

**Об одном аналитическом методе построения решения задачи
о динамическом ламинарном пограничном слое в автомодельном случае**

В. Н. Лаптинский, А. А. Романенко

Изложен алгоритм решения задачи о динамическом ламинарном пограничном слое в автомодельном случае, с помощью которого получены весьма простые по форме, но достаточно точные ее приближенные решения в определенном диапазоне углов атаки набегающего потока.

Ключевые слова: уравнение Фолкнера – Скэн, алгоритм, аналитическое решение.

**On an analytical method for constructing a solution to the problem
of a dynamic laminar boundary layer in a self-similar case**

V. N. Laptinskii, A. A. Romanenko

An algorithm for solving the problem of a dynamic laminar boundary layer in the self-similar case is presented, with the help of which very simple in form, but sufficiently accurate approximate solutions of it in a certain range of angles of attack of the incident flow are obtained.

Keywords: Falkner – Scan equation, algorithm, analytical solution.

В данной работе, являющейся продолжением и развитием [5, 6], изложен алгоритм построения приближенных решений автомодельной задачи о динамическом ламинарном пограничном слое, которой посвящена обширная литература (см., книги [8, 7] и приведенную в них библиографию). В классической теории пограничного слоя эта задача решалась в основном численными и численно-аналитическими методами [1, 3 и др.]. Аналитические методы позволяют более глубоко изучить влияние физических параметров задачи на формирование пограничного слоя [8, 7]. Следует отметить, что и в XXI столетии эта проблематика привлекает внимание многих исследователей с различных точек зрения, теоретической и прикладной [2, 4 и др.].

Задача о динамическом ламинарном пограничном слое (задача Фолкнера – Скэн) имеет вид [8, 7]

$$f''' = -\frac{m+1}{2} f f'' + m(f'^2 - 1), \quad (1)$$

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad f'(\infty) = 1. \quad (2)$$

В [5] установлено, что ее решение представимо в виде

$$f(t) = \int_0^t \left(\int_0^\tau e^{-\int_0^\sigma \varphi(s) ds} d\sigma \right) d\tau \Big/ \int_0^\infty e^{-\int_0^\sigma \varphi(s) ds} d\sigma, \quad 0 \leq t < \infty, \quad (3)$$

где $m = \beta/(2\pi - \beta)$, $t = \eta$ – автомодельная переменная [7, с. 169], $\varphi(t)$ – функция, представляющая собой решение вспомогательной задачи

$$\frac{d\varphi}{dt} = \varphi^2 - a f \varphi + (a - 2b) f', \quad (4)$$

$$\varphi(0) = \frac{b}{\lambda}, \quad (5)$$

$$\lambda \int_0^\infty e^{-\int_0^\sigma \varphi(s) ds} d\sigma - 1 = 0, \quad (6)$$

при этом $\lambda = \lambda(m) \equiv f''(0, m)$, $a = (m + 1)/2$, $b = m$, $a - 2b > 0$.

Идея получения уравнения (4) легко усматривается в случае $m = 0$; тогда уравнение (1) принимает вид

$$f''' = -\frac{1}{2} f f''. \quad (7)$$

Это уравнение Блазиуса в случае безградиентного обтекания плоской пластины. Из (7) с учетом (2) имеем последовательно

$$f''(t) = \lambda e^{-\frac{1}{2} \int_0^t f(\tau) d\tau}, \quad f'(t) = \lambda \int_0^t e^{-\frac{1}{2} \int_0^\tau f(\sigma) d\sigma} d\tau, \quad f(t) = \lambda \int_0^t d\tau \int_0^\tau e^{-\frac{1}{2} \int_0^s f(s) ds} d\sigma. \quad (8)$$

Соотношения (8) аналогичны (3), при этом следует положить $\varphi = \frac{1}{2} f$ и изменить условие (5): $\varphi(0) = 0$. Следует отметить, что вспомогательные функции широко используются в теории пограничного слоя (различные форм-параметры, толщины потери импульса, вытеснения и др.). Предлагаемая вспомогательная функция является новой и, как показывают расчеты, достаточно эффективной в смысле простоты и точности приближенных решений, приемлемых для получения соответствующих инженерных формул для вычисления толщины теплового пограничного слоя, локального коэффициента теплоотдачи и др.

По-видимому, наиболее простым является построение функции $\varphi(t)$ в виде ряда Маклорена

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \frac{\varphi'(0)}{1!} t + \frac{\varphi''(0)}{2!} t^2 + \dots + \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} t^n + \dots \quad (9)$$

Практические алгоритмы основаны на определенных частичных суммах этого ряда, при этом соответствующие несобственные интегралы сходятся, поскольку $\varphi = \varphi(t, m, \lambda) \geq \gamma > 0$, вообще говоря, при $t > 0$, $0 \leq m < \infty$, $0 < \lambda_0 \leq \lambda < \infty$, $\lambda_0 = \lambda(0)$. Особенность данного алгоритма заключается в том, что значения параметра m должны принадлежать промежутку $0 \leq m < 1/3$ ($0 \leq \beta < \pi/2$). Уравнение (6), разумеется, следует решать численно.

Для построения приближенных аналитических решений задачи (1), (2) воспользуемся формулами (3)–(6), при этом вспомогательную функцию $\varphi(t)$ принимаем в виде полинома определенного порядка. Приведем коэффициенты этого полинома для $n = 8$. Выполнив соответствующие выкладки, получим последовательно в явном виде:

$$\begin{aligned}\varphi(0) &= b/\lambda, \quad f(0) = 0, \\ \varphi'(0) &= (b/\lambda)^2, \quad f'(0) = 0, \\ \varphi''(0) &= 2(b/\lambda)^3 + (a - 2b)\lambda, \quad f''(0) = \lambda, \\ \varphi'''(0) &= 6(b/\lambda)^4 - 2b^2, \quad f'''(0) = -b, \\ \varphi^{(IV)}(0) &= 24(b/\lambda)^5 + 4b^2(a - 4b)/\lambda, \quad f^{(IV)}(0) = 0\end{aligned}$$

и далее в символической форме

$$\begin{aligned}\varphi^{(V)}(t) &= 2\left[3(\varphi'')^2 + 4\varphi'\varphi''' + \varphi\varphi^{(IV)}\right] - \\ &\quad - a\left[f^{(IV)}\varphi + 4f'''\varphi' + 6f''\varphi'' + 4f'\varphi''' + f\varphi^{(IV)}\right] + (a - 2b)f^{(V)}, \\ f^{(V)}(t) &= -af^{(IV)}f - 2(a - b)f''f' - (a - 2b)(f'')^2, \\ \varphi^{(VI)}(t) &= 2\left[10\varphi''\varphi''' + 5\varphi'\varphi^{(IV)} + \varphi\varphi^{(V)}\right] - \\ &\quad - a\left[f^{(V)}\varphi + 5f^{(IV)}\varphi' + 10f'''\varphi'' + 10f''\varphi''' + 5f'\varphi^{(IV)} + f\varphi^{(V)}\right] + (a - 2b)f^{(VI)}, \\ f^{(VI)}(t) &= -af^{(V)}f - (3a - 2b)f^{(IV)}f' - 2(2a - 3b)f''f''', \\ \varphi^{(VII)}(t) &= 2\left[10(\varphi''')^2 + 15\varphi''\varphi^{(IV)} + 6\varphi'\varphi^{(V)} + \varphi\varphi^{(VI)}\right] - \\ &\quad - \left[f^{(VI)}\varphi + 6f^{(V)}\varphi' + 15f^{(IV)}\varphi'' + 20f'''\varphi''' + 15f''\varphi^{(IV)} + 6f'\varphi^{(V)} + f\varphi^{(VI)}\right] + \\ &\quad + (a - 2b)f^{(VII)}, \\ f^{(VII)}(t) &= -af^{(VI)}f - 2(2a - b)f^{(V)}f' - (7a - 8b)f^{(IV)}f'' - 2(2a - 3b)(f''')^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi^{(VIII)}(t) = & 2 \left[35\varphi''' \varphi^{(IV)} + 21\varphi'' \varphi^{(V)} + 7\varphi' \varphi^{(VI)} + \varphi \varphi^{(VII)} \right] - \\ & - a \left[f^{(VII)} \varphi + 7f^{(VI)} \varphi' + 21f^{(V)} \varphi'' + 35f^{(IV)} \varphi''' + 35f''' \varphi^{(IV)} + 21f'' \varphi^{(V)} + \right. \\ & \left. + 7f' \varphi^{(VI)} + f \varphi^{(VII)} \right] + (a - 2b) f^{(VIII)}, \end{aligned}$$

$$f^{(VIII)}(t) = -af^{(VII)}f - (5a - 2b)f^{(VI)}f' - (11a - 10b)f^{(V)}f'' - (11a - 14b)f^{(IV)}f'''.$$

Подставляя найденные выражения в (9), получим полином Маклорена для вспомогательной функции $\varphi(t)$, на основе которого по формулам (3), (6) получим приближенное решение задачи (1), (2):

$$f(t) \approx \lambda \int_0^t (t - \tau) \exp \left(- \left(\varphi(0)\tau + \frac{\varphi'(0)}{2!} \tau^2 + \frac{\varphi''(0)}{3!} \tau^3 + \dots + \frac{\varphi^{(VIII)}(0)}{9!} \tau^9 \right) \right) d\tau, \quad (10)$$

где значения параметра $\lambda = \lambda(m)$ находится из трансцендентного уравнения

$$\lambda \int_0^\infty \exp \left(- \left(\varphi(0)\tau + \frac{\varphi'(0)}{2!} \tau^2 + \frac{\varphi''(0)}{3!} \tau^3 + \dots + \frac{\varphi^{(VIII)}(0)}{9!} \tau^9 \right) \right) d\tau - 1 = 0. \quad (11)$$

Приближение

$$f(t) \approx \lambda \int_0^t (t - \tau) \exp \left(- \left(\frac{b}{\lambda} \tau + \left(\frac{b}{\lambda} \right)^2 \frac{\tau^2}{2!} + \left(2 \left(\frac{b}{\lambda} \right)^3 + (a - 2b)\lambda \right) \frac{\tau^3}{3!} \right) \right) d\tau, \quad (12)$$

$$\lambda \int_0^\infty \exp \left(- \left(\frac{b}{\lambda} \tau + \left(\frac{b}{\lambda} \right)^2 \frac{\tau^2}{2!} + \left(2 \left(\frac{b}{\lambda} \right)^3 + (a - 2b)\lambda \right) \frac{\tau^3}{3!} \right) \right) d\tau - 1 = 0 \quad (13)$$

также приемлемо для практических расчетов.

Для иллюстрации решений на рис. 1 приведены графики точного (численного) решения задачи (1), (2) функции $f(t)$ и ее первых двух производных, а также графики приближенных решений (10), (11) и (12), (13) и соответствующих производных для $m = 0.2$. Графики построены для практически значимого промежутка $0 \leq t \leq 5$.

Приближенные решения (10), (11) и (12), (13) визуально неразличимы, поэтому целесообразно выполнить сравнительный анализ точности приближений на основе их численных значений. Приближение (10) функции $f(t)$ и ее первой производной, например, для углов $\beta_i = i\pi/10$, т. е. $0 \leq m_i < 1/3$ ($i = \overline{0;5}$) обеспечивает погрешность не более 0,5 % в промежутке $0 \leq t \leq 8.8$. Приближение (12) функции $f(t)$ и ее первой производной для тех же углов обеспечивает погрешность до 3 % в том же промежутке изменения t .

Заметим, что при нахождении касательного напряжения на стенке требуется только величина $f''(0, m)$ [8, 7].

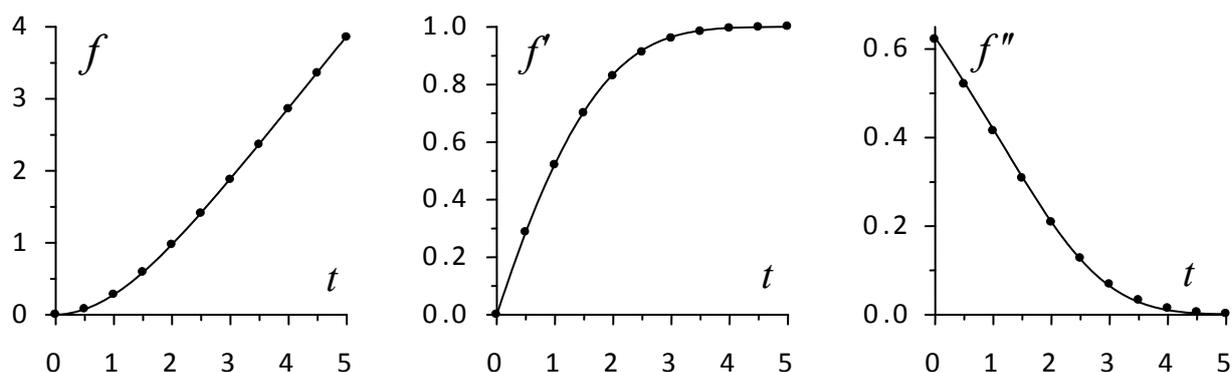


Рис. 1. Графики $f(t)$, $f'(t)$ и $f''(t)$ для $m = 0.2$. Точки соответствуют точному решению; сплошная тонкая линия – приближениям (10), (11) и (12), (13)

Список использованных источников и литературы

1. Forbrich, C. A. Improved Solutions to the Falkner–Skan Boundary-Layer Equation / C. A. Forbrich // AIAA Journal of Technical Notes. 1982. Vol. 20. № 9. P. 1306.
2. Ganapol, B. D. Highly accurate solutions of the Blasius and Falkner–Skan boundary layer equations via convergence acceleration / B. D. Ganapol // Preprint submitted on 19 Jun 2010. Department of Aerospace and Mechanical Engineering University of Arizona.
3. Katagiri, M. On accurate numerical solutions of Falkner–Skan Equation / M. Katagiri // Japan Aerospace Exploration Agency 1986. NII – Electronic Library Service. P. 65-70.
4. Варин, В. П. Асимптотическое разложение решения Крокко и константа Блазиуса / В. П. Варин // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2018. – № 58: 4. – С. 530–540.
5. Лаптинский, В. Н. Конструктивный метод анализа задачи о ламинарном пограничном слое и его применение к расчету охлаждающей способности кристаллизаторов при непрерывном литье / В. Н. Лаптинский // Препринт № 19 Института технологии металлов НАН Беларуси, Ч. III. – Могилев : Изд. отдел БРУ, 2010.
6. Лаптинский, В. Н. Конструктивный метод анализа задачи о ламинарном пограничном слое и его применение к расчету охлаждающей способности кристаллизаторов при непрерывном литье / В. Н. Лаптинский, А. А. Романенко // Препринт № 20 Института технологии металлов НАН Беларуси, Ч. IV. – Могилев : Изд. отдел БРУ, 2010.
7. Теория тепломассообмена : учебник для вузов / под ред. А. И. Леонтьева. – Мросква : Высш. шк., 1979.
8. Шлихтинг, Г. Теория пограничного слоя / Г. Шлихтинг. – Москва : Наука, 1974.

Сведения об авторах

Валерий Николаевич Лаптинский, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры «Высшая математика» Белорусско-Российского университета (Республика Беларусь, г. Могилев), lavani@tut.by

Алексей Андреевич Романенко, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры «Высшая математика» Белорусско-Российского университета (Республика Беларусь, г. Могилев), romanenko1956@gmail.com