УДК 517.925

К разрешимости периодической краевой задачи для системы матричных дифференциальных уравнений Риккати

Д. В. Роголев

Получены коэффициентные достаточные условия однозначной разрешимости периодической краевой задачи для системы матричных дифференциальных уравнений Риккати.

Ключевые слова: периодическая краевая задача, матричное уравнение Риккати.

On the solvability of a periodic boundary value problem for the system of matrix differential Riccati equations

D. V. Rogolev

Coefficient sufficient conditions for the unique solvability of a periodic boundary value problem for the system of matrix differential Riccati equations are obtained.

Keywords*:* periodic boundary value problem, matrix Riccati equation.

Рассмотрим краевую задачу

$$\frac{d\boldsymbol{X}}{dt} = \boldsymbol{A}_1(t)\boldsymbol{X}\boldsymbol{C}_1(t) + \boldsymbol{X}\boldsymbol{B}_1(t) + \boldsymbol{X}\big(\boldsymbol{S}_1(t)\boldsymbol{X} + \boldsymbol{S}_2(t)\boldsymbol{Y}\big) + \boldsymbol{F}_1(t) \equiv G_1\big(t, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}\big), \quad (1)$$

$$\frac{d\boldsymbol{Y}}{dt} = \boldsymbol{A}_2(t)\boldsymbol{Y}\boldsymbol{C}_2(t) + \boldsymbol{Y}\boldsymbol{B}_2(t) + \boldsymbol{Y}\big(\boldsymbol{P}_1(t)\boldsymbol{X} + \boldsymbol{P}_2(t)\boldsymbol{Y}\big) + \boldsymbol{F}_2(t) \equiv G_2\big(t, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}\big), \quad (2)$$

$$\boldsymbol{X}(0) = \boldsymbol{X}(\omega), \quad (3)$$

$$\boldsymbol{Y}(0) = \boldsymbol{Y}(\omega), \quad (4)$$

где $t \in [0, \omega]$, $\boldsymbol{X}(t), \boldsymbol{Y}(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, матрицы $\boldsymbol{A}_i(t)$, $\boldsymbol{B}_i(t)$, $\boldsymbol{C}_i(t)$, $\boldsymbol{S}_i(t)$, $\boldsymbol{P}_i(t)$, $\boldsymbol{F}_i(t)$ $(i = 1, 2)$ определены и непрерывны на промежутке $[0, \omega]$; $\omega > 0$.

Матричные дифференциальные уравнения относятся к многомерным системам специального вида, включая уравнения Ляпунова, Риккати, играющие важную роль в теории и приложениях дифференциальных уравнений [1, 2, 4, 8]. Уравнения, аналогичные (1)–(4), рассмотрены в [3, 4]. В случае когда коэффициенты в (1), (2) постоянные, получим систему типа [1] теории дифференциальных игр.

Обозначения:

$$D=\left\{\left(t,\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}\right):0\le t\le\omega,\left\|\boldsymbol{X}\right\|\le\rho_1,\left\|\boldsymbol{Y}\right\|\le\rho_2\right\},\ \tilde{\boldsymbol{B}}_i(\omega)=\int_0^\omega \boldsymbol{B}_i(\tau)\,d\tau,\ \tilde{\gamma}_i=\left\|\tilde{\boldsymbol{B}}_i^{-1}(\omega)\right\|,$$

$$\alpha_i=\max_t\left\|\boldsymbol{A}_i(t)\right\|,\ \beta_i=\max_t\left\|\boldsymbol{B}_i(t)\right\|,\ c_i=\max_t\left\|\boldsymbol{C}_i(t)\right\|,\ \delta_i=\max_t\left\|\boldsymbol{S}_i(t)\right\|,$$

$$\mu_i=\max_t\left\|\boldsymbol{P}_i(t)\right\|,\ h_i=\max_t\left\|\boldsymbol{F}_i(t)\right\|,\ \left\|\boldsymbol{T}\right\|_C=\max_t\left\|\boldsymbol{T}(t)\right\|,$$

$$p_{11}=\tilde{\gamma}_1\left[\frac{1}{2}\beta_1\left(\alpha_1c_1+\beta_1+2\delta_1\rho_1+\delta_2\rho_2\right)\omega^2+\left(\alpha_1c_1+2\delta_1\rho_1+\delta_2\rho_2\right)\omega\right],$$

$$p_{12}=\tilde{\gamma}_1\delta_2\rho_1\omega\left(\frac{1}{2}\beta_1\omega+1\right),\ p_{21}=\tilde{\gamma}_2\mu_1\rho_2\omega\left(\frac{1}{2}\beta_2\omega+1\right),$$

$$p_{22}=\tilde{\gamma}_2\left[\frac{1}{2}\beta_2\left(\alpha_2c_2+\beta_2+\mu_1\rho_1+2\mu_2\rho_2\right)\omega^2+\left(\alpha_2c_2+\mu_1\rho_1+2\mu_2\rho_2\right)\omega\right],$$

где $t\in[0,\omega]$, $0<\rho_1,\rho_2<\infty$, $\|\cdot\|$ – норма матриц, определяемая в рамках конечномерной банаховой алгебры $\mathfrak{B}(n)$ непрерывных матричнозначных функций.

Установим однозначную разрешимость задачи (1)–(4).

Теорема. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) $\det\tilde{\boldsymbol{B}}_i(\omega)\ne 0\ \ (i=1,2)$, (5)

2) $$\begin{gathered}\tilde{\gamma}_1\left\{\frac{1}{2}\beta_1\left[\left(\alpha_1c_1+\beta_1\right)\rho_1+\delta_1\rho_1^2+\delta_2\rho_1\rho_2+h_1\right]\omega^2+\right.\\ \left.+\left[\alpha_1c_1\rho_1+\delta_1\rho_1^2+\delta_2\rho_1\rho_2+h_1\right]\omega\right\}\le\rho_1,\\ \tilde{\gamma}_2\left\{\frac{1}{2}\beta_2\left[\left(\alpha_2c_2+\beta_2\right)\rho_2+\mu_2\rho_2^2+\mu_1\rho_1\rho_2+h_2\right]\omega^2+\right.\\ \left.+\left[\alpha_2c_2\rho_2+\mu_2\rho_2^2+\mu_1\rho_1\rho_2+h_2\right]\omega\right\}\le\rho_2,\end{gathered}\tag{6}$$

3) $p_{11}<1$, $\det\left(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{P}\right)>0$, (7)

где $\boldsymbol{E}=diag(1,1)$, $\boldsymbol{P}=\left(p_{ij}\right)$. *Тогда задача (1)–(4) однозначно разрешима в области D.*

Доказательство. С помощью условия (5) сначала выведем систему матричных интегральных уравнений, эквивалентную задаче (1)–(4).

Из (1), (3) получим

$$\int_0^\omega \boldsymbol{X}(\tau)\boldsymbol{B}_1(\tau)\,d\tau=$$

$$=-\int_0^\omega\left[\boldsymbol{A}_1(\tau)\boldsymbol{X}(\tau)\boldsymbol{C}_1(\tau)+\boldsymbol{X}(\tau)\left(\boldsymbol{S}_1(\tau)\boldsymbol{X}(\tau)+\boldsymbol{S}_2(\tau)\boldsymbol{Y}(\tau)\right)+\boldsymbol{F}_1(\tau)\right]d\tau.\tag{8}$$

Применим тождество типа [8, с. 47]

$$\int_0^{\omega} \boldsymbol{X}(\tau)\boldsymbol{B}_1(\tau)d\tau = \boldsymbol{X}(t)\int_0^{\omega}\boldsymbol{B}_1(\tau)d\tau - \int_0^{t}\left(d\boldsymbol{X}(\tau)\right)\left(\int_0^{\tau}\boldsymbol{B}_1(\sigma)d\sigma\right) +$$

$$+\int_t^{\omega}\left(d\boldsymbol{X}(\tau)\right)\left(\int_{\tau}^{\omega}\boldsymbol{B}_1(\sigma)d\sigma\right). \qquad (9)$$

Так как, согласно (5), $\det\tilde{\boldsymbol{B}}_1(\omega)\neq 0$, то на основе (8), (9) в силу (1) получим уравнение

$$\boldsymbol{X}(t) = \left\{\int_0^{t} G_1\left(\tau,\boldsymbol{X}(\tau),\boldsymbol{Y}(\tau)\right)\left(\int_0^{\tau}\boldsymbol{B}_1(\sigma)d\sigma\right)d\tau -\right.$$

$$-\int_t^{\omega} G_1\left(\tau,\boldsymbol{X}(\tau),\boldsymbol{Y}(\tau)\right)\left(\int_{\tau}^{\omega}\boldsymbol{B}_1(\sigma)d\sigma\right)d\tau -$$

$$\left.-\int_0^{\omega}\left[\boldsymbol{A}_1(\tau)\boldsymbol{X}(\tau)\boldsymbol{C}_1(\tau)+\boldsymbol{X}(\tau)\left(\boldsymbol{S}_1(\tau)\boldsymbol{X}(\tau)+\boldsymbol{S}_2(\tau)\boldsymbol{Y}(\tau)\right)+\boldsymbol{F}_1(\tau)\right]d\tau\right\}\tilde{\boldsymbol{B}}_1^{-1}(\omega). \qquad (10)$$

Аналогично

$$\boldsymbol{Y}(t) = \left\{\int_0^{t} G_2\left(\tau,\boldsymbol{X}(\tau),\boldsymbol{Y}(\tau)\right)\left(\int_0^{\tau}\boldsymbol{B}_2(\sigma)d\sigma\right)d\tau -\right.$$

$$-\int_t^{\omega} G_2\left(\tau,\boldsymbol{X}(\tau),\boldsymbol{Y}(\tau)\right)\left(\int_{\tau}^{\omega}\boldsymbol{B}_2(\sigma)d\sigma\right)d\tau -$$

$$\left.-\int_0^{\omega}\left[\boldsymbol{A}_2(\tau)\boldsymbol{Y}(\tau)\boldsymbol{C}_2(\tau)+\boldsymbol{Y}(\tau)\left(\boldsymbol{P}_1(\tau)\boldsymbol{X}(\tau)+\boldsymbol{P}_2(\tau)\boldsymbol{Y}(\tau)\right)+\boldsymbol{F}_2(\tau)\right]d\tau\right\}\tilde{\boldsymbol{B}}_2^{-1}(\omega). \qquad (11)$$

Несложно показать и обратное: всякое непрерывное решение системы матричных интегральных уравнений (10), (11) является решением задачи (1)–(4).

Далее для исследования разрешимости системы уравнений (10), (11) запишем её в операторной форме:

$$\boldsymbol{X} = \mathcal{L}_1\left(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}\right), \qquad (12)$$

$$\boldsymbol{Y} = \mathcal{L}_2\left(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}\right), \qquad (13)$$

где $\mathcal{L}_i\ (i=1,2)$ – соответствующие интегральные операторы в (10), (11), действующие на множестве $\mathbb{C}\left(I,\mathbb{R}^{n\times n}\times\mathbb{R}^{n\times n}\right)$.

Установим, что из условий (6), (7) следует выполнение модификации [8, § 3.4] обобщения [6, с. 94] принципа Банаха – Каччиопполи [5, с. 605] сжимающих отображений на множестве $\tilde{D}=\left\{\left(\boldsymbol{X}(t),\boldsymbol{Y}(t)\right):\|\boldsymbol{X}\|_C\le\rho_1,\|\boldsymbol{Y}\|_C\le\rho_2\right\}$.

Сначала покажем, что $\left(\mathcal{L}_1(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}),\mathcal{L}_2(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})\right)\in\tilde{D}$, если $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})\in\tilde{D}$. В (12), (13) выполним оценки по норме. Имеем последовательно

$$\left\|\mathcal{L}_1(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})\right\|\le\tilde{\gamma}_1\left\{\int_0^t\left(\int_0^\tau\|\boldsymbol{B}_1(\sigma)\|d\sigma\right)\left[\|\boldsymbol{A}_1(\tau)\|\|\boldsymbol{X}(\tau)\|\|\boldsymbol{C}_1(\tau)\|+\|\boldsymbol{X}(\tau)\|\|\boldsymbol{B}_1(\tau)\|+\right.\right.$$

$$\left.+\|\boldsymbol{X}(\tau)\|\|\boldsymbol{S}_1(\tau)\|\|\boldsymbol{X}(\tau)\|+\|\boldsymbol{X}(\tau)\|\|\boldsymbol{S}_2(\tau)\|\|\boldsymbol{Y}(\tau)\|+\|\boldsymbol{F}_1(\tau)\|\right]d\tau+$$

$$+\int_t^\omega\left(\int_\tau^\omega\|\boldsymbol{B}_1(\sigma)\|d\sigma\right)\left[\|\boldsymbol{A}_1(\tau)\|\|\boldsymbol{X}(\tau)\|\|\boldsymbol{C}_1(\tau)\|+\|\boldsymbol{X}(\tau)\|\|\boldsymbol{B}_1(\tau)\|+\right.$$

$$\left.+\|\boldsymbol{X}(\tau)\|\|\boldsymbol{S}_1(\tau)\|\|\boldsymbol{X}(\tau)\|+\|\boldsymbol{X}(\tau)\|\|\boldsymbol{S}_2(\tau)\|\|\boldsymbol{Y}(\tau)\|+\|\boldsymbol{F}_1(\tau)\|\right]d\tau+$$

$$\left.+\int_0^\omega\left[\|\boldsymbol{A}_1(\tau)\|\|\boldsymbol{X}(\tau)\|\|\boldsymbol{C}_1(\tau)\|+\|\boldsymbol{X}(\tau)\|\|\boldsymbol{S}_1(\tau)\|\|\boldsymbol{X}(\tau)\|+\|\boldsymbol{X}(\tau)\|\|\boldsymbol{S}_2(\tau)\|\|\boldsymbol{Y}(\tau)\|+\|\boldsymbol{F}_1(\tau)\|\right]d\tau\right\}\le$$

$$\le\tilde{\gamma}_1\left\{\int_0^t\beta_1\tau\left[(\alpha_1c_1+\beta_1)\rho_1+\delta_1\rho_1^{\,2}+\delta_2\rho_1\rho_2+h_1\right]d\tau+\right.$$

$$+\int_t^\omega\beta_1(\omega-\tau)\left[(\alpha_1c_1+\beta_1)\rho_1+\delta_1\rho_1^{\,2}+\delta_2\rho_1\rho_2+h_1\right]d\tau+$$

$$\left.+\int_0^\omega\left[\alpha_1c_1\rho_1+\delta_1\rho_1^{\,2}+\delta_2\rho_1\rho_2+h_1\right]d\tau\right\}\le$$

$$\le\tilde{\gamma}_1\left\{\frac{1}{2}\beta_1\left[(\alpha_1c_1+\beta_1)\rho_1+\delta_1\rho_1^{\,2}+\delta_2\rho_1\rho_2+h_1\right]\omega^2+\right.$$

$$\left.+\left[\alpha_1c_1\rho_1+\delta_1\rho_1^{\,2}+\delta_2\rho_1\rho_2+h_1\right]\omega\right\}. \tag{14}$$

Аналогичные оценки выполним для оператора $\mathcal{L}_2$:

$$\left\|\mathcal{L}_2(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})\right\|\le\tilde{\gamma}_2\left\{\frac{1}{2}\beta_2\left[(\alpha_2c_2+\beta_2)\rho_2+\mu_2\rho_2^{\,2}+\mu_1\rho_1\rho_2+h_2\right]\omega^2+\right.$$

$$\left.+\left[\alpha_2c_2\rho_2+\mu_2\rho_2^{\,2}+\mu_1\rho_1\rho_2+h_2\right]\omega\right\}. \tag{15}$$

Из (14), (15) на основании условия (6) следуют соотношения

$$\left\|\mathcal{L}_1(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})\right\|_C\le\rho_1, \tag{16}$$

$$\left\|\mathcal{L}_2(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})\right\|_C\le\rho_2. \tag{17}$$

Далее имеем оценки, характеризующие обобщенную сжимаемость операторов $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$:

$$\left\| \mathcal{L}_1\left(\tilde{\tilde{X}},\tilde{\tilde{Y}}\right) - \mathcal{L}_1\left(\tilde{X},\tilde{Y}\right)\right\|_C \le \tilde{\gamma}_1 \left\{ \left[\frac{1}{2}\beta_1\left(\alpha_1 c_1 + \beta_1 + 2\delta_1\rho_1 + \delta_2\rho_2\right)\omega^2 + \right.\right.$$

$$\left.\left. +\left(\alpha_1 c_1 + 2\delta_1\rho_1 + \delta_2\rho_2\right)\omega \right] \left\| \tilde{\tilde{X}} - \tilde{X} \right\|_C + \left[\frac{1}{2}\beta_1\delta_2\rho_1\omega^2 + \delta_2\rho_1\omega \right] \left\| \tilde{\tilde{Y}} - \tilde{Y} \right\|_C \right\}, \qquad (18)$$

$$\left\| \mathcal{L}_2\left(\tilde{\tilde{X}},\tilde{\tilde{Y}}\right) - \mathcal{L}_2\left(\tilde{X},\tilde{Y}\right)\right\|_C \le \tilde{\gamma}_2 \left\{ \mu_1\rho_2\omega\left(\frac{1}{2}\beta_2\omega + 1\right) \left\| \tilde{\tilde{X}} - \tilde{X} \right\|_C + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{1}{2}\beta_2\left(\alpha_2 c_2 + \beta_2 + \mu_1\rho_1 + 2\mu_2\rho_2\right)\omega^2 + \left(\alpha_2 c_2 + \mu_1\rho_1 + 2\mu_2\rho_2\right)\omega \right] \left\| \tilde{\tilde{Y}} - \tilde{Y} \right\|_C \right\}. \qquad (19)$$

Запишем (18), (19) в матричном виде

$$\tilde{K} \le PK,$$

где

$$\tilde{K} = \begin{pmatrix} \left\| \mathcal{L}_1\left(\tilde{\tilde{X}},\tilde{\tilde{Y}}\right) - \mathcal{L}_1\left(\tilde{X},\tilde{Y}\right)\right\|_C \\ \left\| \mathcal{L}_2\left(\tilde{\tilde{X}},\tilde{\tilde{Y}}\right) - \mathcal{L}_2\left(\tilde{X},\tilde{Y}\right)\right\|_C \end{pmatrix}, \; K = \begin{pmatrix} \left\| \tilde{\tilde{X}} - \tilde{X} \right\|_C \\ \left\| \tilde{\tilde{Y}} - \tilde{Y} \right\|_C \end{pmatrix}.$$

Используя условие (7), можно показать, что у положительной матрицы P характеристические числа расположены внутри единичного круга с центром в начале координат. Таким образом, на множестве $\tilde{D}$ имеют место соотношения (16)–(19), являющиеся условием модификации обобщенного принципа сжимающих отображений применительно к системе уравнений (12), (13). На основании этого заключаем, что решение $X = X(t)$, $Y = Y(t)$ этой системы на множестве $\tilde{D}$ существует и единственно. В конечном итоге это означает, что задача (1)–(4) однозначно разрешима в области D. Теорема полностью доказана.

Решение задачи (1)–(4) представимо в виде равномерно сходящейся последовательности $\left\{\mathbf{X}_k(t), \mathbf{Y}_k(t)\right\}_0^\infty$, определяемой рекуррентными интегральными соотношениями типа [7].

Список использованных источников и литературы

1. *Jódar*, *L.* Explicit solutions of Riccati equations appearing in differential games / L. Jódar // Applied Mathematics Letters. 1990. Vol. 3. No. 4. P. 9-12.

2. *Murty*, *K. N.* Two (multi) point nonlinear Lyapunov systems – existence and uniqueness / K. N. Murty, G. W. Howell, S. Sivasundaram // Journ. Mathem. Anal. and Appl. 1992. Vol. 167. P. 505–515.

3. *Анисович*, *В. В.* Об одном подходе к решению задач оптимального управления / В. В. Анисович, Б. И. Крюков, В. М. Мадорский // Доклады АН СССР. – 1980. – Т. 251, № 2. – С. 265–268.

4. *Зубов*, *В. И.* Лекции по теории управления / В. И. Зубов. – Москва : Наука, 1975. – 496 с.

5. *Канторович*, *Л. В.* Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. Москва : Наука, 1977. – 744 с.

6. Приближенное решение операторных уравнений / М. А. Красносельский, Г. М. Вайникко, П. П. Забрейко и др. – Москва : Наука, 1969. – 455 с.
7. *Лаптинский*, *В. Н.* Конструктивные методы построения решения периодической краевой задачи для системы матричных дифференциальных уравнений типа Риккати / В. Н. Лаптинский, Д. В. Роголев // Дифференциальные уравнения. – 2011. – Т. 47, № 10. – С. 1412–1420.
8. *Лаптинский*, *В. Н.* Конструктивный анализ управляемых колебательных систем / В. Н. Лаптинский. – Минск : ИМ НАН Беларуси, 1998. 300 с.

Сведения об авторе

Дмитрий Владимирович Роголев, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Высшая математика» Белорусско-Российского университета (Республика Беларусь, г. Могилёв), d-rogolev@tut.by