УДК 517.925

Регуляризация многоточечной краевой задачи для матричного уравнения Ляпунова

А. Н. Бондарев

Получены конструктивные достаточные условия однозначной разрешимости многоточечной краевой задачи для матричного уравнения Ляпунова на основе правосторонней декомпозиции коэффициентов. Разработан итерационный алгоритм с вычислительной схемой классического метода последовательных приближений построения решений.

Ключевые слова: матричное уравнение Ляпунова, многоточечная краевая задача, существование и единственность решения, алгоритм, сходимость.

Regularization of the multipoint boundary value problem for the matrix Lyapunov equation

A. N. Bondarev

Constructive sufficient conditions for the unique solvability of the multipoint boundary value problem for the matrix Lyapunov equation are obtained on the basis of the right-sided decomposition of coefficients. The iterative algorithm with a computational scheme of the classical method of successive approximations of solution construction is developed.

Keywords: matrix Lyapunov equation, multipoint boundary value problem, existence and uniqueness of the solution, algorithm, convergence.

Рассмотрим краевую задачу типа [3, 4] для уравнения

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X\,P(t) + X\,B_1(t) + Q(t)X\,B_2(t) + F(t), \quad X \in \mathbb{R}^{n\times m}, \tag{1}$$

с условием

$$\sum_{i=1}^{k} M_i X(t_i) = 0, \quad 0 = t_1 < t_2 < \ldots < t_k = \omega, \tag{2}$$

где $A(t)$, $B_1(t)$, $B_2(t)$, $F(t)$, $P(t)$, $Q(t)$ – матрицы класса $\mathbb{C}[0,\omega]$ соответствующих размерностей; M_i – заданные постоянные $(n\times n)$-матрицы.

В данной работе задача (1), (2) исследуется с помощью конструктивного метода регуляризации [8, гл. 1]) в конечномерной банаховой алгебре $\mathfrak{B}(n)$ непрерывных матричнозначных функций с нормой $\|X\|_C = \max_t \|X(t)\|$, где $\|\cdot\|$ –

какая-либо фиксированная матричная норма, например, любая из норм, приведенных в [5, с. 21].

Введем следующие обозначения:

$$\gamma = \left\|\Phi^{-1}\right\|, \quad m_i = \|M_i\|, \quad \alpha = \max_t \|A(t)\|, \quad \beta_2 = \max_t \|B_2(t)\|, \quad h = \max_t \|F(t)\|,$$

$$\psi = \max_t \|P(t)\|, \quad \xi = \max_t \|Q(t)\|, \quad \mu_1 = \max_t \|V(t)\|, \quad \mu_2 = \max_t \left\|V^{-1}(t)\right\|, \ \nu_i = \|V_i\|,$$

$$q = \gamma\mu_1\mu_2(\alpha\psi + \xi\beta_2)\omega\sum_{i=1}^{k} m_i\nu_i, \quad N = \gamma\mu_1\mu_2\omega h\sum_{i=1}^{k} m_i\nu_i,$$

где Φ – линейный матричный оператор типа [1], $\Phi Y \equiv \sum_{i=1}^{k} M_i Y V_i$; $V_i = V(t_i)$, $V(t)$ – фундаментальная матрица уравнения

$$\frac{dV}{dt} = VB_1(t). \tag{3}$$

Теорема. *Пусть оператор* Φ *однозначно обратим и выполнено условие* $q<1$. *Тогда задача (1), (2) однозначно разрешима; ее решение* $X(t)$ *представимо как предел равномерно сходящейся последовательности матричных функций, определяемых рекуррентным интегральным соотношением и удовлетворяющих условию (2), при этом справедлива оценка*

$$\|X\|_C \le \frac{N}{1-q}. \tag{4}$$

Доказательство. Сначала выведем матричное интегральное уравнение, эквивалентное задаче (1), (2). Пусть $X(t)$ – решение задачи (1), (2). На основе (1), (3) имеем

$$X(t) = X(t_i)V^{-1}(t_i)V(t) +$$

$$+\int_{t_i}^{t}[A(\tau)X(\tau)P(\tau) + Q(\tau)X(\tau)B_2(\tau) + F(\tau)]V^{-1}(\tau)d\tau\, V(t). \tag{5}$$

Из (5) получим

$$X(t_i) = X(t)V^{-1}(t)V_i -$$

$$-\int_{t_i}^{t}[A(\tau)X(\tau)P(\tau) + Q(\tau)X(\tau)B_2(\tau) + F(\tau)]V^{-1}(\tau)d\tau\, V_i. \tag{6}$$

Подставляя (6) в (2), получим матричное интегральное уравнение

$$\sum_{i=1}^{k} M_i X(t)V^{-1}(t)V_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} M_i \int_{t_i}^{t}[A(\tau)X(\tau)P(\tau) + Q(\tau)X(\tau)B_2(\tau) + F(\tau)]V^{-1}(\tau)d\tau\, V_i. \tag{7}$$

Запишем уравнение (7) в следующем виде:

$$\Phi\left\{X(t)V^{-1}(t)\right\}=$$

$$=\sum_{i=1}^{k}M_i\int_{t_i}^{t}[A(\tau)X(\tau)P(\tau)+Q(\tau)X(\tau)B_2(\tau)+F(\tau)]V^{-1}(\tau)d\tau\,V_i. \qquad (8)$$

Поскольку оператор Φ обратим, то из (8) имеем сначала

$$X(t)V^{-1}(t)=\Phi^{-1}\left\{\sum_{i=1}^{k}M_i\int_{t_i}^{t}[A(\tau)X(\tau)P(\tau)+\right.$$

$$\left.+Q(\tau)X(\tau)B_2(\tau)+F(\tau)]V^{-1}(\tau)d\tau\,V_i\right\},$$

а затем

$$X(t)=\left[\Phi^{-1}\left\{\sum_{i=1}^{k}M_i\int_{t_i}^{t}[A(\tau)X(\tau)P(\tau)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+Q(\tau)X(\tau)B_2(\tau)+F(\tau)]V^{-1}(\tau)d\tau\,V_i\right\}\right]V(t). \qquad (9)$$

Таким образом, решение задачи (1), (2) удовлетворяет интегральному уравнению (9). По методике, используемой в [3, 4], можно установить, что всякое непрерывное решение уравнения (9) является решением задачи (1), (2).

Уравнение (7) (или (9)) относится к типу уравнений [1, 6] и представляет собой весьма непростой объект для конструктивного исследования ввиду отсутствия явного представления оператора Φ^{-1}. Случай $k=2$ в научной литературе достаточно хорошо изучен. В общем случае в работе [1] предложены два формальных способа построения Φ^{-1}: в одном из них используется алгебраический аппарат, другой фактически основан на методе малого параметра.

Замечание. Матричное уравнение $\Phi Z=H$ с $(n\times n)$-матрицами M_i и $(m\times m)$-матрицей V равносильно обычному векторно-матричному уравнению $\tilde{\Phi}\tilde{Z}=\tilde{H}$, где $\tilde{\Phi}$ – квадратная матрица порядка nm, $\tilde{Z}$, $\tilde{H}$ – nm-векторы, определяемые на основе матриц Z, H. Очевидно, в случае $\det\tilde{\Phi}\neq 0$ оператор Φ однозначно обратим; это подразумевается в данной работе.

Исследуем разрешимость уравнения (9) с помощью принципа сжимающих отображений, согласно которому применим метод последовательных приближений с классической вычислительной схемой [2, 7]:

$$X_p(t)=\left(\Phi^{-1}\left\{\sum_{i=1}^{k}M_i\int_{t_i}^{t}[A(\tau)X_{p-1}(\tau)P(\tau)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+Q(\tau)X_{p-1}(\tau)B_2(\tau)+F(\tau)]V^{-1}(\tau)d\tau\,V_i\right\}\right)V(t),\quad p=1,2,\ldots \qquad (10)$$

В качестве начального приближения принимаем произвольную матрицу $X_0(t)\in\mathbb{C}\left(I,\mathbb{R}^{n\times m}\right)$. Очевидно, алгоритм (10) определяет последовательность $\left\{X_p(t)\right\}_0^\infty\subset\mathbb{C}\left(I,\mathbb{R}^{n\times m}\right)$, при этом $\left\{X_p(t)\right\}_1^\infty\subset\mathbb{C}^1\left(I,\mathbb{R}^{n\times m}\right)$. С помощью определенных выкладок можно установить, что все члены последовательности $\left\{X_p(t)\right\}_1^\infty$ удовлетворяют краевому условию (2).

Изучим вопрос сходимости построенной последовательности. Следуя известному приему (см., например, [2, 7]), этот вопрос заменим вопросом о сходимости ряда

$$X_0(t)+\left(X_1(t)-X_0(t)\right)+\ldots+\left(X_p(t)-X_{p-1}(t)\right)+\ldots \tag{11}$$

и докажем его равномерную по $t\in[0,\omega]$ сходимость путем построения соответствующего мажорантного сходящегося числового ряда.

Из (10) имеем

$$X_{p+1}(t)-X_p(t)=\mathfrak{L}\left(X_p\right)-\mathfrak{L}\left(X_{p-1}\right),\quad p=1,2,\ldots, \tag{12}$$

где

$$\mathfrak{L}(Y)=\left(\Phi^{-1}\left\{\sum_{i=1}^{k}M_i\int_{t_i}^{t}[A(\tau)Y(\tau)P(\tau)+Q(\tau)Y(\tau)B_2(\tau)+F(\tau)]V^{-1}(\tau)d\tau\, V_i\right\}\right)V(t).$$

Выполним последовательно оценки по норме в (12):

$$\left\|X_{p+1}(t)-X_p(t)\right\|=\left\|\mathfrak{L}\left(X_p\right)-\mathfrak{L}\left(X_{p-1}\right)\right\|\le$$

$$\le\left\|\left(\Phi^{-1}\left\{\sum_{i=1}^{k}M_i\int_{t_i}^{t}\left[A(\tau)\left(X_p(\tau)-X_{p-1}(\tau)\right)P(\tau)+\right.\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\left.+Q(\tau)\left(X_p(\tau)-X_{p-1}(\tau)\right)B_2(\tau)\right]V^{-1}(\tau)d\tau\, V_i\right\}\right)V(t)\right\|\le$$

$$\le\left\|\Phi^{-1}\right\|\sum_{i=1}^{k}\left\|M_i\right\|\left|\int_{t_i}^{t}\left\|\left[A(\tau)\left(X_p(\tau)-X_{p-1}(\tau)\right)P(\tau)+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+Q(\tau)\left(X_p(\tau)-X_{p-1}(\tau)\right)B_2(\tau)\right]V^{-1}(\tau)\right\|d\tau\right|\left\|V_i\right\|\left\|V(t)\right\|\le$$

$$\le\left\|\Phi^{-1}\right\|\sum_{i=1}^{k}\|M_i\|\|V_i\|\|V(t)\|\int_0^{\omega}[\|A(\tau)\|\|P(\tau)\|+\|Q(\tau)\|\|B_2(\tau)\|]\left\|V^{-1}(\tau)\right\|d\tau\left\|X_p-X_{p-1}\right\|_C\le$$

$$\le\gamma\sum_{i=1}^{k}m_i v_i\mu_1\mu_2(\alpha\psi+\xi\beta_2)\omega\left\|X_p-X_{p-1}\right\|_C=q\left\|X_p-X_{p-1}\right\|_C.$$

Отсюда следует оценка

$$\left\|X_{p+1}-X_p\right\|_C\le q\left\|X_p-X_{p-1}\right\|_C,\quad p=1,2,\ldots \tag{13}$$

На основе (13) имеем явную оценку

$$\left\|X_p - X_{p-1}\right\|_C \le q^p \left\|X_1 - X_0\right\|_C, \quad p = 1, 2, \ldots, \tag{14}$$

при этом $\left\|X_1 - X_0\right\|_C = \left\|\mathfrak{L}(X_0) - X_0\right\|_C$.

Используя (14), можно доказать с помощью соответствующей методики (например, [2, 7]), что ряд (11) сходится равномерно по $t \in I$ к решению интегрального уравнения (9), при этом справедлива оценка

$$\left\|X - X_r\right\|_C \le \frac{q^r}{1-q}\left\|X_1 - X_0\right\|_C, \quad r = 0, 1, 2, \ldots$$

Исходя из (14), получим оценку области локализации решения $X(t)$, определяемую согласно алгоритму (10):

$$\left\|X\right\|_C \le \left\|X_0\right\|_C + \frac{\left\|X_1 - X_0\right\|_C}{1-q}. \tag{15}$$

Очевидно, из (15) при $X_0 \equiv 0$ следует оценка (4), при этом

$$\left\|X_1 - X_0\right\|_C = \left\|X_1\right\|_C = \left\|\mathfrak{L}(0)\right\|_C.$$

Получим последовательно оценку для $\left\|\mathfrak{L}(0)\right\|$:

$$\left\|\mathfrak{L}(0)\right\| = \left\|\left(\Phi^{-1}\left\{\sum_{i=1}^{k} M_i \int_{t_i}^{t} F(\tau) V^{-1}(\tau)\, d\tau\, V_i\right\}\right) V(t)\right\| \le$$

$$\le \left\|\Phi^{-1}\right\| \sum_{i=1}^{k} \left\|M_i\right\| \left|\int_{t_i}^{t} \left\|F(\tau) V^{-1}(\tau)\right\| d\tau\right| \left\|V_i\right\| \left\|V(t)\right\| \le$$

$$\le \left\|\Phi^{-1}\right\| \sum_{i=1}^{k} \left\|M_i\right\| \left\|V_i\right\| \left\|V(t)\right\| \int_{0}^{\omega} \left\|F(\tau)\right\| \left\|V^{-1}(\tau)\right\| d\tau \le \gamma \sum_{i=1}^{k} m_i v_i \mu_1 \mu_2 \omega h = N.$$

Теорема полностью доказана.

Список использованных источников и литературы

1. *Murty*, *K. N.* Two (multi) point nonlinear Lyapunov systems – existence and uniqueness / K. N. Murty, G. W. Howell, S. Sivasundaram // Journ. Mathem. Anal. and Appl. 1992. V. 167. P. 505–515.

2. *Бибико*, *Ю. Н.* Курс обыкновенных дифференциальных уравнений / Ю. Н. Бибиков. – Москва : Высш. шк., 1991. – 303 с.

3. *Бондарев*, *А. Н.* Многоточечная краевая задача для уравнения Ляпунова в случае сильного вырождения краевых условий / А. Н. Бондарев, В. Н. Лаптинский // Дифференциальные уравнения. – 2011. – Т. 47, № 6. – С. 776–784.

4. *Бондарев*, *А. Н.* Многоточечная краевая задача для уравнения Ляпунова в случае слабого вырождения краевых условий / А. Н. Бондарев, В. Н. Лаптинский // Дифференциальные уравнения. – 2019. – Т. 55, № 3. – С. 423–427.

5. *Демидович*, *Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости / Б. П. Демидович. – Москва : Наука, 1967. – 472 с.
6. *Зубов*, *В. И.* Лекции по теории управления / В. И. Зубов. – Москва : Наука, 1975. – 496 с.
7. *Канторович*, *Л. В.* Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. – Москва : Наука, 1977. – 744 с.
8. *Лаптинский*, *В. Н.* Конструктивный анализ управляемых колебательных систем / В. Н. Лаптинский. – Минск : ИМ НАН Беларуси, 1998. – 300 с.

Сведения об авторе

Александр Николаевич Бондарев, старший преподаватель кафедры «Высшая математика» Белорусско-Российского университета (Республика Беларусь, г. Могилёв), lex-bondarev@tut.by