70

Примечание – a, b, c – параметры формулы Ясинского; λ_o – гибкость, при которой потеря устойчивости равноопасна потере прочности; $\lambda_{пред}$ – предельная гибкость