УДК 517.925

А.Н. БОНДАРЕВ, В.Н. ЛАПТИНСКИЙ

АНАЛИЗ МНОГОТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА ФУНКЦИЙ ГРИНА

Получены конструктивные достаточные условия однозначной разрешимости многоточечной краевой задачи для матричного дифференциального уравнения Ляпунова.

В данной работе рассматривается задача

$$\frac{dX}{dt} = \lambda A(t)X(t) + \lambda X(t)B(t) + F(t), \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{k} M_i X(t_i, \lambda) = 0, \tag{2}$$

где $A(t)$, $B(t)$, $F(t)$ – непрерывные $(n \times n)$-матрицы на промежутке $I = [0, \omega]$, λ – скалярный вещественный параметр, M_i $(i = \overline{1,k})$ – заданные постоянные $(n \times n)$-матрицы, $0 = t_1 < t_2 < \ldots < t_k = \omega$.

Уравнение (1) относится к многомерным системам дифференциальных уравнений специального вида (см., например [1-3]). Краевая задача (1), (2) является задачей типа [2] применительно к уравнению Ляпунова вида (1). Такие задачи играют важную роль в теории и приложениях дифференциальных уравнений [1-6]. В данной работе с помощью метода [6] в невырожденном случае изучаются следующие вопросы: разрешимость задачи, построение ее решения и оценки его области локализации. Приведен модельный пример, иллюстрирующий применение полученных результатов.

Примем следующие обозначения:

$$M = \sum_{i=1}^{k} M_i, \quad \alpha_g = \max_t \int_0^{\omega} \|G(t,\tau)\| \cdot \|A(\tau)\| d\tau, \quad \beta_g = \max_t \int_0^{\omega} \|G(t,\tau)\| \cdot \|B(\tau)\| d\tau,$$

$$h_g = \max_t \int_0^{\omega} \|G(t,\tau)\| \cdot \|F(\tau)\| d\tau, \quad q_g = \alpha_g + \beta_g, \quad \delta = \max_{1 \le p \le k-1} \delta_p,$$

$$\delta_p = \max \left\{ \|M^{-1}M_1\|, \ldots, \left\|M^{-1}\sum_{i=1}^{p} M_i\right\|, \left\|M^{-1}\sum_{i=p+1}^{k} M_i\right\|, \ldots, \|M^{-1}M_k\| \right\},$$

$$\varepsilon = |\lambda|, \quad \|X\|_C = \max_t \|X(t)\|,$$

где $t \in I$, $\|\bullet\|$ – любая подходящая норма матриц $(\|PQ\| \le \|P\| \cdot \|Q\|)$, например, норма в [7, с. 21], $C = C(I, \mathbb{R}^{n\times n})$ – банахово пространство непрерывных $(n \times n)$-матриц.

Теорема. *Пусть выполнены условия* $\det M \ne 0$, $\varepsilon q_g < 1$. *Тогда задача (1), (2) однозначно разрешима, ее решение* $X(t,\lambda)$ *представимо в виде*

$$X(t,\lambda) = X_0(t) + \lambda X_1(t) + \lambda^2 X_2(t) + \ldots + \lambda^i X_i(t) + \ldots, \tag{3}$$

при этом справедлива оценка

$$\|X(t,\lambda)\| \le \frac{h_g}{1-\varepsilon q_g}. \tag{4}$$

Доказательство. С помощью подхода [6, гл. 1] имеем матричное интегральное уравнение, эквивалентное задаче (1), (2),

$$X(t,\lambda) = \int_0^\omega G(t,\tau)\left[\lambda A(\tau)X(\tau,\lambda) + \lambda X(\tau,\lambda)B(\tau) + F(\tau)\right]d\tau, \tag{5}$$

где

$$G(t,\tau) = \begin{cases} M^{-1}\left(\sum\limits_{i=1}^{p} M_i\right), t_p \le \tau \le t_{p+1} \le t,\ p = 1,2,\ldots,j-1; \\ M^{-1}\left(\sum\limits_{i=1}^{j} M_i\right), t_j \le \tau \le t \le t_{j+1},\ j = 1,2,\ldots,k-1; \\ -M^{-1}\left(\sum\limits_{i=j+1}^{k} M_i\right), t_j \le \tau \le t \le t_{j+1}; \\ M^{-1}\left(\sum\limits_{i=j+q}^{k} M_i\right), t \le t_{j+q-1} \le \tau \le t_{j+q},\ p = 2,3,\ldots,k-j. \end{cases}$$

Запишем уравнение (5) в следующем виде:

$$X(t,\lambda) = \lambda\int_0^\omega G(t,\tau)\left[A(\tau)X(\tau,\lambda) + X(\tau,\lambda)B(\tau)\right]d\tau + \int_0^\omega G(t,\tau)F(\tau)d\tau. \tag{6}$$

Решение уравнения (6) будем искать в виде ряда (3). Подставляя (3) в (6) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ, получим

$$X_0(t)=\int_0^{\omega}G(t,\tau)F(\tau)d\tau, \tag{7}$$

$$X_i(t)=\int_0^{\omega}G(t,\tau)\left[A(\tau)X_{i-1}(\tau)+X_{i-1}(\tau)B(\tau)\right]d\tau,\quad i=1,2,... \tag{8}$$

Исследуем вопросы сходимости, скорости сходимости ряда (3). Для этого построим соответствующий числовой мажорантный ряд. Выполнив оценки по норме в (8), получим

$$\left\|X_i(t)\right\|=\left\|\int_0^{\omega}G(t,\tau)\left[A(\tau)X_{i-1}(\tau)+X_{i-1}(\tau)B(\tau)\right]d\tau\right\|\le$$

$$\le\int_0^{\omega}\left\|G(t,\tau)A(\tau)X_{i-1}(\tau)\right\|d\tau+\int_0^{\omega}\left\|G(t,\tau)X_{i-1}(\tau)B(\tau)\right\|d\tau\le$$

$$\le\int_0^{\omega}\left\|G(t,\tau)\right\|\cdot\left\|A(\tau)\right\|\cdot\left\|X_{i-1}(\tau)\right\|d\tau+\int_0^{\omega}\left\|G(t,\tau)\right\|\cdot\left\|X_{i-1}(\tau)\right\|\cdot\left\|B(\tau)\right\|d\tau\le$$

$$\le\left(\int_0^{\omega}\left\|G(t,\tau)\right\|\cdot\left\|A(\tau)\right\|d\tau+\int_0^{\omega}\left\|G(t,\tau)\right\|\cdot\left\|B(\tau)\right\|d\tau\right)\left\|X_{i-1}\right\|_C=$$

$$=\left(\alpha_g+\beta_g\right)\left\|X_{i-1}\right\|_C=q_g\left\|X_{i-1}\right\|_C.$$

Отсюда следует рекуррентная оценка

$$\left\|X_i\right\|_C\le q_g\left\|X_{i-1}\right\|_C,\quad i=1,2,... \tag{9}$$

На основании (9) имеем явную оценку

$$\left\|X_i\right\|_C\le q_g^i\left\|X_0\right\|_C,\quad i=1,2,... \tag{10}$$

Используя (10), составим числовой ряд

$$\left\|X_0\right\|_C+\varepsilon\left\|X_1\right\|_C+\varepsilon^2\left\|X_2\right\|_C+...+\varepsilon^i\left\|X_i\right\|_C+... \tag{11}$$

Поскольку $\varepsilon q_g<1$, то ряд (11) сходится. Легко видеть, что для суммы $S(\varepsilon)$ ряда (11) имеет место оценка (4). Тогда, очевидно, ряд (3) сходится равномерно по $t\in[0,\omega]$ в области $|\lambda|<1/q_g$. Согласно [8, с. 160] сумма этого ряда представляет собой решение уравнения (6). Единственность решения $X(t,\lambda)$ следует из принципа сжатых отображений (см., например, [9, с. 605]), примененного к уравнению (6). Таким образом, теорема полностью доказана.

Используя оценку (10), нетрудно получить следующую оценку:

$$\left\|X(t,\lambda)-\tilde{X}_i(t,\lambda)\right\| \le \frac{\left(\varepsilon q_g\right)^{i+1} h_g}{1-\varepsilon q_g}, \quad i=0,1,2,..., \tag{12}$$

где $\tilde{X}_i(t,\lambda)=X_0(t)+\lambda X_1(t)+\lambda^2 X_2(t)+...+\lambda^i X_i(t)$, $i=0,1,2,...$.

Далее, наряду с принятыми, введем следующие обозначения:

$$\gamma=\left\|M^{-1}\right\|, \quad m=\sum_{i=1}^{k}\left\|M_i\right\|, \quad \alpha=\max_t\left\|A(t)\right\|, \quad \beta=\max_t\left\|B(t)\right\|, \quad h=\max_t\left\|F(t)\right\|,$$

$$\tilde{\alpha}=\int_0^{\omega}\left\|A(\tau)\right\|d\tau, \quad \tilde{\beta}=\int_0^{\omega}\left\|B(\tau)\right\|d\tau, \quad \tilde{h}=\int_0^{\omega}\left\|F(\tau)\right\|d\tau, \quad \tilde{q}=\gamma m\left(\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}\right).$$

Замечание 1. Поскольку $\alpha_g \le \delta\tilde{\alpha}$, $\beta_g \le \delta\tilde{\beta}$, $h_g \le \delta\tilde{h}$, то при выполнении условия $\det M \ne 0$ в области

$$|\lambda| < \frac{1}{\delta\left(\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}\right)} \tag{13}$$

задача (1), (2) однозначно разрешима, ее решение $X(t,\lambda)$ представимо в виде (3), при этом справедлива оценка

$$\left\|X(t,\lambda)\right\| \le \frac{\delta\tilde{h}}{1-\varepsilon\delta\left(\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}\right)}. \tag{14}$$

Замечание 2. Поскольку $\tilde{\alpha} \le \alpha\omega$, $\tilde{\beta} \le \beta\omega$, $\tilde{h} \le h\omega$, то в данном случае ($\det M \ne 0$) вместо соотношений (13), (14), очевидно, можно принять коэффициентные соотношения

$$|\lambda| < \frac{1}{\delta(\alpha+\beta)\omega}, \quad \left\|X(t,\lambda)\right\| \le \frac{\delta h\omega}{1-\varepsilon\delta(\alpha+\beta)\omega}. \tag{15}$$

Отметим еще, что к соотношениям (15) можно прийти на основании оценок

$$\alpha_g \le \alpha \max_t \int_0^{\omega}\left\|G(t,\tau)\right\|d\tau \le \delta\alpha\omega, \quad \beta_g \le \beta \max_t \int_0^{\omega}\left\|G(t,\tau)\right\|d\tau \le \delta\beta\omega,$$

$$h_g \le h \max_t \int_0^{\omega}\left\|G(t,\tau)\right\|d\tau \le \delta h\omega.$$

В приведенных выше соотношениях можно воспользоваться следующей оценкой: $\delta < \gamma m$. Тогда соответствующие условия разрешимости станут более удобными для применения.

Замечание 3. С помощью конструктивного метода регуляризации [6, с. 71] в [10] получен алгоритм построения решения задачи (1), (2), более удобный для применения, чем алгоритм (8), однако соответствующие оценки грубее оценок, приведенных выше. В случае двухточечной краевой задачи конструктивный метод регуляризации и метод функций Грина в принципе дают одинаковые результаты (условия однозначной разрешимости, алгоритмы построения и оценки решения). Отметим, что этот случай весьма важен для теории и приложений дифференциальных уравнений, поскольку включает в себя периодическую краевую задачу.

Для иллюстрации применения полученных в данной работе результатов рассмотрим краевую задачу (1), (2) в случае $n=3, k=3$, полагая

$$A(t)=\begin{pmatrix} 3t^2 & 0 & 0 \\ 0 & 3t^2 & 0 \\ 0 & 0 & -3t^2 \end{pmatrix},\quad B(t)=\begin{pmatrix} 2t & 0 & 0 \\ 0 & -2t & 0 \\ 0 & 0 & 2t \end{pmatrix},\quad F(t)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -t \\ 0 & t & -1 \\ t & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M_1=\mathrm{diag}(1,0,0),\quad M_2=\mathrm{diag}(0,1,0),\quad M_3=\mathrm{diag}(0,0,1),$$

$$t_1=0,\quad t_2=\frac{1}{2},\quad t_3=1.$$

Применительно к этой задаче имеем

$$M=\mathrm{diag}(1,1,1),\quad \gamma=1,\quad m=3,\quad \tilde{\alpha}=1,\quad \tilde{\beta}=1,\quad \tilde{h}=\frac{3}{2}.$$

Таким образом, $\tilde{q}=6, |\lambda|<\frac{1}{6}$.

Найдем матрицы $X_k(t)\,(k=0,1,2)$, используя алгоритм (7), (8):

$$X_0(t)=\begin{pmatrix} t & 0 & -\frac{1}{2}t^2 \\ 0 & \frac{1}{2}t^2-\frac{1}{8} & -t+\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2} & t-1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$X_1(t)=\begin{pmatrix} X_{1(11)} & X_{1(12)} & X_{1(13)} \\ X_{1(21)} & X_{1(22)} & X_{1(23)} \\ X_{1(31)} & X_{1(32)} & X_{1(33)} \end{pmatrix},$$

где

$$X_{1(11)}=\frac{3}{4}t^4+\frac{2}{3}t^3,\quad X_{1(12)}=0,\quad X_{1(13)}=-\frac{3}{10}t^5-\frac{1}{4}t^4,$$

$$X_{1(21)}=0,\quad X_{1(22)}=\frac{3}{10}t^5-\frac{1}{4}t^4-\frac{1}{8}t^3+\frac{1}{8}t^2-\frac{3}{320},\quad X_{1(23)}=-\frac{3}{4}t^4-\frac{1}{6}t^3+\frac{1}{2}t^2-\frac{11}{192},$$

$$X_{1(31)}=-\frac{3}{10}t^5+\frac{1}{4}t^4+\frac{1}{2}t^3-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{20},\quad X_{1(32)}=-\frac{3}{4}t^4+\frac{1}{3}t^3+t^2-\frac{7}{12},\quad X_{1(33)}=0,$$

$$X_2(t)=\begin{pmatrix} X_{2(11)} & X_{2(12)} & X_{2(13)} \\ X_{2(21)} & X_{2(22)} & X_{2(23)} \\ X_{2(31)} & X_{2(32)} & X_{2(33)} \end{pmatrix},$$

где

$$X_{2(11)}=\frac{9}{28}t^7+\frac{7}{12}t^6+\frac{4}{15}t^5,\quad X_{2(12)}=0,\quad X_{2(13)}=-\frac{9}{80}t^8-\frac{27}{140}t^7-\frac{1}{12}t^6,\quad X_{2(21)}=0,$$

$$X_{2(22)}=\frac{9}{80}t^8-\frac{27}{140}t^7+\frac{1}{48}t^6+\frac{1}{8}t^5-\frac{1}{16}t^4-\frac{3}{320}t^3+\frac{3}{320}t^2-\frac{37}{86016},$$

$$X_{2(23)}=-\frac{9}{28}t^7-\frac{1}{3}t^6+\frac{7}{30}t^5+\frac{1}{4}t^4-\frac{11}{192}t^3-\frac{11}{192}t^2+\frac{169}{26880},$$

$$X_{2(31)}=\frac{9}{80}t^8-\frac{27}{140}t^7-\frac{1}{6}t^6+\frac{1}{2}t^5-\frac{1}{4}t^4-\frac{1}{20}t^3+\frac{1}{20}t^2-\frac{1}{336},$$

$$X_{2(32)}=\frac{9}{28}t^7+\frac{1}{12}t^6-\frac{11}{15}t^5-\frac{1}{2}t^4+\frac{7}{12}t^3+\frac{7}{12}t^2-\frac{71}{210},\quad X_{2(33)}=0.$$

Итак, получено приближенное решение $\tilde{X}_2(t,\lambda)$ задачи (1), (2), при этом на основании (12) имеет место оценка

$$\left\|X(t,\lambda)-\tilde{X}_2(t,\lambda)\right\|\le 1{,}0340425531914894\cdot 10^{-3}.$$

Найдем теперь приближенное решение $\tilde{X}_2(t,\lambda)$ в точках $t_i=0{,}1\cdot i$ $(i=0,1,2,...,10)$ при $\lambda=0{,}01$ (см. таблицы 1, 2, 3).

Таблица 1

Элементы $\tilde{X}_{2(11)}(t_i,\lambda)$, $\tilde{X}_{2(12)}(t_i,\lambda)$, $\tilde{X}_{2(13)}(t_i,\lambda)$ приближенного решения

t_i	$\tilde{X}_{2(11)}(t_i,\lambda)$	$\tilde{X}_{2(12)}(t_i,\lambda)$	$\tilde{X}_{2(13)}(t_i,\lambda)$
0	0	0	0
0,1	0,10000741699488096	0	–0,00500028001037441
0,2	0,20006534601142859	0	–0,02000496080899048
0,3	0,3002408643546429	0	–0,04502755103089823
0,4	0,4006192313295238	0	–0,08009479310384764
0,5	0,5013040792410715	0	–0,12525032482328868
0,6	0,6024176949942858	0	–0,18055839763337148
0,7	0,7041014084941667	0	–0,2461076772099459
0,8	0,8065161040457144	0	–0,32201515647756196
0,9	0,9098428709539286	0	–0,4084302157284696
1	1,0142838095238096	0	–0,505538869047619

Таблица 2

Элементы $\tilde{X}_{2(21)}(t_i,\lambda)$, $\tilde{X}_{2(22)}(t_i,\lambda)$, $\tilde{X}_{2(23)}(t_i,\lambda)$ приближенного решения

t_i	$\tilde{X}_{2(21)}(t_i,\lambda)$	$\tilde{X}_{2(22)}(t_i,\lambda)$	$\tilde{X}_{2(23)}(t_i,\lambda)$
0	0	–0,12509379301525297	0,49942771205357145
0,1	0	–0,1200827550774857	0,3994752350628572
0,2	0	–0,10505680909997678	0,29960214864214285
0,3	0	–0,08002796616367619	0,19977151961142853
0,4	0	–0,04500703070683391	0,09992845179071426
0,5	0	0	0
0,6	0	0,05499553026497565	–0,10010498854071437
0,7	0	0,11999396042794291	–0,20049612161142866
0,8	0	0,19502529204745184	–0,3013018143921429
0,9	0	0,28013875904975233	–0,4026697630628571
1	0	0,37540650460379466	–0,5047675558035715

Таблица 3

Элементы $\tilde{X}_{2(31)}(t_i,\lambda)$, $\tilde{X}_{2(32)}(t_i,\lambda)$, $\tilde{X}_{2(33)}(t_i,\lambda)$ приближенного решения

t_i	$\tilde{X}_{2(31)}(t_i,\lambda)$	$\tilde{X}_{2(32)}(t_i,\lambda)$	$\tilde{X}_{2(33)}(t_i,\lambda)$
0	–0,49950029761904763	–1,0058671428571428	0
0,1	–0,4945450346375304	–0,9057639235789287	0
0,2	–0,4796571229037714	–0,805449778712381	0
0,3	–0,45480211924872077	–0,7049316379525	0
0,4	–0,4199467581106286	–0,6042346869942857	0
0,5	–0,37506253976004467	–0,5034023865327382	0
0,6	–0,32012933813881905	–0,40249643666285706	0
0,7	–0,25513902215710177	–0,3015966704796428	0
0,8	–0,1800990797563428	–0,2008008606780952	0
0,9	–0,09503622951029222	–0,10022442295321426	0
1	0	0	0

Точное решение данной задачи имеет вид

$$X(t)=U(t)X(0)V(t)+U(t)\int_0^t U^{-1}(\tau)F(\tau)V^{-1}(\tau)d\tau\, V(t),$$

где

$$U(t)=\mathrm{diag}\left(e^{0,01\cdot t^3},e^{0,01\cdot t^3},e^{-0,01\cdot t^3}\right),\quad V(t)=\mathrm{diag}\left(e^{0,01\cdot t^2},e^{-0,01\cdot t^2},e^{0,01\cdot t^2}\right),$$

$$X(0)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,1250937930295599 & 0,49942771149903764 \\ -0,4995002974928266 & -1,0058673020020594 & 0 \end{pmatrix}.$$

Точное численное решение в точках $t_i=0,1\cdot i$ $(i=0,1,2,...,10)$ при $\lambda=0,01$ приведено в таблицах 4, 5, 6.

Таблица 4

Элементы $X_{11}(t_i)$, $X_{12}(t_i)$, $X_{13}(t_i)$ точного численного решения

t_i	$X_{11}(t_i)$	$X_{12}(t_i)$	$X_{13}(t_i)$
0	0	0	0
0,1	0,1000074169948913	0	–0,00500028001037469
0,2	0,20006534601317938	0	–0,0200049608090885
0,3	0,3002408643932476	0	–0,04502755103418506
0,4	0,40061923169545566	0	–0,08009479314574952
0,5	0,5013040814118752	0	–0,1252503251363224
0,6	0,6024177045309895	0	–0,1805583992942876
0,7	0,7041014424570571	0	–0,24610768414974474
0,8	0,8065162075755146	0	–0,322015180774623 5
0,9	0,9098431508172531	0	–0,4084302899441866
1	1,0142844969519613	0	–0,5055390723935161

Таблица 5

Элементы $X_{21}(t_i)$, $X_{22}(t_i)$, $X_{23}(t_i)$ точного численного решения

t_i	$X_{21}(t_i)$	$X_{22}(t_i)$	$X_{23}(t_i)$
0	0	–0,1250937930295599	0,49942771149903764
0,1	0	–0,12008275508828477	0,39947523457405965
0,2	0	–0,1050568091046581	0,2996021483306568
0,3	0	–0,08002796616467198	0,19977151949489513
0,4	0	–0,04500703070688643	0,0999284517776532
0,5	0	0	0
0,6	0	0,05499553026496357	–0,10010498857734407
0,7	0	0,11999396042792053	–0,20049612253877602
0,8	0	0,1950252920475697	–0,30130182159081964
0,9	0	0,2801387590574348	–0,4026697970009814
1	0	0,375406504715792	–0,5047676764341472

Таблица 6

Элементы $X_{31}(t_i)$, $X_{32}(t_i)$, $X_{33}(t_i)$ точного численного решения

t_i	$X_{31}(t_i)$	$X_{32}(t_i)$	$X_{33}(t_i)$
0	–0,4995002974928266	–1,0058673020020594	0
0,1	–0,4945450345361205	–0,9057640790225759	0
0,2	–0,4796571228498668	–0,8054499222114623	0
0,3	–0,4548021192311773	–0,7049317611401104	0
0,4	–0,4199467581111333	–0,6042347832516626	0
0,5	–0,37506253977103027	–0,503402452884417	0
0,6	–0,32012933815890654	–0,40249647500048336	0
0,7	–0,2551390221789936	–0,3015966873654178	0
0,8	–0,18009907976866907	–0,20080086526094776	0
0,9	–0,09503622951218826	–0,10022442334180914	0
1	0	–0,0000000000000022	0

Для сравнения полученного приближенного решения с точным приведены таблицы 7, 8, 9.

Таблица 7

Сравнение приближенного решения с точным

t_i	$X_{11}(t_i)-\tilde{X}_{2(11)}(t_i,\lambda)$	$X_{12}(t_i)-\tilde{X}_{2(12)}(t_i,\lambda)$	$X_{13}(t_i)-\tilde{X}_{2(13)}(t_i,\lambda)$
0	0	0	0
0,1	$1,033895191682177\cdot10^{-14}$	0	$2,8709673527416157\cdot10^{-16}$
0,2	$1,7507939542582562\cdot10^{-12}$	0	$9,836922942874082\cdot10^{-14}$
0,3	$3,8604675012265948\cdot10^{-11}$	0	$3,2868360810844877\cdot10^{-12}$
0,4	$3,659318403848033\cdot10^{-10}$	0	$4,190188473973677\cdot10^{-11}$
0,5	$2,1708037589718288\cdot10^{-9}$	0	$3,1303371006430325\cdot10^{-10}$
0,6	$9,53670376002691\cdot10^{-9}$	0	$1,6609161268554828\cdot10^{-9}$
0,7	$3,3962890388927747\cdot10^{-8}$	0	$6,9397988466946\cdot10^{-9}$
0,8	$1,0352980017724889\cdot10^{-7}$	0	$2,4297061529399144\cdot10^{-8}$
0,9	$2,7986332451490625\cdot10^{-7}$	0	$7,42157170163793\cdot10^{-8}$
1	$6,87428151735503\cdot10^{-7}$	0	$2,0334589712067697\cdot10^{-7}$

Таблица 8

Сравнение приближенного решения с точным

t_i	$X_{21}(t_i)-\tilde{X}_{2(21)}(t_i,\lambda)$	$X_{22}(t_i)-\tilde{X}_{2(22)}(t_i,\lambda)$	$X_{23}(t_i)-\tilde{X}_{2(23)}(t_i,\lambda)$
0	0	$1,4306916762407695\cdot10^{-11}$	$5,545338077617146\cdot10^{-10}$
0,1	0	$1,0799069971589859\cdot10^{-11}$	$4,887975579848103\cdot10^{-10}$
0,2	0	$4,681324772271012\cdot10^{-12}$	$3,114860591679758\cdot10^{-10}$
0,3	0	$9,957867863619185\cdot10^{-13}$	$1,165333940456037\cdot10^{-10}$
0,4	0	$5,25135490647699\cdot10^{-14}$	$1,3061066117536768\cdot10^{-11}$
0,5	0	0	0
0,6	0	$1,2087553180606392\cdot10^{-14}$	$3,6629699273760252\cdot10^{-11}$
0,7	0	$2,238487173400472\cdot10^{-14}$	$9,27347365564657\cdot10^{-10}$
0,8	0	$1,1785017406396037\cdot10^{-13}$	$7,198676765796107\cdot10^{-9}$
0,9	0	$7,682465774649927\cdot10^{-12}$	$3,3938124255339375\cdot10^{-8}$
1	0	$1,119973558338927\cdot10^{-10}$	$1,206305757506243\cdot10^{-7}$

Таблица 9

Сравнение приближенного решения с точным

t_i	$X_{31}(t_i)-\tilde{X}_{2(31)}(t_i,\lambda)$	$X_{32}(t_i)-\tilde{X}_{2(32)}(t_i,\lambda)$	$X_{33}(t_i)-\tilde{X}_{2(33)}(t_i,\lambda)$
0	$1{,}2622103362502912\cdot10^{-10}$	$1{,}591449165783132\cdot10^{-7}$	0
0,1	$1{,}0140993600415982\cdot10^{-10}$	$1{,}5544364728725668\cdot10^{-7}$	0
0,2	$5{,}390460300347399\cdot10^{-11}$	$1{,}43499081284304\cdot10^{-7}$	0
0,3	$1{,}7543466679370567\cdot10^{-11}$	$1{,}2318761033469627\cdot10^{-7}$	0
0,4	$5{,}047073869945962\cdot10^{-13}$	$9{,}625737684704205\cdot10^{-8}$	0
0,5	$1{,}0985601317514693\cdot10^{-11}$	$6{,}635167881796633\cdot10^{-8}$	0
0,6	$2{,}0087487229147882\cdot10^{-11}$	$3{,}8337626295792404\cdot10^{-8}$	0
0,7	$2{,}1891821688768687\cdot10^{-11}$	$1{,}6885775000474723\cdot10^{-8}$	0
0,8	$1{,}2326278886476416\cdot10^{-11}$	$4{,}582852569656737\cdot10^{-9}$	0
0,9	$1{,}8960388814548423\cdot10^{-12}$	$3{,}8859487849762786\cdot10^{-10}$	0
1	0	$2{,}220446049250313\cdot10^{-16}$	0

Сравнительный анализ результатов выполненных вычислений показывает, что полученные условия однозначной разрешимости задачи (1), (2) и предложенный алгоритм построения ее решения, а также соответствующие оценки вполне приемлемы для отыскания с заданной точностью приближенных аналитических решений.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Зубов, В.И.*** Лекции по теории управления / В.И. Зубов. – М.: Наука, 1975. – 496 с.
2. ***Murty, K.N.*** Two (multi) point nonlinear Lyapunov systems existence and uniqueness / K.N. Murty, G.W. Howell, S. Sivasundaram // Journ. Mathem. Anal. and Appl. – 1992. – V. 167. – P. 505-515.
3. ***Параев, Ю.И.*** Уравнения Ляпунова и Риккати / Ю.И. Параев. – Томск: Томский госуниверситет, 1989. – 166 с.
4. ***Бойчук, А.А.*** Конструктивные методы анализа краевых задач / А.А. Бойчук. – Киев: Наукова думка, 1990. – 96 с.
5. ***Ешуков, Л.Н.*** Об одной функциональной задаче для обыкновенных дифференциальных уравнений / Л.Н. Ешуков // Успехи матем. наук. – 1958. – Т. 13. – Вып. 3 (81). – С. 191-196.
6. ***Лаптинский, В.Н.*** Конструктивный анализ управляемых колебательных систем / В.Н. Лаптинский. – Мн.: Институт математики НАН Беларуси, 1998. – 300 с.
7. ***Демидович, Б.П.*** Лекции по математической теории устойчивости / Б.П. Демидович. – М.: Наука, 1967. – 472 с.
8. ***Рисс, Ф.*** Лекции по функциональному анализу / Ф. Рисс, Б. Секефальви-Надь. – М.: ИЛ, 1954. – 500 с.
9. ***Канторович, Л.В.*** Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. – М.: Наука, 1977. – 744 с.
10. ***Лаптинский, В.Н.*** Конструктивный анализ многоточечной краевой задачи для матричного дифференциального уравнения Ляпунова в невырожденном случае / В.Н. Лаптинский, А.Н. Бондарев. – Могилев, 2009. – 38 с. – (Препринт / Нац. акад. наук Беларуси. Ин-т технол. металлов; № 13).

Поступила в редакцию 02.07.2009 г.