УДК 517.977.57

О достаточных условиях существования оптимальных пространств для линейных функциональных уравнений

В. Г. Замураев

Рассматривается задача оптимального управления, в которой управляемый процесс описывается линейным функциональным уравнением в гильбертовом пространстве, а управляющим воздействием является изменение пространства. Получены достаточные условия существования решения. Результаты проиллюстрированы примером.

Ключевые слова: оптимизация области, оптимизация пространства, вариационное уравнение, оператор проектирования, многозначное отображение, полунепрерывность изнутри, полунепрерывность извне.

On the Sufficient Conditions for the Existence of Optimal Spaces for Linear Functional Equations

V. G. Zamuraev

An optimal control problem is considered, in which a controlled process is described by a linear functional equation in a Hilbert space, and the control action is a change of the space. Sufficient conditions for the existence of a solution are obtained. The results are illustrated with an example.

Keywords: domain optimization, space optimization, variational equation, projection operator, set-valued mapping, inner semicontinuity, outer semicontinuity.

Рассмотрим метрическое пространство C – множество управлений, вещественное сепарабельное гильбертово пространство F со скалярным произведением $[u,v]$ и нормой $|u|$, $|u|=[u,u]^{1/2}$, и семейство $\{F(c)\}$, $c\in C$, замкнутых подпространств пространства F. Зададим на пространстве F линейный непрерывный функционал $l(u)$. Рассмотрим уравнение

$$u\in F(c),\ [u,v]=l(v)\ \ \forall v\in F(c). \tag{1}$$

По теореме представлений Риса $\forall c\in C$ уравнение (1) имеет единственное решение $u_0(c)$. Зададим функционал $J(c,u): C\times F\to\mathbb{R}$, обозначим

$$j(c)=J\big(c,u_0(c)\big)$$

и рассмотрим задачу минимизации функционала j на множестве C.

Пусть $P(c)$ – оператор ортогонального проектирования пространства F на подпространство $F(c)$.

В работе автора [1] были установлены следующие достаточные условия разрешимости рассматриваемой задачи:

1) C – компакт;

2) из условий

$$c_n \in C\,,\ c_n \to c \in C\,, \tag{2}$$

$$u \in F\,,\ P(c_n)u \underset{w}{\to} \overline{u} \ \text{(слабо в } F\text{)}, \tag{3}$$

следует, что $\overline{u} = P(c)u$;

3) функционал $J(c,u)$ ограничен снизу, непрерывен по c и удовлетворяет условию Липшица по u.

Рассмотрим многозначное отображение $F: C \to F$, $c \mapsto F(c)$.

Отображение F назовем [2] секвенциально слабо полунепрерывным извне на C, если из условий (2), $u_n \in F(c_n)$, $u_n \underset{w}{\to} u \in F$ (слабо в F) следует, что $u \in F(c)$. Отображение F называется полунепрерывным изнутри на C, если из условия (2) следует, что $\forall u \in F(c)\ \exists u_n \in F(c_n)$ такой, что $u_n \to u$.

Теорема. Если многозначное отображение F на пространстве C секвенциально слабо полунепрерывно извне и полунепрерывно изнутри, то выполнено достаточное условие *2*.

Доказательство. Пусть выполнено (2) и (3). Из определения проектора имеем $P(c_n)u \in F(c_n)$. Из секвенциальной слабой полунепрерывности отображения F извне тогда следует, что $\overline{u} \in F(c)$.

Для произвольного $v \in F(c)$ найдем элемент $v_n \in F(c_n)$ такой, что $v_n \to v$. Существование такого элемента гарантировано полунепрерывностью отображения F изнутри. При таком выборе v_n, используя определение и симметричность проектора и свойства скалярного произведения, находим:

$$[\overline{u}, v] = \lim_{n\to\infty}\left[P(c_n)u, v_n\right] = \lim_{n\to\infty}\left[u, P(c_n)v_n\right] = \lim_{n\to\infty}[u, v_n] = [u, v].$$

Таким образом, $\overline{u} \in F(c)$, $[\overline{u}, v] = [u, v]\ \ \forall v \in F(c)$, откуда следует, что $\overline{u} = P(c)u$.

Замечание. Пусть $D(c)$ – линейное множество, плотное в $F(c)$. Утверждение теоремы остается справедливым, если вместо полунепрерывности отображения F изнутри потребовать, чтобы из сходимости (2) следовало, что $\forall u \in D(c)\ \exists u_n \in F(c_n)$ такой, что $u_n \to u$. В этом случае мы приходим к уравнению $\overline{u} \in F(c)$, $[\overline{u}, v] = [u, v]\ \ \forall v \in D(c)$, из которого следует $\overline{u} = P(c)u$.

Пример. Рассмотрим следующую краевую задачу для линейного дифференциального уравнения второго порядка:

$$Au \equiv -\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x)u = f(x),\ x \in (a,b), \tag{4}$$

$$u(a) = u(b) = 0. \tag{5}$$

Функции p, p', q будем предполагать непрерывными на $[a,b]$,

$$p(x) \geq p_0 > 0,\ q(x) \geq 0,$$

$f \in L_2(a,b)$. При выполнении перечисленных условий оператор A краевой задачи (4)–(5) является [3] симметричным и положительно определенным на плотном в $L_2(a,b)$ множестве функций

$$D = \left\{ u \in C^{(2)}[a,b] \middle| u(a) = u(b) = 0 \right\}.$$

Энергетическое пространство F оператора A, определяемое как пополнение множества D в норме $|u| = (Au,u)^{1/2}_{L_2(a,b)}$, состоит из абсолютно непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций, обращающихся в нуль на концах отрезка и имеющих суммируемую с квадратом первую производную (пространство Соболева). Пространство F непрерывно вложено в пространство $L_2(a,b)$,

$$|u| \geq \gamma \|u\|_{L_2(a,b)},$$

где γ – некоторая положительная постоянная.

Пусть $c \in [a, b-h]$, $0 < h < b-a$. Рассмотрим задачу (4)–(5) на отрезке $[c, c+h]$:

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x)u = f(x),\ x \in (c, c+h), \tag{6}$$

$$u(c) = u(c+h) = 0. \tag{7}$$

Энергетическое пространство $F(c)$ оператора краевой задачи (6)–(7) определим как пополнение множества

$$D(c) = \left\{ u \in C^{(2)}[c, c+h] \middle| u(c) = u(c+h) = 0 \right\}$$

в норме пространства F. Продолжая функции из $F(c)$ нулем вне отрезка $[c, c+h]$, отождествим пространство $F(c)$ с замкнутым подпространством пространства F, состоящим из функций $u \in F$, обращающихся в нуль почти всюду вне отрезка $[c, c+h]$.

Обобщенное решение $u_0(c)$ задачи (6)–(7) определяется как решение функционального уравнения

$$u \in F(c),\ \int_a^b \left(p(x)\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx} + q(x)uv \right) dx = \int_a^b f(x) v dx \quad \forall v \in F(c).$$

Пусть $u_d = u_d(x)$ – заданная функция из $L_2(a,b)$. Рассматриваемая задача оптимизации состоит в минимизации функционала

$$\left\| u_0(c) - u_d \right\|_{L_2(a,b)} = \left(\int_a^b \left(u_0(c) - u_d \right)^2 dx \right)^{1/2}$$

на отрезке $[a, b-h]$.

Рассмотрим многозначное отображение $F : [a, b-h] \to F$, $c \mapsto F(c)$.

Пусть $c_n \to c \in [a, b-h]$, $u_n \in F(c_n)$, $u_n \underset{w}{\to} u \in F$ (слабо в F).

Из непрерывности вложения пространства F в $L_2(a,b)$ следует, что $u_n \underset{w}{\to} u$ слабо в $L_2(a,b)$:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b u_n v dx = \int_a^b uv dx \quad \forall v \in L_2(a,b).$$

При $v = u \in L_2(a,b)$ имеем:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b u_n u dx = \int_a^b u^2 dx. \tag{8}$$

Полагая $v = \chi_{[c,c+h]} u$, где $\chi_{[c,c+h]}(x)$ – характеристическая функция отрезка $[c, c+h]$, $v \in L_2(a,b)$, получаем:

$$\lim_{n\to\infty} \int_c^{c+h} u_n u dx = \int_c^{c+h} u^2 dx. \tag{9}$$

Оценим теперь абсолютную величину разности между $\int_a^b u_n u dx$ и $\int_c^{c+h} u^2 dx$:

$$\left| \int_a^b u_n u dx - \int_c^{c+h} u^2 dx \right| = \left| \int_{c_n}^{c_n+h} u_n u dx - \int_c^{c+h} u^2 dx \right| \le$$

$$\le \left| \int_{c_n}^{c} u_n u dx + \int_{c+h}^{c_n+h} u_n u dx \right| + \left| \int_c^{c+h} (u_n - u) u dx \right| \le$$

$$\le \left(\int_a^b u_n^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{c_n}^{c} u^2 dx + \int_{c+h}^{c_n+h} u^2 dx \right)^{1/2} + \left| \int_c^{c+h} (u_n - u) u dx \right|.$$

Учитывая ограниченность в $L_2(a,b)$ слабо сходящейся последовательности (u_n), сходимость $c_n \to c$, абсолютную непрерывность интеграла Лебега, (8) и (9), получаем тогда, что $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_a^b u_n u dx = \int\limits_c^{c+h} u^2 dx = \int\limits_a^b u^2 dx$, откуда следует, что $u(x)=0$ почти всюду вне $[c,c+h]$. В совокупности с условием $u \in F$ это означает, что $u \in F(c)$.

Рассмотрим плотное в $F(c)$ множество $D(c)$ финитных в интервале (a,b) функций с носителем в $(c,c+h)$. Пусть $c_n \to c \in [a,b-h]$ и пусть $\tilde{\varphi}(x)$ – финитная в (a,b) функция, носитель которой лежит в $(c,c+h)$. Функция $\tilde{\varphi}$ обращается в нуль в некоторой пограничной полоске интервала $(c,c+h)$: $(c,c+\varepsilon)\cup(c+h-\varepsilon,c+h)$. Сходимость последовательности (c_n) к управлению c означает, что $\forall\varepsilon>0$ найдется число $N(\varepsilon)$ такое, что $|c_n - c| < \varepsilon \ \ \forall n \geq N$, т. е. при таких значениях n функция $\varphi \in D(\Omega(c_n)) \subset F(c_n)$. Последовательность $\varphi_n = \varphi \ \ \forall n \geq N$.

Итак, в данном примере оба условия теоремы выполнены.

Метрическое пространство управлений $C=[a,b-h]$ компактно. Функционал $J(u)=\|u-u_d\|_{L_2(a,b)}$ ограничен снизу и удовлетворяет условию Липшица по u.

Таким образом, рассматриваемая в данном примере задача оптимизации имеет решение.

Список использованных источников и литературы

1. Существование оптимальных пространств для линейных функциональных уравнений / В. Г. Замураев // Дифференциальные уравнения. – 2002. – Т. 38, № 7. – С. 982–985.

2. *Burachik*, *R. S.* Set-valued mappings and enlargements of monotone operators / R. S. Burachik, A. N. Uisem. New York : Springer. 2008.

3. *Михлин*, *С. Г.* Курс математической физики / С. Г. Михлин. – Москва : Наука. 1968.

Сведения об авторе

Виталий Геннадьевич Замураев, кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой «Высшая математика» Белорусско-Российского университета (Республика Беларусь, г. Могилёв), vhz@tut.by