УДК 517.925

Регуляризация периодической краевой задачи для матричного уравнения Ляпунова – Риккати

О. А. Маковецкая

Получены конструктивные достаточные условия однозначной разрешимости периодической краевой задачи для матричного дифференциального уравнения Ляпунова – Риккати. Дана оценка области локализации решения. Разработан итерационный алгоритм построения решения.

Ключевые слова: периодическая краевая задача, матричное дифференциальное уравнение, существование и единственность решения, алгоритм.

Regularization of a periodic boundary value problem for the matrix Lyapunov – Riccati equation

O. A. Makovetskaya

Constructive sufficient conditions of unique solvability of a periodic boundary value problem for Lyapunov – Rikkati matrix differential equation are received. The estimation of area of localization of the decision is received. The iteration algorithm of construction of solving, based on the computing scheme of a classical method of successive approximations is given.

Keywords: periodical boundary value problem, matrix differential equation, existence and uniqueness, algorithm of construction of solving.

Настоящая работа посвящена исследованию краевой задачи

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + XB(t) + Q_1(t)XQ_2(t)XQ_3(t) + F(t,X) \equiv G(t,X),\ X(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad (1)$$

$$X(0) = X(\omega), \quad (2)$$

где $t \in I$, $A,\ B,\ Q_i\left(i=\overline{1,3}\right) \in \mathbb{C}\left(I,\mathbb{R}^{n\times n}\right)$, $F \in \mathbb{C}\left(D_{\tilde{\rho}},\mathbb{R}^{n\times n}\right)$. Матрица-функция $F(t,X)$ в области $D_{\tilde{\rho}} = \{(t,X): t\in I,\ \|X\| < \tilde{\rho}\}$ должна удовлетворять относительно X локальному условию Липшица; $F(t,0) \not\equiv 0$; $I = [0,\omega]$, $\omega > 0$, $0 < \tilde{\rho} \le \infty$.

Ранее в случае $Q_i = 0$ качественными методами аналогичная задача исследовалась в работе [1]. Периодическая краевая задача для уравнения Риккати с помощью конструктивных методов рассматривалась в [2, 3]. В данной работе предложены новые подходы к исследованию задачи, развивающие изложенные ранее в работах [4–6].

Обозначения:

$$D_\rho = \left\{(t,X): 0 \le t \le \omega,\ \|X\| \le \rho\right\},\ D = \left\{X(t): \|X\|_{\mathbb{C}} \le \rho\right\},\ M = \int_0^\omega A(\tau)d\tau,$$

$$N = -\int_0^\omega B(\tau)d\tau,\ \gamma = \left\|\Phi^{-1}\right\|,\ \alpha = \max_t \|A(t)\|,\ \beta = \max_t \|B(t)\|,$$

$$\delta_i = \max_t \|Q_i(t)\| \left(i = \overline{1,3}\right),\ h = \max_t \|F(t,0)\|,\ \|X\|_{\mathbb{C}} = \max_t \left\|X(t)\right\|,$$

$$\varphi(\rho) = \gamma\delta\omega\left[1 + \frac{1}{2}(\alpha+\beta)\omega\right]\rho^2 + \gamma\omega\left[L + \frac{1}{2}(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+L)\omega\right]\rho +$$

$$+\gamma\omega h\left[1 + \frac{1}{2}(\alpha+\beta)\omega\right],$$

$$q(\rho) = \gamma\delta\omega\left[(\alpha+\beta)\omega + 2\right]\rho + \frac{1}{2}\gamma(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+L)\omega^2 + \gamma L\omega,$$

где $0 < \rho < \tilde{\rho}$, $t \in I$, $\delta = \delta_1\delta_2\delta_3$, $L = L(\rho) > 0$ – постоянная Липшица для $F(t,X)$ в области D_ρ, Φ – линейный матричный оператор, $\Phi X = MX - XN$, $\|\cdot\|$ – норма матриц в конечномерной банаховой алгебре $\mathcal{B}(n)$ непрерывных матрично-значных функций.

Теорема. *Пусть матрицы M, N не имеют общих характеристических чисел, а также выполняются условия: $\varphi(\rho) \le \rho$, $q(\rho) < 1$.*

Тогда в области D_ρ решение задачи (1), (2) существует и единственно, при этом справедлива оценка $\|X\|_{\mathbb{C}} \le \varphi(\rho)$.

Доказательство. Сначала по методике [2] получим матричное интегральное уравнение, эквивалентное задаче (1), (2). Пусть $X(t)$ – решение этой задачи. Тогда из (1) с учетом (2) имеем при $t = \omega$

$$\int_0^\omega G(\tau, X(\tau))d\tau = 0. \tag{5}$$

Перепишем (5) в следующем виде:

$$\int_0^\omega \left[A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau)\right]d\tau =$$

$$= -\int_0^\omega \left[Q_1(\tau)X(\tau)Q_2(\tau)X(\tau)Q_3(\tau) + F(\tau, X(\tau))\right]d\tau. \tag{6}$$

По аналогии с [4–6], уравнение (6) преобразуем следующим образом:

$$MX(t) - X(t)N = \int_0^\omega A(\tau)\left(\int_\tau^t G(\sigma, X(\sigma))d\sigma\right)d\tau + \int_0^\omega \left(\int_\tau^t G(\sigma, X(\sigma))d\sigma\right)B(\tau)d\tau -$$

$$-\int_0^\omega \left[Q_1(\sigma)X(\tau)Q_2(\tau)X(\tau)Q_3(\sigma) + F(\tau, X(\tau))\right]d\tau.$$

В соответствии с [7, с. 207] ввиду отсутствия у матриц M, N общих характеристических чисел оператор Φ однозначно обратим, при этом оператор Φ^{-1} является линейным и ограниченным. На основании обратимости оператора Φ получена матричная интегральная задача

$$X(t) = \Phi^{-1}\left\{\int_0^{\omega} A(\tau)\left(\int_{\tau}^{t} G(\sigma, X(\sigma))\,d\sigma\right)d\tau + \int_0^{\omega}\left(\int_{\tau}^{t} G(\sigma, X(\sigma))\,d\sigma\right)B(\tau)\,d\tau - \right.$$

$$\left. - \int_0^{\omega}\left[Q_1(\tau)X(\tau)Q_2(\tau)X(\tau)Q_3(\tau) + F(\tau, X(\tau))\right]d\tau\right\}. \qquad (7)$$

Верно и обратное: всякое непрерывное решение уравнения (7) является решением задачи (1), (2). Это можно установить с помощью техники типа [4–6].

Разрешимость уравнения (7) будем исследовать, рассматривая его в операторной форме

$$X = \mathcal{L}(X), \qquad (8)$$

где через $\mathcal{L}$ обозначен соответствующий интегральный оператор в (7). Этот оператор действует на множестве $\mathbb{C}(I, \mathbb{R}^{n\times n})$.

Установим, основываясь на условиях теоремы, что принцип сжимающих отображений выполняется применительно к (8) (см., например, [8, с. 605]) на множестве D, то есть в замкнутом шаре $\|X\|_{\mathbb{C}} \le \rho$.

Сначала докажем, что $\mathcal{L}(X) \in D$ для произвольной матрицы-функции $X(t) \in D$. Выполнив оценки по норме в (8), получим

$$\|\mathcal{L}(X)\| \le \gamma\left\{\int_0^{\omega}\|A(\tau)\|\left\|\int_{\tau}^{t} G(\sigma, X(\sigma))\,d\sigma\right\|d\tau + \int_0^{\omega}\left\|\int_{\tau}^{t} G(\sigma, X(\sigma))\,d\sigma\right\|\|B(\tau)\|\,d\tau + \right.$$

$$\left. + \int_0^{\omega}\left\|X(\tau)Q(\tau)X(\tau) + F(\tau, X(\tau))\right\|d\tau\right\} \le$$

$$\le \gamma\omega\left\{\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\left[\delta\rho^2 + (\alpha+\beta+L)\rho + h\right]\omega + \delta\rho^2 + L\rho + h\right\} = \varphi(\rho). \qquad (9)$$

Из (9) следует соотношение

$$\|\mathcal{L}(X)\|_{\mathbb{C}} \le \rho. \qquad (10)$$

Далее из (8) имеем для произвольных $\tilde{X}$, $\tilde{\tilde{X}} \in D$:

$$\left\|\mathcal{L}(\tilde{\tilde{X}}) - \mathcal{L}(\tilde{X})\right\| \le$$

$$\le \gamma\omega\left[\frac{1}{2}(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+2\delta\rho+L)\omega + (2\delta\rho+L)\right]\left\|\tilde{\tilde{X}} - \tilde{X}\right\|_{\mathbb{C}} = q\left\|\tilde{\tilde{X}} - \tilde{X}\right\|_{\mathbb{C}}.$$

Отсюда имеем неравенство

$$\left\|\mathcal{L}(\tilde{\tilde{X}})-\mathcal{L}(\tilde{X})\right\|_{\mathbb{C}} \le q\left\|\tilde{\tilde{X}}-\tilde{X}\right\|_{\mathbb{C}}. \qquad (11)$$

Соотношения (10), (11) являются условиями принципа сжимающих отображений применительно к уравнению (8), из чего следует, что в шаре $\|X\|_{\mathbb{C}} \le \rho$ решение этого уравнения существует и единственно. Таким образом, доказана однозначная разрешимость задачи (1), (2) в области D_ρ. При этом на основании (9) справедлива оценка $\|X\|_{\mathbb{C}} \le \varphi(\rho)$. Теорема полностью доказана.

Будем строить решения интегрального уравнения (7) на основе классического метода последовательных приближений (см., например, [8, с. 605]):

$$X_{k+1}(t) =$$

$$= \Phi^{-1}\left\{\int_0^\omega A(\tau)\left(\int_\tau^t G\big(\sigma, X_k(\sigma)\big)d\sigma\right)d\tau + \int_0^\omega\left(\int_\tau^t G\big(\sigma, X_k(\sigma)\big)d\sigma\right)B(\tau)d\tau -\right.$$

$$\left.-\int_0^\omega\Big[Q_1(\sigma)X_k(\tau)Q_2(\tau)X_k(\tau)Q_3(\sigma) + F\big(\tau, X_k(\tau)\big)\Big]d\tau\right\},\ k = 0,1,2,..., \qquad (12)$$

где $X_0(t)$ – произвольная матричная функция класса $\mathbb{C}\left(I, \mathbb{R}^{n\times n}\right)$, принадлежащая множеству *D*.

Основываясь на условии теоремы, можно доказать индукцией по *k*, что все приближенные решения, полученные по алгоритму (12), принадлежат множеству *D*. Доказательство построено на рекуррентной оценке

$$\|X_{k+1}\|_{\mathbb{C}} \le \gamma\delta\omega\left[1+\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\omega\right]\|X_k\|_{\mathbb{C}}^2 +$$

$$+\gamma\omega\left[L+\frac{1}{2}(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+L)\omega\right]\|X_k\|_{\mathbb{C}} + \gamma\omega h\left[1+\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\omega\right],\ \ k = 0,1,2,...,$$

которую можно получить по аналогии с (9).

Вместо исследования сходимости построенной последовательности исследуем сходимость ряда

$$X_0(t) + (X_1(t) - X_0(t)) + (X_2(t) - X_1(t)) + ... + (X_k(t) - X_{k-1}(t)) + ... \qquad (13)$$

Для доказательства равномерной сходимости ряда (13) построим сходящийся числовой мажорантный на $[0,\omega]$ ряд относительно функционального ряда (13).

Используя оценку (11), выполним следующие оценки:

$$\|X_{m+1}(t) - X_m(t)\|_{\mathbb{C}} \le \|\mathcal{L}(X_m(t)) - \mathcal{L}(X_{m-1}(t))\|_{\mathbb{C}} \le q\|X_m - X_{m-1}\|_{\mathbb{C}},\ m = 1,2,... \qquad (14)$$

Из (14) получим явную оценку

$$\left\|X_{m+1}-X_m\right\|_{\mathbb{C}} \le q^m \left\|X_1-X_0\right\|_{\mathbb{C}},\ m=1,2,..., \tag{15}$$

при этом $\left\|X_1-X_0\right\|_{\mathbb{C}} = \left\|\mathcal{L}\left(X_0\right)-X_0\right\|_{\mathbb{C}}$.

На основе оценки (15) нетрудно доказать с помощью [8, с. 605], что последовательность $\left\{X_k(t)\right\}_0^\infty$ сходится равномерно по $t \in I$ к решению интегрального уравнения (7), при этом имеет место оценка

$$\left\|X-X_k\right\|_{\mathbb{C}} \le \frac{q^k}{1-q}\left\|X_1-X_0\right\|_{\mathbb{C}},\ k=0,1,2,...$$

Особенностью алгоритма (12) является его простота и эффективность, что позволяет его использовать при решении прикладных задач.

Список использованных источников и литературы

1. *Murty*, *K.N.* Two (multi) point nonlinear Lyapunov systems existence and uniqueness / K.N. Murty, G.W. Howell, S. Sivasundaram // Journ. Mathem. Anal. and Appl., 1992. – Vol. 167. – P. 505-515.
2. *Лаптинский*, *В. Н.* Конструктивный анализ управляемых колебательных систем / В.Н. Лаптинский. – Минск : ИМ НАН Беларуси, 1998. – 300 с.
3. *Лаптинский*, *В. Н.* Матричные дифференциальные уравнения Ляпунова и Риккати / В. Н. Лаптинский, И. И. Маковецкий, В. В. Пугин. – Могилев : Белорус.-Рос. ун-т, 2012. – 168 с.
4. *Маковецкая*, *О. А.* Конструктивный анализ периодической краевой задачи для матричного уравнения Ляпунова – Риккати / В. Н. Лаптинский, О. А. Маковецкая // Труды ИСА РАН. – 2013. – Т. 63, № 2. – С. 90–98.
5. *Маковецкая*, *О. А.* Алгоритмы построения решений периодической краевой задачи для матричного уравнения Ляпунова – Риккати / О. А. Маковецкая // Весці НАН Беларусі: Сер. фіз.-мат. навук. – 2014. – № 1. – С. 43–50.
6. *Маковецкая*, *О. А.* Построение и структурные свойства решений периодической краевой задачи для обобщения матричных уравнений Ляпунова и Риккати / В. Н. Лаптинский, О. А. Маковецкая // Дифференциальные уравнения. – 2018. – Т. 54, № 7. – С. 937–946.
7. *Гантмахер*, *Ф. Р.* Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – Москва : Наука, 1967. – 576 с.
8. *Канторович*, *Л. В.* Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. – Москва : Наука, 1977. – 744 с.

Сведения об авторе

Ольга Александровна Маковецкая, начальник центра менеджмента качества образовательной деятельности Белорусско-Российского университета (Республика Беларусь, г. Могилев), olla.makzi@gmail.com