

УДК 621.865

**ИССЛЕДОВАНИЕ МАНИПУЛЯЦИОННЫХ СВОЙСТВ
МЕХАНИЗМА ДВУХОСНОЙ ОРИЕНТАЦИИ**

*д-р техн. наук, доц. Л.А. БОРИСЕНКО
(Белорусско-Российский университет, Могилев)*

Приводятся результаты исследования задачи управления ориентацией твердого тела применительно к рабочему органу манипулятора промышленного робота при использовании механизма двухосной ориентации. Определены ограничения, налагаемые такой ориентацией на положение объекта манипулирования в трехмерном пространстве.

Известно, что произвольная ориентация твердого тела в пространстве может быть задана тремя различными способами, одним из которых является плоский поворот вокруг некоторой оси, проходящей через неподвижную точку тела. Такой поворот получил название конечного поворота [1]. Параметрами, определяющими конечный поворот, служат так называемые параметры Родрига – Гамильтона, которые одновременно являются компонентами кватернионов. Это позволяет перейти от векторной теории поворотов к удобному и наглядному формализму кватернионов [2]. В настоящей работе дается приложение аппарата кватернионов к решению задач управления пространственной ориентацией звеньев манипулятора.

Представим ориентационное пространство механизма ориентации манипулятора в виде сферы, разбитой с помощью правого триэдра осей на квадранты – всего восемь квадрантов (рис. 1).

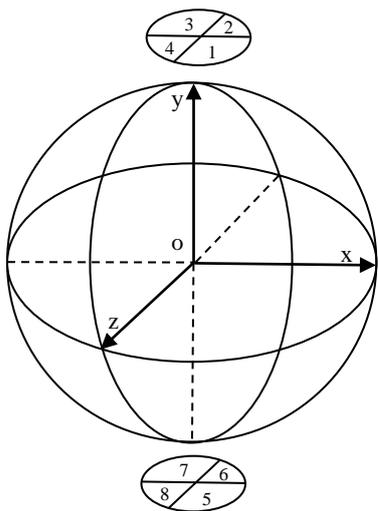


Рис. 1. Модель ориентационного пространства

В каждом квадранте возможны три варианта ориентации осей триэдра, получающиеся при круговой перестановке осей (хуz, зуx, хzу), итого 24 возможных варианта ориентации, образующих дискретное множество в ориентационном пространстве.

Идентифицируем элементы этого множества с помощью кватернионов. Для этого требуется найти кватернионы конечных поворотов, переводящих оси из начального положения в любое из остальных 23.

Пусть в качестве начального выбрано общепринятое расположение осей x, y, z в первом квадранте, а конечное положение – во втором квадранте с расположением осей, указанным на рисунке 2, в.

Этот переход может быть осуществлен двумя поворотами вокруг связанных осей: сначала на угол $\varphi = 180^\circ$ вокруг оси x, а затем на угол $\varphi = 270^\circ$ вокруг оси z.

Они определяются кватернионами Λ_1 и Λ_2 :

$$\Lambda_1 = \cos 90^\circ + \sin 90^\circ i,$$

$$\Lambda_2 = \cos 135^\circ + \sin 135^\circ k,$$

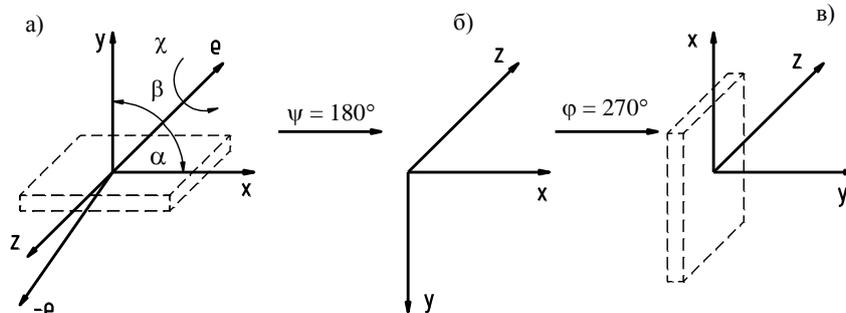


Рис. 2. Последовательность поворотов координатного триэдра и вектор конечного поворота

Результирующий поворот описывается кватернионом:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 \circ \mathbf{A}_2 = \left[0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right].$$

Компоненты кватерниона определяют угол конечного поворота χ и положение оси конечного поворота:

$$\lambda_0 = \cos\chi / 2 = 0; \quad \lambda_1 = \sin\chi / 2 \cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\lambda_2 = \sin\chi / 2 \cos\beta = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \lambda_3 = \sin\chi / 2 \cos\gamma = 0,$$

Углы α, β, γ – это углы, которые образует вектор \mathbf{e} с осями x, y, z .

Рассматриваемый поворот может быть определен кватернионом

$$\mathbf{A} = \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right],$$

откуда следует $\chi = 180^\circ, \alpha = 45^\circ, \beta = 45^\circ, \gamma = 90^\circ$.

Вектор конечного поворота занимает положение, представленное на рисунке 2 жирными линиями.

Очевидно, что вращение вокруг вектора \mathbf{e} на угол χ дает тот же результат, что и вращение вокруг вектора $-\mathbf{e}$ на угол $2\pi - \chi$. Эту же ориентацию можно получить и поворотами вокруг неподвижных осей: сначала вокруг оси x на угол $\psi = 180^\circ$, а затем – на угол $\varphi = 90^\circ$ вокруг оси z . В таком случае имеем

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_2 \circ \mathbf{A}_1 = [\cos 45^\circ + \sin 45^\circ \mathbf{k}][\cos 90^\circ + \sin 90^\circ \mathbf{i}] = \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right].$$

Любое преобразование координатного триэдра можно выполнить несколькими способами, отличающимися порядком следования поворотов.

Для рассматриваемого случая возможны следующие варианты (рис. 3):

1-й вариант – $\psi = 180^\circ, \varphi = 270^\circ$;

2-й вариант – $\theta = 180^\circ, \varphi = 90^\circ$;

3-й вариант – $\varphi = 90^\circ, \psi = 180^\circ$;

4-й вариант – $\varphi = 270^\circ, \theta = 180^\circ$.

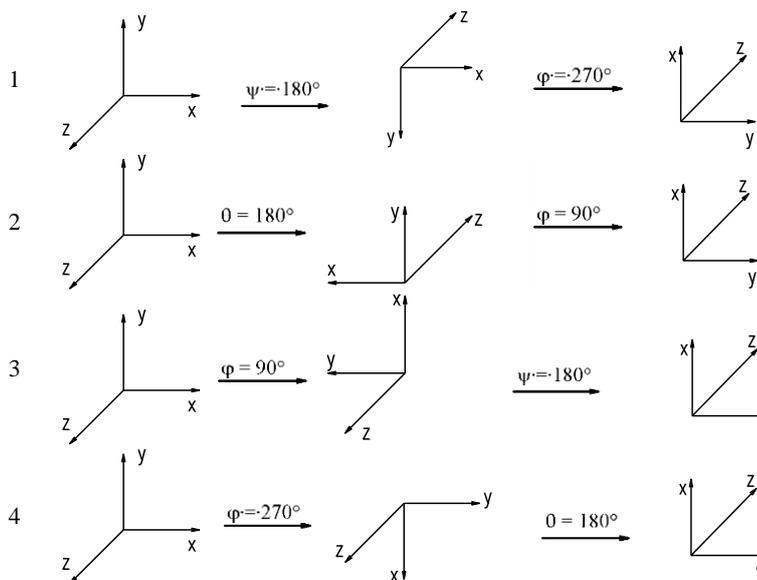


Рис. 3. Варианты последовательных поворотов, обеспечивающие одинаковую ориентацию координатного триэдра

Как видно из рисунка 3, указанные последовательности поворотов приводят к одному и тому же результату.

Каким бы образом не располагались оси ориентации в пространстве, их всегда можно достигнуть одним поворотом из начального положения. Согласно исследованиям, приведенным в [2], установлено, что такой поворот является оптимальным по быстрдействию при существовании ограничений на угловую скорость. Одна из наиболее типичных форм деталей, с которыми имеют дело промышленные роботы, – параллелепипед. Если каждую грань параллелепипеда сориентировать на плоскости в четырех положениях через 90° (а всего граней шесть), это даст 24 положения, т.е. будет заполнено все ориентационное пространство. Каждое из этих положений идентифицируется с помощью кватернионов, помещенных в таблице. Кроме положения кватернион определяет также и конечный поворот, которым можно перевести деталь из исходного положения в заданное. Тем самым определяется и задача управления механизмом ориентации.

Кватернионы поворотов для 24 характерных положений координатного триэдра

Квадрант	Ориентация осей	Кватернион А	Квадрант	Ориентация осей	Кватернион А
Первый		$[1, 0, 0, 0]$	Пятый		$\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$
		$\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$			$\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0\right]$
		$\left[\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right]$			$\left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$
Второй		$\left[0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right]$	Шестой		$[0, 1, 0, 0]$
		$\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0\right]$			$\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right]$
		$\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right]$			$\left[\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right]$
Третий		$[0, 0, 1, 0]$	Седьмой		$\left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right]$
		$\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right]$			$\left[0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$
		$\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right]$			$\left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$
Четвертый		$\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$	Восьмой		$[0, 0, 0, 1]$
		$\left[0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$			$\left[\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right]$
		$\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right]$			$\left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

Промышленные роботы последних модификаций строятся на базе шарнирных манипуляторов с антропоморфной схемой. Рука робота осуществляет конечный поворот за счет поворотов в двух шарнирах с ортогональными осями, т.е. имеет место двухосная ориентация. То же самое следует сказать о роботе с телескопической рукой, работающем в сферической системе координат.

Еще один пример представляет механизм ориентации рабочего органа манипулятора, выполненный с двумя управляемыми осями. Для ряда применений оказывается достаточной двухосная ориентация рабочего органа. При этом достигается упрощение и удешевление робота, но налагаются определенные ограничения на его технические возможности. Нашей задачей является рассмотрение свойств такой ориентации и ограничений, налагаемых на конечный поворот тела.

Известно, что при последовательном выполнении поворотов вокруг неподвижных осей кватернион конечного поворота равен произведению составляющих кватернионов, взятых в обратном порядке, т.е. $A = A_2 \circ A_1$.

Графическим представлением кватернионов конечных поворотов служат дуги больших кругов на сфере единичного радиуса, а произведению кватернионов соответствует операции геометрического сложения дуг на сфере, причем порядок сложения дуг обратный порядку умножения кватернионов, т.е. $\cup A = \cup A_1 + \cup A_2$. Изменение порядка умножения кватернионов ведет к изменению порядка геометрического сложения дуг.

Примером механизма, реализующего повороты вокруг неподвижных осей, является управляемый шаровой шарнир. Здесь оси поворотов связаны с неподвижным пространством и не изменяют своего направления в неподвижном пространстве при выполнении поворотов и, напротив, изменяют направление по отношению к поворачиваемому телу.

Другой принцип организации поворотов реализуется в механизмах, общей моделью которых служит карданов подвес. Частным случаем его является устройство двухосной ориентации, представленное на рисунке 4. Здесь оси поворотов не изменяют своего положения по отношению к объекту ориентации, как если бы были связаны с ними, и, напротив, изменяют свое положение в неподвижном пространстве. Это вытекает из того обстоятельства, что в открытой кинематической цепи каждый предыдущий поворот преобразует последующее пространство, к которому принадлежит как объект манипулирования, так и ось шарнира последующего поворота; причем положение оси последующего поворота по отношению к объекту предыдущим поворотом не изменяется. Когда речь идет о последовательности поворотов, имеется в виду порядок поворотов по отношению к пространствам, а не ко времени.

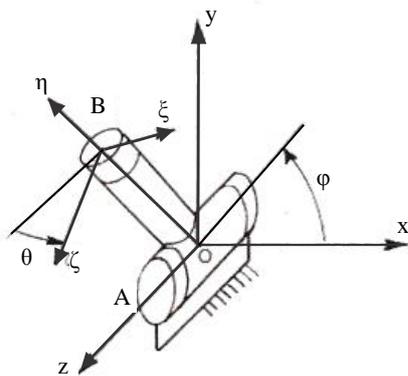


Рис. 4. Схема механизма ориентации реализующего повороты вокруг двух подвижных осей

Композиция поворотов представляется путем сложения дуг больших кругов, причем положение больших кругов в процессе поворотов не изменяется. Большие круги располагаются перпендикулярно осям последовательных поворотов.

Итак, в случае поворотов вокруг связанных осей имеем:

$$A = A_1 \circ A_2, \cup A = \cup A_2 + \cup A_1$$

и сложение поворотов происходит так, как показано на рисунке 5, в.

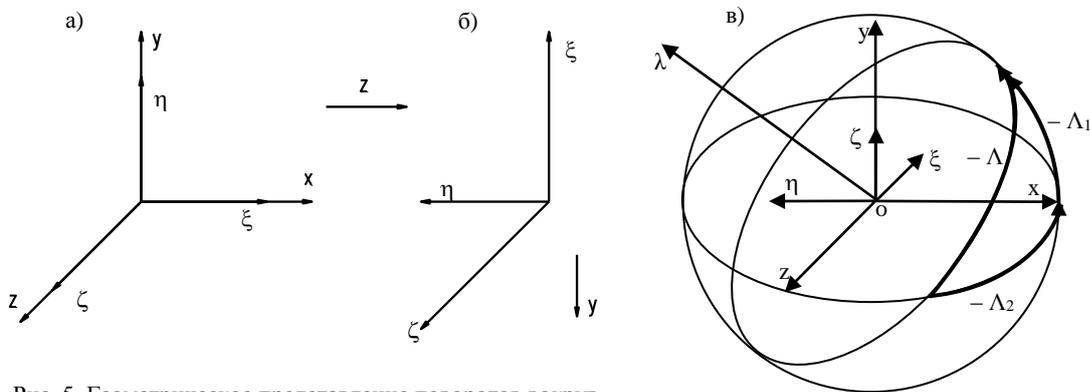


Рис. 5. Геометрическое представление поворотов вокруг подвижных (связанных) осей на сфере единичного радиуса

Воспользуемся графическим представлением сложения поворотов на сфере. Последовательные повороты φ и θ представлены на рисунке 5 дугами кватернионов A_φ и A_θ . Векторы λ_φ и λ_θ выражают направления векторов конечных поворотов вокруг связанных осей ζ , и η . Они перпендикулярны плоскостям соответствующих больших кругов. Вектор λ выражает направление вектора результирующего конечного поворота.

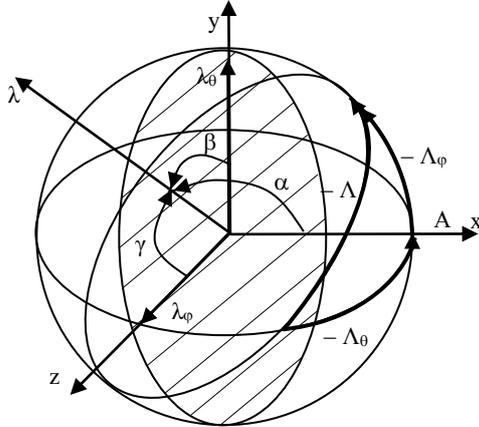


Рис. 6. Графическое представление сложения поворотов на сфере единичного радиуса

Для всех векторов, расположенных в этой плоскости, имеет место условие ортогональности с осью x , т.е. $\cos \alpha = 0$, откуда следует:

$$\lambda_1 = \sin\chi/2 \cos \alpha = 0; \quad \lambda_2 = \sin\chi/2 \cos\beta = 0; \quad \lambda_3 = \sin\chi/2 \cos\gamma \neq 0; \quad \lambda_0 = \cos\chi/2 \neq 0,$$

$$A = [\lambda_\varphi, 0, \lambda_\theta, \lambda_\varphi].$$

Среди приведенных выше кватернионов действительно отсутствуют кватернионы данного вида. Кватернионы вида $A = [\lambda_0, 0, 0, \lambda_3]$ и $A = [\lambda_0, 0, \lambda_2, 0]$ представляют кватернионы поворотов A_5, A_9, A_{13} и A_2, A_3, A_4 .

Рассмотрим задачу о разложении конечного поворота по двум заданным направлениям вращения в аналитической постановке. Пусть эти направления определяются векторами λ_φ , и λ_θ (см. рис. 6), а последовательность поворотов, как и прежде, $\varphi - \theta$. Соответствующие кватернионы запишутся так:

$$A_\varphi = \cos\varphi/2 + \sin\varphi/2k;$$

$$A_\theta = \cos\theta/2 + \sin\theta/2j.$$

Тогда кватернион результирующего поворота

$$A = A_\varphi \circ A_\theta = [\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3],$$

где

$$\lambda_0 = \cos\varphi/2 \cos\theta/2;$$

$$\lambda_1 = -\sin\varphi/2 \sin\theta/2;$$

$$\lambda_2 = \cos\varphi/2 \sin\theta/2;$$

$$\lambda_3 = \sin\varphi/2 \cos\theta/2.$$

Эти уравнения образуют систему относительно углов φ и θ , а также двух компонент кватерниона A . Будем считать заданными компоненты кватернионов λ_0 и λ_2 . Выбор λ_0 обусловлен тем, что $\lambda_0 = \cos\chi/2$ и, следовательно, λ_0 полностью определяется углом конечного поворота χ ; λ_2 выбрано для удобства решения системы записанных выше уравнений. Из совместного решения первого и третьего уравнений системы вытекает

$$\varphi = 2 \arccos \sqrt{\lambda_0^2 + \lambda_2^2};$$

$$\theta = 2 \arccos \lambda_0 / \sqrt{\lambda_0^2 + \lambda_2^2}.$$

Компоненты λ_1 и λ_3 определяются как функции найденных углов φ и θ из второго и четвертого уравнений.

Таким образом, для решения задачи о разложении конечного поворота по двум заданным направлениям недостаточно указания только величины угла конечного поворота χ – в этом случае задача недоопределена и возможно бесконечное множество решений. Для определенности решения требуется указание угла β между вектором конечного поворота и одной из осей – в данном случае осью y . Угол β совместно с углами α и γ определяет наклон вектора конечного поворота.

Обращаясь вновь к графической интерпретации конечного поворота на рисунке 6, можно видеть, что угол β определяет наклон плоскости большого круга результирующего конечного поворота к оси y . Наряду с углом χ угол β может задаваться свободно. Углы α и γ определяются как функции этих независимых параметров.

Известно, что поворот тела на угол 2α вокруг оси e можно осуществить двумя полуоборотами вокруг осей с единичными векторами e_1 и e_2 , образующими между собой угол α и проходящими перпендикулярно оси e [3]. Приводимое ниже доказательство этого положения является наиболее простым и в отличие от доказательства, приведенного в книге [3], не требует привлечения векторной теории конечного поворота.

Пусть, например, вектор e_1 совпадает с осью x , а вектор e_2 расположен в плоскости осей x y (рис. 7).

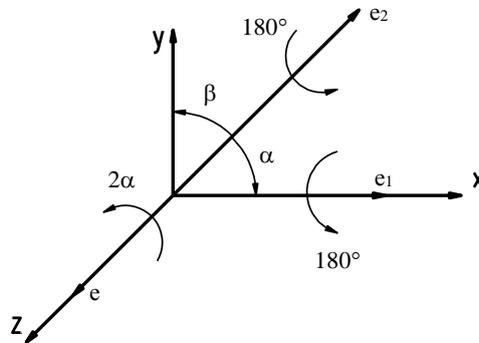


Рис. 7. Представление конечного поворота двумя полуоборотами

Произведем первый поворот вокруг оси e_1 , на угол 180° , а затем второй поворот – вокруг оси e_2 на угол 180° :

$$A = A_2 \cdot A_1 = [0, \cos\alpha, \cos\beta, 0] [0, 1, 0, 0] = [\cos\alpha i + \sin\alpha j] [i] = [\cos\alpha + \sin\alpha k].$$

По виду полученного кватерниона можно судить, что он описывает поворот на угол 2α вокруг оси z , что и требовалось доказать.

Отсюда, как частный случай, следует вывод, что два полуоборота вокруг неподвижных ортогональных осей (в данном случае x и y) равносильны полуобороту вокруг третьей оси, перпендикулярной двум первым (оси z).

Если рассматривать эту задачу как задачу двухосной ориентации, то можно сделать следующий **вывод**: произвольный конечный поворот тела можно получить путем последовательного выполнения двух поворотов, причем полуоборотами, однако выбор этих осей не будет произвольным – он полностью определяется параметрами конечного поворота.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кирпичников С.Н., Новоселов В.С. Математические аспекты кинематики твердого тела. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1986. – 252 с.
2. Бранец В.Н., Шмыглевский Н.П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. – М.: Наука, 1973. – 320 с.
3. Диментберг Ф.М. Винтовое исчисление и его приложение в механике. – М.: Наука, 1985. – 336 с.