4. **Лаптинский, В.Н.** Конструктивный анализ управляемых колебательных систем / В.Н. Лаптинский. – Мн. : ИМ НАН Беларуси, 1998. – 300 с.
5. **Лаптинский В.Н.** Конструктивный анализ периодической краевой задачи для системы матричных дифференциальных уравнений типа Риккати (правосторонняя регуляризация) / В.Н. Лаптинский, Д.В. Роголев. – Могилев : Белорусско-Российский университет, 2010. – 51 с. – (Препринт / ИТМ НАН Беларуси; №16).
6. **Демидович, Б.П.** Лекции по математической теории устойчивости / Б.П. Демидович. – М. : Наука, 1967. – 472 с.
7. **Гантмахер, Ф.Р.** Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. – М. : Наука, 1967. – 576 с.
8. Приближенное решение операторных уравнений / М.А. Красносельский [и др.]. – М. : Наука, 1969. – 456 с.
9. **Канторович, Л.В.** Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. – М. : Наука, 1977. – 744 с.
10. **Бибиков, Ю.Н.** Курс обыкновенных дифференциальных уравнений / Ю.Н. Бибиков. – М. : Высшая школа, 1991. – 303 с.

Поступила в редакцию 30.11.2010 г.

УДК 517.925

А.Н. БОНДАРЕВ

АНАЛИЗ МНОГОТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА НА ОСНОВЕ КОНСТРУКТИВНОГО МЕТОДА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

Получены конструктивные достаточные условия однозначной разрешимости многоточечной краевой задачи для матричного дифференциального уравнения Ляпунова. Дан итерационный алгоритм классического типа построения решений.

Введение

Рассмотрим многоточечную краевую задачу для матричного уравнения

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + XB(t) + F(t), \quad X \in \mathbb{R}^{n\times n}, \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{k} M_i X(t_i) = 0, \quad 0 = t_1 < t_2 < \ldots < t_k = \omega, \tag{2}$$

где $A, B, F \in \mathbb{C}\left(I, \mathbb{R}^{n\times n}\right)$, M_i – заданные постоянные матрицы; $I = [0, \omega]$.

В данной работе, являющейся продолжением и развитием [1-4], с помощью метода [5, гл. 1] изучены вопросы однозначной разрешимости задачи (1), (2), построения решения и оценки его области локализации.

Основная часть

Будем исследовать задачу (1), (2) с помощью метода интегральных уравнений, развитого в [5]. При этом для получения соответствующего эквивалентного матричного интегрального уравнения воспользуемся расщеплением матрицы $A(t)$ в виде

$$A(t) = A_1(t) + A_2(t), \qquad (3)$$

где матрицы $A_1(t)$, $A_2(t)$ выбираются определенным способом, например, согласно [5, гл. 1]. Достаточно эффективным является представление матрицы $A(t)$, в котором в качестве матрицы $A_1(t)$ используется диагональная часть матрицы $A(t)$:

$$A_1(t) = diag\left(a_{11}(t), a_{22}(t), \ldots, a_{nn}(t)\right).$$

Возможны и другие способы расщепления матрицы $A(t)$ [5, гл. 5], в том числе и тривиальные: $A_1(t) \equiv 0, A_2(t) \equiv A(t); A_1(t) \equiv A(t), A_2(t) \equiv 0$.

Примем следующие обозначения:

$$H = \sum_{i=1}^{k} M_i U(t_i), \quad \gamma = \left\|H^{-1}\right\|, \quad m_i = \left\|M_i\right\|, \quad \lambda_1 = \max_t \left\|U(t)\right\|, \quad \lambda_2 = \max_t \left\|U^{-1}(t)\right\|,$$

$$u_i = \left\|U_i\right\|, \quad \alpha_2 = \max_t \left\|A_2(t)\right\|, \quad \beta = \max_t \left\|B(t)\right\|, \quad h = \max_t \left\|F(t)\right\|,$$

$$q = \gamma\lambda_1\lambda_2(\alpha_2 + \beta)\omega\sum_{i=1}^{k} m_i u_i, \quad N = \gamma\lambda_1\lambda_2\omega h\sum_{i=1}^{k} m_i u_i, \quad \left\|X\right\|_C = \max_t \left\|X(t)\right\|,$$

где $i = \overline{1,k}$, $\|\bullet\|$ – подходящая норма матриц, например, любая из норм, приведенных в [2, с. 21], $\mathbb{C} = \mathbb{C}\left(I, \mathbb{R}^{n \times n}\right)$ – банахово пространство непрерывных $(n \times n)$-матриц, $U(t)$ – фундаментальная матрица уравнения

$$\frac{dU}{dt} = A_1(t)U. \qquad (4)$$

Теорема. *Пусть выполнены следующие условия:*

$$\det H \neq 0, \qquad (5)$$

$$q < 1. \qquad (6)$$

Тогда задача (1), (2) однозначна разрешима; ее решение $X(t)$ представимо как предел равномерно сходящейся последовательности матричных функций, определяемых рекуррентным интегральным соотношением и удовлетворяющих условию (2), при этом справедлива оценка

$$\left\|X\right\|_C \leq \frac{N}{1-q}. \qquad (7)$$

Доказательство. Используя условие (5), сначала выведем с помощью методики [5, гл. 1] эквивалентное матричное интегральное уравнение, соответствующее принятому расщеплению (3).

Пусть $X = X(t)$ – решение этой задачи. Тогда имеет место тождество

$$\frac{dX}{dt} = A_1(t)X + A_2(t)X + XB(t) + F(t), \qquad (8)$$

где $X(t)$ удовлетворяет условию (2).

Запишем тождество (8) в следующем виде:

$$\frac{dX}{dt} = A_1(t)X + P(t), \qquad (9)$$

где $P(t) = A_2(t)X + XB(t) + F(t)$.

По методике [5, с. 71] решение $X(t)$ краевой задачи для (9) с условием (2) представимо в виде

$$X(t) = U(t)H^{-1}\sum_{i=1}^{k} M_i U_i \int_{t_i}^{t} U^{-1}(\tau)P(\tau)d\tau$$

или

$$X(t) = U(t)H^{-1}\sum_{i=1}^{k} M_i U_i \int_{t_i}^{t} U^{-1}(\tau)\left[A_2(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + F(\tau)\right]d\tau, \qquad (10)$$

где $U_i = U(t_i)$.

Таким образом, всякое (классическое) решение задачи (1), (2) является решением матричного интегрального уравнения (10). Покажем обратное: всякое непрерывное решение уравнения (10) является решением краевой задачи (1), (2). Для этого сначала продифференцируем по t обе части тождества (10). Тогда получим

$$\frac{dX(t)}{dt} = A_1(t)X(t) + U(t)H^{-1}\sum_{i=1}^{k} M_i U_i U^{-1}(t)\left[A_2(t)X(t) + X(t)B(t) + F(t)\right] =$$

$$= A_1(t)X + A_2(t)X + XB(t) + F(t),$$

т.е. матрица $X(t)$ удовлетворяет уравнению (1).

Отсюда имеем

$$\left[A_2(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + F(\tau)\right]d\tau = dX(\tau) - A_1(\tau)X(\tau)d\tau. \qquad (11)$$

Далее на основании (11) запишем тождество (10) в следующем виде:

$$X(t) = U(t)H^{-1}\sum_{i=1}^{k} M_i U_i \int_{t_i}^{t} U^{-1}(\tau)\left[dX(\tau) - A_1(\tau)X(\tau)d\tau\right]. \qquad (12)$$

Выполнив, согласно [6, с. 52], интегрирование по частям в (12), получим

$$X(t) = U(t)H^{-1}\sum_{i=1}^{k} M_i U_i \left[U^{-1}(t)X(t) - U_i^{-1}X_i\right] =$$

$$= U(t)H^{-1}\sum_{i=1}^{k} M_i U_i U^{-1}(t)X(t) - U(t)H^{-1}\sum_{i=1}^{k} M_i X_i = X(t) - U(t)H^{-1}\sum_{i=1}^{k} M_i X_i,$$

где $X_i = X(t_i)$. Отсюда нетрудно получить соотношение (2).

Следуя методике, используемой в [2], решение уравнения (10) будем строить с помощью алгоритма с вычислительной схемой классического метода последовательных приближений [7, с. 338], [8, с. 605]:

$$X_p(t)=U(t)H^{-1}\sum_{i=1}^{k}M_iU_i\int_{t_i}^{t}U^{-1}(\tau)\left[A_2(\tau)X_{p-1}(\tau)+X_{p-1}(\tau)B(\tau)+F(\tau)\right]d\tau,\qquad(13)$$

$$p=1,2,\ldots$$

В качестве начального приближения принимаем произвольную матрицу $X_0(t)\in\mathbb{C}\left(I,\mathbb{R}^{n\times n}\right)$. Очевидно, алгоритм (13) определяет последовательность $\left\{X_p(t)\right\}_0^\infty\subset\mathbb{C}\left(I,\mathbb{R}^{n\times n}\right)$, при этом $\left\{X_p(t)\right\}_1^\infty\subset\mathbb{C}^1\left(I,\mathbb{R}^{n\times n}\right)$.

Сначала покажем, что функции $X_1(t), X_2(t),\ldots$ удовлетворяют краевому условию (2). На основании (13) имеем

$$\frac{dX_p(t)}{dt}=A_1(t)X_p(t)+$$

$$+U(t)H^{-1}\sum_{i=1}^{k}M_iU_iU^{-1}(t)\left[A_2(t)X_{p-1}(t)+X_{p-1}(t)B(t)+F(t)\right]=$$

$$=A_1(t)X_p(t)+A_2(t)X_{p-1}(t)+X_{p-1}(t)B(t)+F(t),\quad p=1,2,\ldots\qquad(14)$$

Отсюда имеем

$$\left[A_2(\tau)X_{p-1}(\tau)+X_{p-1}(\tau)B(\tau)+F(\tau)\right]d\tau=dX_p(\tau)-A_1(\tau)X_p(\tau)d\tau.\qquad(15)$$

Используя (15), соотношение (13) на основании (5) можно записать в следующем виде:

$$X_p(t)=U(t)H^{-1}\sum_{i=1}^{k}M_iU_i\int_{t_i}^{t}U^{-1}(\tau)\left[dX_p(\tau)-A_1(\tau)X_p(\tau)d\tau\right].\qquad(16)$$

Выполнив в (16) интегрирование по частям, получим последовательно

$$X_p(t)=U(t)H^{-1}\sum_{i=1}^{k}M_iU_i\int_{t_i}^{t}U^{-1}(\tau)\left[dX_p(\tau)-A_1(\tau)X_p(\tau)d\tau\right]=$$

$$=U(t)H^{-1}\sum_{i=1}^{k}M_iU_i\int_{t_i}^{t}U^{-1}(\tau)dX_p(\tau)-U(t)H^{-1}\sum_{i=1}^{k}M_iU_i\int_{t_i}^{t}U^{-1}(\tau)A_1(\tau)X_p(\tau)d\tau=$$

$$=U(t)H^{-1}\sum_{i=1}^{k}M_iU_i\left[U^{-1}(\tau)X_p(\tau)\Big|_{t_i}^{t}+\int_{t_i}^{t}U^{-1}(\tau)A_1(\tau)X_p(\tau)d\tau\right]-$$

$$-U(t)H^{-1}\sum_{i=1}^{k}M_iU_i\int_{t_i}^{t}U^{-1}(\tau)A_1(\tau)X_p(\tau)d\tau=$$

$$=U(t)H^{-1}\sum_{i=1}^{k}M_iU_i\left[U^{-1}(t)X_p(t)-U^{-1}(t_i)X_p(t_i)+\int_{t_i}^{t}U^{-1}(\tau)A_1(\tau)X_p(\tau)d\tau\right]-$$

$$-U(t)H^{-1}\sum_{i=1}^{k}M_iU_i\int_{t_i}^{t}U^{-1}(\tau)A_1(\tau)X_p(\tau)d\tau =$$

$$=U(t)H^{-1}\sum_{i=1}^{k}M_iU_i\left[U^{-1}(t)X_p(t)-U^{-1}(t_i)X_p(t_i)\right]=$$

$$=X_p(t)+U(t)H^{-1}\sum_{i=1}^{k}M_iX_p(t_i).$$

Отсюда имеем соотношение

$$U(t)H^{-1}\sum_{i=1}^{k}M_iX_p(t_i)=0$$

или

$$\sum_{i=1}^{k}M_iX_p(t_i)=0.$$

Стало быть, все члены последовательности $\{X_p(t)\}_1^\infty$ удовлетворяют краевому условию (2).

Изучим вопрос сходимости этой последовательности. Следуя известному приему (см., например, [7, с. 54]), этот вопрос заменим эквивалентным вопросом о сходимости ряда

$$X_0(t)+\left(X_1(t)-X_0(t)\right)+\ldots+\left(X_p(t)-X_{p-1}(t)\right)+\ldots \qquad (17)$$

Докажем равномерную по $t\in[0,\omega]$ сходимость ряда (17). Для этого построим сходящийся числовой ряд, который мажорирует на $[0,\omega]$ матричный функциональный ряд (17).

Из (13) имеем

$$X_{p+1}(t)-X_p(t)=\mathfrak{L}(X_p)-\mathfrak{L}(X_{p-1}),\quad p=1,2,\ldots, \qquad (18)$$

где

$$\mathfrak{L}(Y)=U(t)H^{-1}\sum_{i=1}^{k}M_iU_i\int_{t_i}^{t}U^{-1}(\tau)\left[A_2(\tau)Y(\tau)+Y(\tau)B(\tau)+F(\tau)\right]d\tau.$$

Выполним оценки по норме в (18)

$$\left\|X_{p+1}(t)-X_p(t)\right\|=\left\|\mathfrak{L}(X_p)-\mathfrak{L}(X_{p-1})\right\|=$$

$$=\left\|U(t)H^{-1}\sum_{i=1}^{k}M_iU_i\int_{t_i}^{t}U^{-1}(\tau)\left[A_2(\tau)\left(X_p(\tau)-X_{p-1}(\tau)\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(X_p(\tau)-X_{p-1}(\tau)\right)B(\tau)\right]d\tau\right\|\le$$

$$\le\left\|U(t)\right\|\left\|H^{-1}\right\|\left\|\sum_{i=1}^{k}M_iU_i\int_{t_i}^{t}U^{-1}(\tau)\left[A_2(\tau)\left(X_p(\tau)-X_{p-1}(\tau)\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(X_p(\tau)-X_{p-1}(\tau)\right)B(\tau)\right]d\tau\right\|\le$$

$$\leq \|U(t)\| \|H^{-1}\| \sum_{i=1}^{k} \left\| M_i U_i \int_{t_i}^{t} U^{-1}(\tau)\left[A_2(\tau)\left(X_p(\tau) - X_{p-1}(\tau)\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left(X_p(\tau) - X_{p-1}(\tau)\right) B(\tau)\right] d\tau \right\| \leq$$

$$\leq \|U(t)\| \|H^{-1}\| \sum_{i=1}^{k} \|M_i\| \|U_i\| \left\| \int_{t_i}^{t} U^{-1}(\tau)\left[A_2(\tau)\left(X_p(\tau) - X_{p-1}(\tau)\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left(X_p(\tau) - X_{p-1}(\tau)\right) B(\tau)\right] d\tau \right\| \leq$$

$$\leq \|U(t)\| \|H^{-1}\| \sum_{i=1}^{k} \|M_i\| \|U_i\| \left| \int_{t_i}^{t} \left\| U^{-1}(\tau)\left[A_2(\tau)\left(X_p(\tau) - X_{p-1}(\tau)\right) + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \left(X_p(\tau) - X_{p-1}(\tau)\right) B(\tau)\right] \right\| d\tau \right| \leq$$

$$\leq \|U(t)\| \|H^{-1}\| \sum_{i=1}^{k} \|M_i\| \|U_i\| \left| \int_{t_i}^{t} \|U^{-1}(\tau)\| \left\| A_2(\tau)\left(X_p(\tau) - X_{p-1}(\tau)\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left(X_p(\tau) - X_{p-1}(\tau)\right) B(\tau) \right\| d\tau \right| \leq$$

$$\leq \|U(t)\| \|H^{-1}\| \sum_{i=1}^{k} \|M_i\| \|U_i\| \left| \int_{t_i}^{t} \|U^{-1}(\tau)\| \left[\|A_2(\tau)\| + \|B(\tau)\|\right] \|X_p(\tau) - X_{p-1}(\tau)\| d\tau \right| \leq$$

$$\leq \gamma\lambda_1 \sum_{i=1}^{k} m_i u_i \int_{0}^{\omega} \|U^{-1}(\tau)\| \left[\|A_2(\tau)\| + \|B(\tau)\|\right] d\tau \|X_p - X_{p-1}\|_C \leq$$

$$\leq \gamma\lambda_1\lambda_2(\alpha_2 + \beta)\omega \sum_{i=1}^{k} m_i u_i \|X_p - X_{p-1}\|_C .$$

Отсюда имеем оценку

$$\|X_{p+1} - X_p\|_C \leq q\|X_p - X_{p-1}\|_C, \quad p = 1, 2, \ldots, \tag{19}$$

На основе (19) имеем явную оценку

$$\|X_p - X_{p-1}\|_C \leq q^p \|X_1 - X_0\|_C, \quad p = 1, 2, \ldots, \tag{20}$$

при этом $\|X_1 - X_0\|_C = \|\mathfrak{L}(X_0) - X_0\|_C$.

Используя (20), можно доказать с помощью известных приемов [6-8], что последовательность $\{X_r\}_0^\infty$ сходится равномерно по $t \in I$ к решению интегрального уравнения (9), при этом справедлива оценка

$$\|X - X_r\|_C \leq \frac{q^r}{1-q}\|X_1 - X_0\|_C, \quad r = 0, 1, 2, \ldots \tag{21}$$

На основе (20) имеем оценку области локализации решения $X(t)$, определяемую согласно алгоритму (13):

$$\|X\|_C \le \|X_0\|_C + \frac{\|X_1 - X_0\|_C}{1-q}. \qquad (22)$$

Покажем, что из (22) при $X_0 \equiv 0$ следует оценка (7), при этом $\|X_1 - X_0\|_C = \|X_1\|_C = \|\mathfrak{L}(0)\|_C$.

Поскольку

$$\|\mathfrak{L}(0)\| = \left\| U(t)H^{-1}\sum_{i=1}^{k} M_i U_i \int_{t_i}^{t} U^{-1}(\tau)F(\tau)d\tau \right\| \le$$

$$\le \|U(t)\|\|H^{-1}\| \left\| \sum_{i=1}^{k} M_i U_i \int_{t_i}^{t} U^{-1}(\tau)F(\tau)d\tau \right\| \le$$

$$\le \|U(t)\|\|H^{-1}\| \sum_{i=1}^{k} \|M_i\|\|U_i\| \left\| \int_{t_i}^{t} U^{-1}(\tau)F(\tau)d\tau \right\| \le$$

$$\le \|U(t)\|\|H^{-1}\| \sum_{i=1}^{k} \|M_i\|\|U_i\| \left| \int_{t_i}^{t} \|U^{-1}(\tau)F(\tau)d\tau\| \right| \le$$

$$\le \|U(t)\|\|H^{-1}\| \sum_{i=1}^{k} \|M_i\|\|U_i\| \int_{0}^{\omega} \|U^{-1}(\tau)F(\tau)d\tau\| \le$$

$$\le \gamma\lambda_1\lambda_2\omega h \sum_{i=1}^{k} m_i u_i = N,$$

то из (22) имеем (7). Теорема полностью доказана.

Замечание. Аналогично с помощью метода [5] можно исследовать задачу (1), (2) на основе расщепления матрицы $B(t)$, либо одновременно матриц $A(t)$, $B(t)$. Выбор способа расщепления, разумеется, тесно связан со структурой и функциональными свойствами этих матриц.

Для иллюстрации применения полученных результатов рассмотрим краевую задачу (1), (2) в случае $n = 2, k = 4$, полагая

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}02\cdot t \\ -0{,}02\cdot t & 0 \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 & -0{,}03\cdot t^2 \\ 0{,}03\cdot t^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad F(t) = \begin{pmatrix} t & 1 \\ 1 & -t \end{pmatrix},$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$t_1 = 0, \quad t_2 = \frac{2}{5}, \quad t_3 = \frac{7}{10}, \quad t_4 = 1.$$

В качестве нормы матриц примем следующую норму:

$$\|A\| = \max_i \sum_j |a_{ij}|.$$

Применительно к этой задаче имеем

$$A_1(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}02 \cdot t \\ -0{,}02 \cdot t & 0 \end{pmatrix}, \quad U(t) = \begin{pmatrix} \cos(0{,}01 \cdot t^2) & \sin(0{,}01 \cdot t^2) \\ -\sin(0{,}01 \cdot t^2) & \cos(0{,}01 \cdot t^2) \end{pmatrix},$$

$$H = \begin{pmatrix} 0{,}9951000196081431 & 0{,}99998799502402 \\ -1{,}0015499997339987 & 0{,}9899988866661064 \end{pmatrix},$$

$$\alpha_2 = 0, \quad \beta = 0{,}03, \quad h = 1{,}5, \quad m_1 = 1, \quad m_2 = 1, \quad m_3 = 1, \quad m_4 = 1,$$

$$\gamma = 1{,}0050154539880318, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1{,}009949833750832, \quad u_1 = 1,$$

$$u_2 = 1{,}0015987193176064, \quad u_3 = 1{,}0048879754158768, \quad u_4 = 1{,}009949833750832,$$

$$\det H = 1{,}9866858876837914, \quad q = 0{,}12351921044131459.$$

Алгоритм построения решения данной задачи имеет вид

$$X_p(t) = U(t) H^{-1} \sum_{i=1}^{4} M_i U_i \int_{t_i}^{t} U^{-1}(\tau)\left[A_2(\tau) X_{p-1}(\tau) + X_{p-1}(\tau) B(\tau) + F(\tau)\right] d\tau, \quad (23)$$

$$p = 1, 2, \ldots$$

В данной работе по формуле (23) получены приближенные решения $X_1(t)$, $X_2(t)$. Они здесь не приведены ввиду их громоздкости. Найдем приближенное решение $X_2(t)$ в точках $t_i = 0{,}1 \cdot i$ $(i = 0,1,2,\ldots,10)$. В качестве начального приближения $X_0(t)$ возьмем нулевую матрицу второго порядка. Результат приведен в таблицах 1, 2.

Таблица 1

Элементы $X_{2(11)}(t)$, $X_{2(12)}(t)$ приближенного решения

t_i	$X_{2(11)}(t_i)$	$X_{2(12)}(t_i)$
0	–0,40461276293323084	–0,41944082034484176
0,1	–0,3996393912868289	–0,3193705299736899
0,2	–0,38470034068119235	–0,21914738674909562
0,3	–0,35975360627183317	–0,11876070757865137
0,4	–0,3247390042753695	–0,01821304256591938
0,5	–0,27957813961841194	0,0824761234328372
0,6	–0,22417440898175825	0,1832666270426665
0,7	–0,1584130492416436	0,2840938404883197
0,8	–0,08216124140956582	0,3848648438032236
0,9	0,00473171972845199	0,48545455547448313
1	0,10243417997382287	0,585701822035576

Таблица 2

Элементы $X_{2(21)}(t), X_{2(22)}(t)$ приближенного решения

t_i	$X_{2(21)}(t_i)$	$X_{2(22)}(t_i)$
0	–0,29854410251524444	0,6654591376137617
0,1	–0,19849727397500389	0,660496652621814
0,2	–0,09833402696718319	0,6455854457718603
0,3	0,00197205761350866	0,6206762927639276
0,4	0,10243417997382281	0,5857018220355759
0,5	0,20304863414673652	0,5405765139547438
0,6	0,30379107833966174	0,4851967354836388
0,7	0,404612762933231	0,41944082034484165
0,8	0,5054367162700921	0,3431692048199803
0,9	0,6061538885120704	0,2562246294099066
1	0,7066192540098511	0,15843241668288183

Точное решение данной задачи имеет вид

$$X(t)=U(t)X(0)V(t)+U(t)\int_0^t U^{-1}(\tau)F(\tau)V^{-1}(\tau)d\tau\, V(t),$$

где

$$U(t)=\begin{pmatrix}\cos\left(0{,}01\cdot t^2\right) & \sin\left(0{,}01\cdot t^2\right)\\ -\sin\left(0{,}01\cdot t^2\right) & \cos\left(0{,}01\cdot t^2\right)\end{pmatrix},\quad V(t)=\begin{pmatrix}\cos\left(0{,}01\cdot t^3\right) & -\sin\left(0{,}01\cdot t^3\right)\\ \sin\left(0{,}01\cdot t^3\right) & \cos\left(0{,}01\cdot t^3\right)\end{pmatrix},$$

$$X(0)=\begin{pmatrix}-0{,}40461746796776654 & -0{,}41944459652234517\\ -0{,}29854160700593724 & 0{,}6654682243002575\end{pmatrix}.$$

Достаточно точное численное решение в точках $t_i=0{,}1\cdot i\ \left(i=0,1,2,...,10\right)$ приведено в таблицах 3, 4.

Таблица 3

Элементы $X_{11}(t), X_{12}(t)$ точного численного решения

t_i	$X_{11}(t_i)$	$X_{12}(t_i)$
0	–0,40461746796776654	–0,41944459652234517
0,1	–0,3996440972092917	–0,31937428143684726
0,2	–0,38470505269025623	–0,21915096807263745
0,3	–0,3597583261041974	–0,11876382519432843
0,4	–0,3247437030051736	–0,01821524932868618
0,5	–0,2795827081333032	0,08247541693028215
0,6	–0,22417859336401252	0,1832680903110931
0,7	–0,15841639469542243	0,28409805955467926
0,8	–0,08216308984504772	0,38487198928610994
0,9	0,00473210658732021	0,48546379949754503
1	0,10243726778801321	0,585710405989753

Таблица 4

Элементы $X_{21}(t), X_{22}(t)$ точного численного решения

t_i	$X_{21}(t_i)$	$X_{22}(t_i)$
0	–0,29854160700593724	0,6654682243002575
0,1	–0,19849476897813462	0,6605057337543789
0,2	–0,09833145698706436	0,645594484623 1736
0,3	0,00197480436326347	0,6206851995492142
0,4	0,10243726778801321	0,5857104059897532
0,5	0,20305224863073856	0,5405843893737063
0,6	0,30379532951600047	0,4852031794912206
0,7	0,4046174679677667	0,4194445965223451
0,8	0,5054409908818707	0,3431683882729506
0,9	0,6061554602622046	0,2562164955838843
1	0,706613395506161	0,1584134885444778

Для сравнения полученного приближенного решения с точным приведены таблицы 5, 6.

Таблица 5

Сравнение приближенного решения с точным

t_i	$\left\|X_{11}(t_i)-X_{2(11)}(t_i)\right\|$	$\left\|X_{12}(t_i)-X_{2(12)}(t_i)\right\|$
0	$4,705034535701369\cdot10^{-6}$	$3,7761775034117484\cdot10^{-6}$
0,1	$4,7059224628220875\cdot10^{-6}$	$3,7514631573420942\cdot10^{-6}$
0,2	$4,712009063878586\cdot10^{-6}$	$3,5813235418347134\cdot10^{-6}$
0,3	$4,719832364219467\cdot10^{-6}$	$3,1176156770618135\cdot10^{-6}$
0,4	$4,6987298040757075\cdot10^{-6}$	$2,2067627667987644\cdot10^{-6}$
0,5	$4,568514891278852\cdot10^{-6}$	$7,065025550423432\cdot10^{-7}$
0,6	$4,184382254274199\cdot10^{-6}$	$1,4632684265936113\cdot10^{-6}$
0,7	$3,345453778835772\cdot10^{-6}$	$4,219066359556489\cdot10^{-6}$
0,8	$1,8484354818992799\cdot10^{-6}$	$7,145482886328214\cdot10^{-6}$
0,9	$3,8685886821765436\cdot10^{-7}$	$9,244023061905082\cdot10^{-6}$
1	$3,087814190338989\cdot10^{-6}$	$8,583954177021624\cdot10^{-6}$

Таблица 6

Сравнение приближенного решения с точным

t_i	$\left\|X_{21}(t_i)-X_{2(21)}(t_i)\right\|$	$\left\|X_{22}(t_i)-X_{2(22)}(t_i)\right\|$
0	$2,4955093071987733\cdot10^{-6}$	$9,086686495796137\cdot10^{-6}$
0,1	$2,5049968692680835\cdot10^{-6}$	$9,081132564925376\cdot10^{-6}$
0,2	$2,569980118827253\cdot10^{-6}$	$9,038851313314389\cdot10^{-6}$
0,3	$2,746749754811706\cdot10^{-6}$	$8,906785286644237\cdot10^{-6}$
0,4	$3,0878141903945\cdot10^{-6}$	$8,583954177354691\cdot10^{-6}$
0,5	$3,6144840020457814\cdot10^{-6}$	$7,875418962521863\cdot10^{-6}$

Окончание табл. 6

t_i	$\left\|X_{21}(t_i)-X_{2(21)}(t_i)\right\|$	$\left\|X_{22}(t_i)-X_{2(22)}(t_i)\right\|$
0,6	$4{,}251176338732066\cdot10^{-6}$	$6{,}444007581818401\cdot10^{-6}$
0,7	$4{,}705034535701369\cdot10^{-6}$	$3{,}776177503467259 6\cdot10^{-6}$
0,8	$4{,}274611778543047\cdot10^{-6}$	$8{,}165470297138988\cdot10^{-7}$
0,9	$1{,}5717501341550033\cdot10^{-6}$	$8{,}133826022271862\cdot10^{-6}$
1	$5{,}85850369017038\cdot10^{-6}$	$1{,}8928138404039616\cdot10^{-5}$

Оценка погрешности вычислений, полученная на основании таблиц 5, 6, имеет вид

$$\left\|X(t)-X_2(t)\right\|\le 1{,}8928138404039616\cdot10^{-5}.$$

Заметим, что соответствующая оценка, полученная на основе теоретической оценки (21), грубее этой оценки, а именно

$$\left\|X(t)-X_2(t)\right\|\le 0{,}01677521042683583.$$

Теоретическая оценка получена применительно к общей постановке задачи, при этом является результатом ряда промежуточных оценок.

Заключение

Анализ результатов выполненных вычислений показывает, что полученные условия однозначной разрешимости и используемый классический алгоритм построения решения применимы для отыскания с заданной точностью приближенных аналитических решений исследуемой краевой задачи в рассмотренном случае.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бондарев, А.Н.** О многоточечной краевой задаче для матричного уравнения Ляпунова / А.Н. Бондарев, В.Н. Лаптинский // Труды ин-та системного анализа РАН: Динамика неоднородных систем ; под ред. Ю.С. Попкова. – М. : Издательство ЛКИ, 2008. – Т. 32 (3). – С. 19–26.
2. **Лаптинский, В.Н.** Конструктивный анализ многоточечной краевой задачи для матричного дифференциального уравнения Ляпунова в невырожденном случае / В.Н. Лаптинский, А.Н. Бондарев. – Могилев, 2009. – 38 с. – (Препринт / Нац. акад. наук Беларуси. Ин-т технол. металлов ; № 13).
3. **Лаптинский, В.Н.** Конструктивный анализ многоточечной краевой задачи для матричного дифференциального уравнения Ляпунова в вырожденных случаях / В.Н. Лаптинский, А.Н. Бондарев. – Могилев, 2010. – 62 с. – (Препринт / Нац. акад. наук Беларуси. Ин-т технол. металлов ; № 17).
4. **Бондарев, А.Н.** Анализ многоточечной краевой задачи для матричного уравнения Ляпунова с помощью метода функций Грина / А.Н. Бондарев, В.Н. Лаптинский // Веснік Магілёўскага дзярж. ўн-та імя А.А. Куляшова. Сер. В, Прыродазнаўчыя навукі (матэматыка, фізіка, біялогія). – 2010. – № 1 (35). – С. 24–33.
5. **Лаптинский, В.Н.** Конструктивный анализ управляемых колебательных систем / В.Н. Лаптинский. – Мн. : Институт математики НАН Беларуси, 1998. – 300 с.
6. **Демидович, Б.П.** Лекции по математической теории устойчивости / Б.П. Демидович. – М. : Наука, 1967. – 472 с.
7. **Бибиков, Ю.Н.** Курс обыкновенных дифференциальных уравнений / Ю.Н. Бибиков. – М. : Высшая школа, 1991. – 303 с.