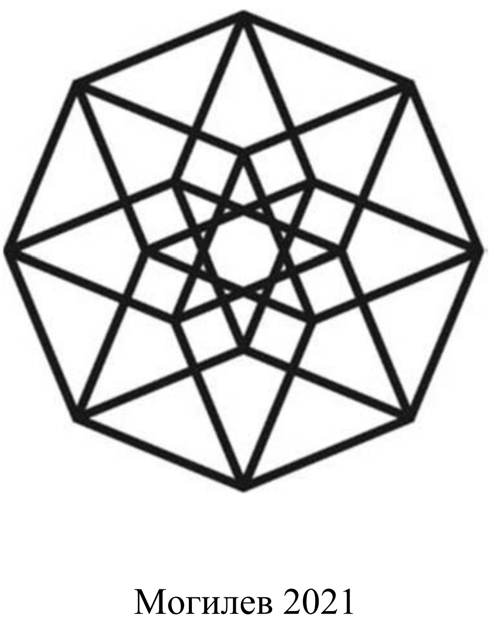
МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Высшая математика»

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Методические рекомендации к практическим занятиям для студентов направления подготовки 01.03.04 «Прикладная математика» очной формы обучения



Могилев 2021

УДК 517.91
ББК 22.161.6
Д50

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Высшая математика» «27» мая 2021 г., протокол № 9

Составители: ст. преподаватель О. А. Маковецкая;
доц. И. И. Маковецкий

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доц. В. А. Ливинская

Методические рекомендации разработаны на основе рабочей программы по дисциплине «Дифференциальные уравнения в частных производных» для студентов направления подготовки 01.03.04 «Прикладная математика» очной формы обучения и предназначены для использования при проведении практических занятий в четвертом семестре.

Учебно-методическое издание

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Ответственный за выпуск	В. Г. Замураев
Корректор	И. В. Голубцова
Компьютерная верстка	Н. П. Полевничая

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 56 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.

Содержание

1 Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка. Классификация и приведение к канонической форме

1.1 Теоретическая часть

Обозначим через D область n-мерного евклидового пространства E_n точек $x=\left(x_1,...,x_n\right)$ с декартовыми ортогональными координатами $x_1,...,x_n$, $n\geq 2$.

Пусть $F=F\left(x,...,p_{i_1...i_n},...\right)$ – заданная действительная функция точек $x\in D$ и действительных переменных $p_{i_1...i_n}$ с неотрицательными целочисленными индексами $i_1,...,i_n$, $\sum\limits_{j=1}^{n} i_j=k$, $k=0,...,m$, $m\geq 1$, по крайней мере одна из частных производных которой

$$\frac{\partial F}{\partial p_{i_1...i_n}},\ \sum_{j=1}^{n} i_j=m,$$

отлична от нуля.

Уравнение вида

$$F\left(x,...,\frac{\partial^k u}{\partial x_1^{i_1}...\partial x_n^{i_n}},...\right)=0,\ x\in D, \tag{1.1}$$

называется дифференциальным уравнением с частными производными порядка m относительно неизвестной функции $u\equiv u\left(x\right)$, а левая часть F этого равенства, представляющая собой совокупность операций над функцией u, – дифференциальным оператором с частными производными порядка m.

Каждая определенная в области D задания уравнения (1.1) действительная функция $u(x)$, непрерывная вместе со своими частными производными, входящими в это уравнение, и обращающая его в тождество, называется регулярным решением уравнения (1.1).

Наряду с регулярными решениями в теории уравнений с частными производными важную роль играют также элементарные, или фундаментальные, решения.

Когда F представляет собой N-мерный вектор $F=\left(F_1,...,F_N\right)$ с компонентами $F_i\left(x,...,p_{i_1...i_n},...\right)$, $i=1,...,N$, зависящими от $x\in D$ и от M-мерных векторов $p_{i_1...i_n}=\left(p^1_{i_1...i_n},...,p^M_{i_1...i_n}\right)$, векторное равенство (1.1) называется системой дифференциальных уравнений с частными производными относительно неизвестных функций $u_1,...,u_M$ или относительно неизвестного вектора $u=\left(u_1,...,u_M\right)$.

Уравнение (1.1) называется линейным, если F линейно зависит от всех $\frac{\partial^k u}{\partial x_1^{i_1}...\partial x_n^{i_n}}$, $0 \le k \le m$.

Линейное уравнение можно записать в виде

$$Lu = f(x),\ x \in D,$$

где L – дифференциальный оператор первой степени относительно всех $\frac{\partial^k u}{\partial x_1^{i_1}...\partial x_n^{i_n}}$, $0 \le k \le m$. Линейное уравнение называется однородным или неоднородным в зависимости от того, будет ли $f(x) \equiv 0$ или $f(x) \not\equiv 0$.

Уравнение (1.1) называется квазилинейным, если F линейно зависит лишь от $\frac{\partial^m u}{\partial x_1^{i_1}...\partial x_n^{i_n}}$, $\sum_{j=1}^{n} i_j = m$.

Форма порядка m

$$K(\lambda_1,...,\lambda_n) = \sum_{i_1...i_n} \frac{\partial F}{\partial p_{i_1...i_n}} \lambda_1^{i_1}...\lambda_n^{i_n},\ \sum_{j=1}^{n} i_j = m, \tag{1.2}$$

относительно действительных параметров $\lambda_1,...,\lambda_n$ называется характеристической формой, соответствующей уравнению (1.1).

В случае линейного уравнения второго порядка

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + Cu = f, \tag{1.3}$$

характеристическая форма (1.2) является квадратичной:

$$Q(\lambda_1,...,\lambda_n) = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x) \lambda_i \lambda_j.$$

В каждой фиксированной точке $x \in D$ квадратичную форму Q при помощи неособого аффинного преобразования переменных $\lambda_i = \lambda_i(\xi_1,...,\xi_n)$, $i = 1,...,n$, можно привести к каноническому виду

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \xi_i^2, \tag{1.4}$$

где коэффициенты α_i принимают значения 1, –1, 0. Известно, что число отрицательных и нулевых коэффициентов формы Q в (1.4) не зависит от способа приведения этой формы к каноническому виду. На этом факте основана классификация линейных уравнений (1.3).

Говорят, что линейное уравнение (1.3) эллиптическое, гиперболическое или параболическое в области D, если в каждой точке $x \in D$ коэффициенты α_i формы (1.4) соответственно: все отличны от нуля и одного знака, все отличны от нуля и не все одного знака или хотя бы один из них равен нулю (но не все).

Эллиптическое в области D уравнение (1.3) называется равномерно эллиптическим в этой области, если существуют действительные числа $k_0 \neq 0$ и $k_1 \neq 1$ одного знака такие, что

$$k_0 \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \leq Q(\lambda_1, ..., \lambda_n) \leq k_1 \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$$

для всех $x \in D$.

Для линейного уравнения с частными производными порядка m

$$\sum_{i_1 ... i_n} a_{i_1 ... i_n}(x) \frac{\partial^m u}{\partial x_1^{i_1} ... \partial x_n^{i_n}} + L_1 u = f(x), \; \sum_{j=1}^{n} i_j = m, \tag{1.5}$$

где L_1 – линейный дифференциальный оператор порядка ниже m, характеристическая форма (1.2) имеет вид

$$K(\lambda_1, ... \lambda_n) = \sum_{i_1 ... i_n} a_{i_1,,,i_n}(x) \lambda_1^{i_1} ... \lambda_n^{i_n}, \; \sum_{j=1}^{n} i_j = m. \tag{1.6}$$

Если при фиксированном значении $x \in D$ можно найти такое аффинное преобразование $\lambda_i = \lambda_i(\mu_1, ... \mu_n)$, $i = 1, ..., n$, в результате которого полученная из (1.6) форма содержит лишь l $(0 < l < n)$ переменных μ_l, то говорят, что уравнение (1.5) параболически вырождается.

При отсутствии параболического вырождения, если уравнение

$$K(\lambda_1, ..., \lambda_n) = 0 \tag{1.7}$$

не имеет действительных решений, кроме $\lambda_1 = 0$, …, $\lambda_n = 0$, уравнение (1.5) в точке $x \in D$ называется эллиптическим.

Говорят, что уравнение (1.5) в точке $x \in D$ гиперболическое, если в пространстве переменных $\lambda_1, ..., \lambda_n$ существует такая прямая, что если принять ее за координатную ось в новых переменных μ_1, ..., μ_n, полученных аффинным преобразованием λ_1, ..., λ_n, то относительно координаты, меняющейся вдоль этой оси, преобразованное уравнение (1.7) имеет ровно m действительных корней (простых или кратных) при любом выборе остальных переменных.

Аналогично по характеру формы (1.2) классифицируются и нелинейные уравнения порядка m. Однако поскольку коэффициенты формы (1.2) в этом случае зависят не только от точки $x \in D$, но также от искомого решения и его производных, то классификация по типам производится лишь для данного решения.

Когда равенство (1) представляет собой систему N уравнений относительно N неизвестных функций, т. е. когда $M = N$ и порядок каждого уравнения этой системы равен m, с помощью квадратных матриц

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial p^j_{i_1\ldots i_n}}\right), i, j = 1, \ldots, N\,,\ \sum_{k=1}^{n} i_k = m\,,$$

составим форму порядка Nm

$$K\left(\lambda_1, \ldots, \lambda_n\right) = \det \sum_{i_1\ldots i_n} \left(\frac{\partial F_i}{\partial p^j_{i_1\ldots i_n}}\right) \lambda_1^{i_1} \ldots \lambda_n^{i_n}\,,\ \sum_{k=1}^{n} i_k = m\,, \tag{1.8}$$

относительно действительных скалярных параметров $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Деление по типам системы (1.1) происходит по характеру формы (1.8) точно так же, как это было сделано ранее при рассмотрении одного уравнения порядка m.

Общее линейное уравнение с частными производными второго порядка с двумя независимыми переменными можно записать в виде

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cy_{yy} + du_x + eu_y + fu + g = 0\,, \tag{1.9}$$

где a, b, c, d, e, f, g – заданные функции независимых переменных x, y.

Обозначим через Δ дискриминант $b^2 - ac$ соответствующей (1.9) квадратичной формы

$$Q\left(\lambda_1, \lambda_2\right) = a\lambda_1^2 + 2b\lambda_1\lambda_2 + c\lambda_2^2\,. \tag{1.10}$$

Кривые, определяемые уравнением $\Omega(x, y) = \text{const}$, где Ω – решение нелинейного уравнения с частными производными первого порядка

$$a\Omega_x^2 + 2b\Omega_x\Omega_y + c\Omega_y^2 = 0\,,$$

называются характеристиками уравнения (1.9). Компоненты касательного вектора (dy, dx) характеристической кривой в каждой ее точке (x, y) удовлетворяют равенству

$$ady^2 - 2bdydx + cdx^2 = 0\,. \tag{1.11}$$

По данной ранее классификации (1.9) уравнение является эллиптическим, гиперболическим или параболическим в зависимости от того, будет ли форма (1.10) (или (1.11)) определена, знакопеременна или полуопределена (вырождена), т. е. дискриминант $b^2 - ac = \Delta$ будет меньше нуля, больше нуля или равен нулю соответственно.

В эллиптическом случае уравнение (1.9) можно привести к каноническому виду

$$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + d_1 v_\xi + e_1 v_\eta + f_1 v + g_1 = 0 \tag{1.12}$$

в результате замены переменных

$$\xi = \varphi(x, y),\ \eta = \psi(x, y), \tag{1.13}$$

где $\varphi(x, y), \psi(x, y)$ – решения системы линейных уравнений с частными производными первого порядка

$$a\varphi_x + b\varphi_y + \sqrt{-\Delta}\psi_y = 0,\ a\psi_x + b\psi_y - \sqrt{-\Delta}\varphi_y = 0$$

с отличным от нуля якобианом $\dfrac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x, y)}$.

Замена (1.13), когда $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ являются решениями дифференциальных уравнений

$$a\varphi_x + \left(b + \sqrt{\Delta}\right)\varphi_y = 0,\ a\psi_x + \left(b - \sqrt{\Delta}\right)\psi_y = 0,$$

приводит уравнение (1.9) в гиперболическом случае к виду

$$v_{\xi\eta} + d_1 v_\xi + e_1 v_\eta + f_1 v + g_1 = 0. \tag{1.14}$$

Новая замена $\xi = \alpha + \beta$, $\eta = \alpha - \beta$ позволяет привести уравнение (1.14) к каноническому виду

$$\omega_{\alpha\alpha} - \omega_{\beta\beta} + d_2\omega_\alpha + e_2\omega_\beta + d_2\omega + g_2 = 0. \tag{1.15}$$

Наконец, в случае, когда уравнение (1.9) параболично, в результате замены (1.13), где $\varphi(x, y)$ – отличное от постоянной решение уравнения

$$a\varphi_x + b\varphi_y = 0,$$

а $\psi(x, y)$ – произвольная гладкая функция, удовлетворяющая условию

$$a\psi_x^2 + 2b\psi_x\psi_y + c\psi_y^2 \neq 0,$$

получаем

$$v_{\eta\eta} + d_1 v_\xi + e_1 v_\eta + f_1 v + g_1 = 0. \tag{1.16}$$

В уравнениях (1.12), (1.14), (1.16)

$$v(\xi, \eta) = u\left[x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)\right],$$

где $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$ – решения системы (1.13). Разрешимость этой системы гарантирована выполнением условия

$$\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x, y)} \neq 0.$$

Как известно из теории линейных уравнений с частными производными первого порядка, в качестве функций $\varphi(x,y), \psi(x,y)$ в преобразовании (1.13) при $\Delta > 0$ можно брать левые части общих интегралов $\varphi(x,y) = \text{const}$ обыкновенных дифференциальных уравнений, соответственно

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b+\sqrt{\Delta}}, \ \frac{dx}{a} = \frac{dy}{b-\sqrt{\Delta}},$$

а в качестве функции $\varphi(x,y)$ при $\Delta = 0$ – левую часть общего интеграла $\varphi(x,y) = \text{const}$ уравнения

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b}.$$

Что касается случая $\Delta < 0$, то поскольку в записи

$$\varphi(x,y) + i\psi(x,y) = \Omega(x,y)$$

функция Ω является решением уравнения

$$d\Omega_x + \left(b + i\sqrt{-\Delta}\right)\Omega_y = 0,$$

преобразование (1.13) аналогично найдем и на этот раз.

По этой схеме приводится к каноническому виду и квазилинейное уравнение вида

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + F\left(x,y,u,u_x,u_y\right) = 0,$$

коэффициенты a, b, c которого являются заданными функциями лишь независимых переменных x, y.

1.2 Задачи к занятию

Определить тип следующих уравнений.

1 $u_{xx} + 4u_{xy} + u_{yy} + u_x + u_y + 2u - x^2 y = 0$.

2 $2u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + 2u_x + 2u_y - u = 0$.

3 $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + u_x + u_y + 3u - xy^2 = 0$.

4 $4u_{xx} + 2u_{yy} - 6u_{zz} + 6u_{xy} + 10u_{xz} + 4u_{yz} + 2u = 0$.

5 $2u_{xy} - 2u_{xz} + 2u_{yz} + 3u_x - u = 0$.

6 $u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} + 4u_{yz} + 5u_{zz} - xu_x + yu_z = 0$.

7 $u_{xx} - 4u_{xy} + 2u_{xz} + 4u_{yy} + u_{zz} - 2xyu_x + 3xu = 0$.

8 $u_{xy} + u_{yz} + u_{xz} - 2x^2 u_y + y\sin xu + xe^{-y} = 0$.

9 $5u_{xx}+u_{yy}+5u_{zz}+4u_{xy}-8u_{xz}-4u_{yz}-u+yz^2\sin x=0$.

10 $u_{xx}+2u_{xy}+2u_{yy}-2u_{yz}+3u_z-u=0$.

11 $3u_{xx}+4u_{yy}+5u_{zz}+4u_{xy}-4u_{yz}+2u_x-u_y+xye^z=0$.

Привести уравнение для $u=u(x,y)$ к каноническому виду и проделать дальнейшие упрощения.

1 $2u_{xy}-4u_{yy}+u_x-2u_y+u+x=0$.

2 $u_{xx}-2u_{xy}+u_{yy}+9u_x+9u_y-9u=0$.

3 $u_{xx}+4u_{xy}+13u_{yy}+3u_x+24u_y-9u+9(x+y)=0$.

Привести уравнение для $u=u(x,y)$ к каноническому виду.

1 $u_{xx}-2\sin x\cdot u_{xy}+\left(2-\cos^2 x\right)u_{yy}=0$.

2 $u_{xx}-\left(1+y^2\right)^2 u_{yy}-2y\left(1+y^2\right)u_y=0$.

Привести уравнения к каноническому виду в каждой из областей, где сохраняется тип рассматриваемого уравнения.

1 $xu_{xx}+2xu_{xy}+(x-1)u_{yy}=0$.

2 $yu_{xx}+u_{yy}=0$.

3 $xu_{xx}+yu_{yy}+2u_x+2u_y=0$.

2 Дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка. Получение аналитических решений

2.1 Теоретическая часть

1 Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка

$$a_1\frac{\partial u}{\partial x_1}+a_2\frac{\partial u}{\partial x_2}+\ldots+a_m\frac{\partial u}{\partial x_m}=0, \qquad (2.1)$$

где $a_i\left(x_1,x_2,\ldots,x_m\right)$ – некоторые функции независимых переменных $x_1,x_2,\ldots,x_m$;
$u\left(x_1,x_2,\ldots,x_m\right)$ – неизвестная функция.

Для решения уравнения (2.1) составим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_1}{a_1\left(x_1,x_2,\ldots,x_m\right)}=\frac{dx_2}{a_2\left(x_1,x_2,\ldots,x_m\right)}=\ldots=\frac{dx_m}{x_m\left(x_1,x_2,\ldots,x_m\right)}. \qquad (2.2)$$

Общий интеграл системы (2.2) $u_1(x_1,x_2,...,x_m)=C_1$, $u_2(x_1,x_2,...,x_m)=C_2$, …, $u_{m-1}(x_1,x_2,...,x_m)=C_{m-1}$ дает общее решения уравнения (2.1) в следующем виде:

$$u(x_1,x_2,...,x_m)=U\left(u_1(x_1,x_2,...,x_m),u_2(x_1,x_2,...,x_m),...,u_{m-1}(x_1,x_2,...,x_m)\right).$$

2 Неоднородные уравнения.

Рассмотрим неоднородное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка

$$a_1\frac{\partial u}{\partial x_1}+a_2\frac{\partial u}{\partial x_2}+...+a_m\frac{\partial u}{\partial x_m}=b_1+b_2u\,, \tag{2.3}$$

где $a_i(x_1,x_2,...,x_m)$, $b_j(x_1,x_2,...,x_m)$ – некоторые функции независимых переменных $x_1,x_2,...,x_m$, $u(x_1,x_2,...,x_m)$ – неизвестная функция.

Решение уравнения (2.3) будем искать в неявном виде $U\left(x_1,x_2,...x_m,u(x,x_2,...,x_m)\right)=0$. Это решение может быть определено из следующего уравнения:

$$a_1\frac{\partial u}{\partial x_1}+a_2\frac{\partial u}{\partial x_2}+...+a_m\frac{\partial u}{\partial x_m}+\frac{\partial U}{\partial u}(b_1+b_2u)=0. \tag{2.4}$$

Методика решения уравнения (2.4) совпадает с методикой решения (2.1): необходимо решить систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_1}{a_1(x_1,x_2,...,x_m)}=\frac{dx_2}{a_2(x_1,x_2,...,x_m)}=...=\frac{dx_m}{a_m(x_1,x_2,...,x_m)}=$$

$$=\frac{du(x_1,x_2,...,x_m)}{b_1(x_1,x_2,...,x_m)+b_2(x_1,x_2,...,x_m)u(x_1,x_2,...,x_m)}. \tag{2.5}$$

Далее находим характеристики данной системы уравнений и определим решение исходного неоднородного дифференциального уравнения.

3 Нелинейные уравнения.

Рассмотрим нелинейное уравнение в частных производных первого порядка в случае двух независимых переменных

$$U\left(x,y,u(x,y),\frac{\partial u(x,y)}{\partial x},\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right)=0, \tag{2.6}$$

где $u(x,y)$ – искомая функция от x и y, U – заданная непрерывно-дифференцируемая функция своих аргументов, нелинейно зависящая от искомой функции $u(x, y)$ и ее производных $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}$, $\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}$. Часто задача интегрирования одного уравнения является более трудной, чем системы двух совместных уравнений

$$\begin{cases} U_1\left(x, y, u(x,y), \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x}, \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right) = 0, \\ U_2\left(x, y, u(x,y), \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x}, \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right) = 0. \end{cases} \tag{2.7}$$

Пусть систему (2.7) можно разрешить относительно производных $\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y}$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x} = A\big(x, y, u(x,y)\big), \\ \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y} = B\big(x, y, u(x,y)\big), \end{cases} \tag{2.8}$$

где $A\big(x, y, u(x,y)\big)$, $B\big(x, y, u(x,y)\big)$ – непрерывно дифференцируемые функции.

Сформулируем условие совместности системы (2.8):

$$\frac{\partial A\big(x,y,u(x,y)\big)}{\partial y} + \frac{\partial A\big(x,y,u(x,y)\big)}{\partial u} B\big(x,y,u(x,y)\big) =$$

$$= \frac{\partial B\big(x,y,u(x,y)\big)}{\partial x} + \frac{\partial B\big(x,y,u(x,y)\big)}{\partial y} A\big(x,y,u(x,y)\big).$$

2.2 Задачи к занятию

Построить общее решение уравнений $u = u(x,y)$.

1 $yu_x - xu_y = 0$.

2 $xu_x + yu_y = 1$.

3 $yu_x - xu_y = y^2 - x^2$.

4 $\dfrac{1}{\cos x} u_x + u_y = u \operatorname{ctg} y$.

5 $yu_x + xu_y = x^2 + y^2$.

6 $xyu_x + (x-2)u_y = yu$.

7 $\dfrac{1}{x} u_x + \dfrac{1}{y} u_y = \dfrac{u}{y^2}$.

Построить общее решение уравнений $u = u(x,y,z)$.

1 $xu_x + yu_x + zu_z = 0$.

2 $u_x + u_y + u_z = xyz$.

3 $x^2 u_x + y^2 u_y + z^2 u_z = u$.

4 $u_x + 2u_y + u_x = xyz$.

Найти решения $u=u(x,y)$ уравнений, удовлетворяющие указанным условиям.

1 $xu_x+yu_y=1$, $u(x,1)=x$.

2 $yu_x-xu_y=y^2-x^2$, $u(0,y)=\dfrac{1}{y^2}$.

3 $xu_x+yu_x=2xy$, $u(x,x)=x^2$.

4 $xu\dfrac{\partial u}{\partial x}+yu\dfrac{\partial u}{\partial y}+xy=0$, $u\big|_{xy=1}=1$.

5 $yu_x-xu_y=y^2-x^2$, $u\big|_{xy=1}=\dfrac{y^2}{1+y^4}$.

Найти решения $u=u(x,y,z)$ уравнений, удовлетворяющие указанным условиям.

1 $xu_x+yu_y+zu_z=0$, $u(1,y,z)=y^2+z^2$.

2 $u_x+u_y+u_z=xyz$, $u(0,1,z)=y-z$.

3 $u_x+u_y+2u_x=0$, $u(x,1,z)=xz$.

4 $xu_x+2yu_y+3zu_z=4u$, $u(x,x,z)=z$.

3 Задача Коши для волнового уравнения

3.1 Теоретическая часть

Волновым уравнением называется уравнение вида

$$u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x,t). \tag{3.1}$$

Рассмотрим однородное волновое уравнение

$$u_{tt}-a^2u_{xx}=0. \tag{3.2}$$

С помощью замены переменных

$$\begin{cases}\xi=x+at,\\ \eta=x-at\end{cases}$$

уравнение (3.2) преобразуется к уравнению вида

$$v_{\xi\eta}=0. \tag{3.3}$$

Общее решение уравнения (3.3) имеет вид

$$v(\xi,\eta) = f(\xi) + g(\eta).$$

Выполнив обратное преобразование по координатам, получаем общее решение исходного волнового уравнения

$$u(x,t) = f(x-at) + g(x+at).$$

Физический смысл слагаемых в решении однородного волнового уравнения – прямая и обратная волна в распространении волнового процесса.

Задача Коши для волнового уравнения: найти решение уравнения (3.2) в области $-\infty < x < \infty$, $t > 0$, удовлетворяющее в начальный момент времени $t = 0$ условиям

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), -\infty < x < \infty; \tag{3.4}$$

$$u_t\big|_{t=0} = \psi(x), -\infty < x < \infty. \tag{3.5}$$

Здесь $\varphi(x), \psi(x)$ – заданные функции. Эту задачу называют начальной задачей, условия (3.4), (3.5) – начальными условиями (или условиями Коши), а функции $\varphi(x), \psi(x)$ – начальными данными.

Классическим решением задачи (3.2), (3.4), (3.5) называется функция $u(x,t)$, дважды непрерывно дифференцируемая по переменным x и t в области $-\infty < x < \infty$, $t > 0$, и один раз дифференцируемая в области $-\infty < x < \infty$, $t \geq 0$, удовлетворяющая уравнению (3.2) и начальным условиям (3.4), (3.5).

Общее решение указанной задачи определяется формулой Даламбера для однородного уравнения

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\varphi(x-at) + \varphi(x+at)\right) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\, d\xi. \tag{3.6}$$

В случае, если необходимо найти решение задачи Коши для неоднородного волнового уравнения

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t),\ t > 0,\ -\infty < x < +\infty,$$
$$u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x),\ -\infty < x < \infty,$$

то это можно сделать с помощью формулы Даламбера для неоднородного уравнения

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\left(\varphi(x-at) + \varphi(x+at)\right) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\, d\xi + \frac{1}{2a}\int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(z,\tau)\, dz\, d\tau. \tag{3.7}$$

3.2 Задачи к занятию

Решить задачи Коши.

1 $u_{tt} = 4u_{xx}$, $t > 0$, $-\infty < x < \infty$,

$u(x,0) = e^{-x^2}$, $u_t(x,0) = 4xe^{-x^2}$, $-\infty < x < \infty$.

2 $u_{tt} = u_{xx} + x$, $t > 0$, $-\infty < x < \infty$,

$u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 0$, $-\infty < x < \infty$.

3 $u_{tt} = 25u_{xx} + e^{-t}$, $t > 0$, $-\infty < x < \infty$,

$u(x,0) = x$, $u_t(x,0) = 0$, $-\infty < x < \infty$.

Решить задачу Коши и выполнить проверку.

1 $u_{tt} = 2u_{xx}$, $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 3x$.

2 $u_{tt} = 49u_{xx}$, $u(x,0) = \sin 3x$, $u_t(x,0) = 7\cos 3x$.

3 $u_{tt} = u_{xx} - 6xt$, $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = x^3$.

4 $u_{tt} = u_{xx} + x$, $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 0$.

Найти общее решения для каждого из следующих уравнений.

1 $2u_{xx} - 5u_{xy} + 3u_{yy} = 0$.

2 $2u_{xx} + 6u_{xy} + 4u_{yy} + u_x + u_y = 0$.

Решить задачи.

1 $u_{tt} - a^2u_{xx} = \sin\omega t$, $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 0$.

2 $u_{tt} - a^2u_{xx} = \sin\omega x$, $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 0$.

4 Краевые задачи для полуограниченной струны

4.1 Теоретическая часть

Волновое уравнение предполагало свободное распространение волны вдоль одной из осей. Предположим, что один из концов струны зафиксирован, т. е. происходит физический процесс колебаний полуограниченной струны. Начально-краевая задача такого процесса имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ t > 0,\ x > 0; \tag{4.1}$$

$$u(0,t) = \mu(t),\ t \ge 0; \tag{4.2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x),\ x \ge 0. \tag{4.3}$$

Здесь функция $\mu(t)$ описывает закон движения конца струны. Решение задачи (4.1) имеет вид

$$u(x,t)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi, & x\ge at,\\ \mu\left(t-\dfrac{x}{a}\right)+\dfrac{\varphi(at+x)-\varphi(at-x)}{2}+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi, & x\le at.\end{cases}$$

4.3 Задачи к занятию

Найти уравнения колебаний полубесконечной струны.

1 $u_{tt}=4u_{xx}$, $u(0,t)=0$, $u(x,0)=x$, $u_t(x,0)=1$, $t>0$, $x\ge 0$.

2 $u_{tt}=4u_{xx}$, $u(0,t)=0$, $u(x,0)=x^2$, $u_t(x,0)=x-1$, $t>0$, $x\ge 0$.

3 $u_{tt}=4u_{xx}$, $u(0,t)=2t$, $u(x,0)=x$, $u_t(x,0)=1$, $t>0$, $x\ge 0$.

4 $u_{tt}=4u_{xx}$, $u(0,t)=t-1$, $u(x,0)=\sin x$, $u_t(x,0)=x$, $t>0$, $x\ge 0$.

5 $u_{tt}=9u_{xx}$, $u(0,t)=1-t$, $u(x,0)=x^2$, $u_t(x,0)=x+1$, $t>0$, $x\ge 0$.

5 Задача Штурма – Лиувилля. Краевые задачи на отрезке

5.1 Теоретические сведения

Задача малых колебаний ненагруженной струны имеет вид

$$\begin{cases}u_{tt}=a^2u_{xx}, x\in(0,l),\\ u(0,t)=u(l,t)=0\end{cases}$$

при условиях

$$\begin{cases}u(x,0)=\varphi(x), x\in[0,l],\\ u_t(x,0)=\psi(x), x\in[0,l].\end{cases}$$

Будем искать $u(x,t)$ в виде

$$u(x,t)=T(t)X(x).$$

Такая подстановка приведет исходную задачу к задаче вида

$$\begin{cases}X''(x)+\lambda X(x)=0, x\in(0,l),\\ X(0)=X(l)=0.\end{cases}$$

Эта система имеет тривиальное решение при любых значениях параметра, интерес представляет нахождение таких значений параметра, при которых задача имеет нетривиальные решения. Такая задача называется задачей Шутрма – Лиувилля.

При $\lambda < 0$ $X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$ и это решение может удовлетворять краевому условию только при $C_1 = C_2 = 0$.

При $\lambda = 0$ $X(x) = C_1 x + C_2$, выполнение краевого условия возможно только при $C_1 = C_2 = 0$.

При $\lambda > 0$ $X(x) = C_1 \cos\left(\sqrt{\lambda}x\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\lambda}x\right)$, удовлетворяющие краевым условиям решения будут иметь вид $X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)$. Тогда вид решения исходной краевой задачи

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(t).$$

Здесь компоненты $T_n(t)$ имеют вид

$$T_n(t) = \varphi_n \cos\left(\frac{\pi n a}{l} t\right) + \frac{l}{\pi n a} \psi_n \sin\left(\frac{\pi n a}{l} t\right),$$

где

$$\varphi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) dx,$$

$$\psi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) dx.$$

Тогда окончательный вид решения

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \cos\left(\frac{\pi n a}{l} t\right) \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l}{\pi n a} \psi_n \sin\left(\frac{\pi n a}{l} t\right) \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right).$$

5.3 Задачи к занятию

1 Найти закон колебания струны длиной *l*, расположенной на отрезке [0, *l*], если в начальный момент струне придана форма кривой $u(x,0) = \frac{x(l-x)}{8l}$, а затем струна отпущена без начальной скорости. Струна закреплена на концах, внешние силы отсутствуют.

2 Найти закон колебания струны длиной *l*, если в начальный момент

времени $t = 0$ всем точкам струны сообщена скорость $v = \frac{a}{10}$ (где a – постоянная, фигурирующая в уравнении колебаний струны). Начальное отклонение отсутствует. Концы струны закреплены. Внешние силы отсутствуют.

3 В полуполосе $0 < x < l$, $t > 0$ для уравнения $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ решить смешанную задачу со следующими условиями:

а) граничные условия $u_x(0,l) = 0$, $u(l,t) = 0$;

б) начальные условия $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = \sin\frac{2\pi x}{l}$.

4 Решить задачу $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, $0 < x < l$, $t > 0$, $u(x,0) = 9\sin\frac{\pi x}{l}$, $u_t(x,0) = 0$, $u(0,t) = 0$, $u(l,t) = 0$.

6 Задача Коши для уравнения теплопроводности

6.1 Теоретические сведения

Уравнение вида

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t) \tag{6.1}$$

называют уравнением теплопроводности. В случае, если $f(x,t) \equiv 0$, говорят, что уравнение (6.1) однородное, в противном случае, что это уравнение неоднородное.

Рассмотрим задачу Коши для однородного уравнения теплопроводности с заданным начальным условием

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \ -\infty < x < \infty, t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), -\infty < x < \infty. \end{cases} \tag{6.2}$$

Уравнение теплопроводности принадлежит к параболическому типу и записано в каноническом виде. Решение задачи (6.2) описывается формулой Пуассона для однородного уравнения теплопроводности

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{4a^2 t}(x-\xi)^2} \varphi(\xi)\, d\xi. \tag{6.3}$$

Рассмотрим неоднородное уравнение теплопроводности с начальным условием

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), \ -\infty < x < \infty, t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), -\infty < x < \infty. \end{cases} \tag{6.4}$$

Решение задачи (6.4) будем искать методом редукции, состоящим в разбиении исходной задачи на две более простые:

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t), \tag{6.5}$$

где $v(x,t)$ – решение задачи Коши для соответствующего однородного уравнения теплопроводности с заданным начальным условием:

$$v_t = a^2 v_{xx},\ v(x,0) = \varphi(x); \tag{6.6}$$

$w(x,t)$ – решение задачи Коши для заданного неоднородного уравнения с нулевым начальным условием:

$$w_t = a^2 w_{xx} + f(x,t),\ w(x,0) = 0. \tag{6.7}$$

Для решения задачи (6.6) воспользуемся принципом Дюамеля:

$$w(x,t) = \int_0^t g(x,t,\tau)\,d\tau,$$

где

$$\begin{cases} g_t = a^2 g_{xx},\ -\infty < x < +\infty, t > \tau, \\ g(x,\tau;\tau) = f(x,\tau). \end{cases} \tag{6.8}$$

Задача (6.8) имеет решение

$$g(x,t,\tau) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} f(\xi,\tau)\,d\xi.$$

Тогда окончательно

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \varphi(\xi)\,d\xi + \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} f(\xi,\tau)\,d\xi d\tau. \tag{6.9}$$

Формула (6.9) называется формулой Пуассона для неоднородного уравнения теплопроводности.

6.2 Задачи к занятию

Решить задачи.

1 $u_t = 4u_{xx} + t + e^t,\ u(x,0) = 2.$

2 $u_t = u_{xx} + \sin t,\ u(x,0) = 0.$

3 $u_t = u_{xx} + \sin t,\ u(x,0) = 2$.

4 $u_t = u_{xx} - \cos t,\ u(x,0) = 1$.

7 Краевые задачи для полуограниченного стержня

7.1 Теоретические сведения

Предполагается, что конец стержня $x = 0$ поддерживается при заданной температуре, которая может изменяться с течением времени. Задача имеет вид

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \\ u(x,0) = u_0(x),\ x > 0, \\ u(0,t) = \mu(t). \end{cases} \tag{7.1}$$

Решение задачи (7.1) будем искать в виде суммы решений задач

$$\begin{cases} v_t = a^2 v_{xx}, \\ v(x,0) = u_0(x), \\ v(0,t) = 0; \end{cases} \tag{7.2}$$

$$\begin{cases} w_t = a^2 w_{xx}, \\ w(x,0) = 0, \\ w(0,t) = \mu(t). \end{cases} \tag{7.3}$$

Решение задачи (7.2) получим из решения, найденного для неограниченного стержня, продолжая функцию $u_0(x)$ нечетным образом в промежуток $(-\infty, 0)$.

Решение задачи (7.3) ищем в виде

$$w(x,t) = -\int_0^t \mu(\tau) \frac{\partial w_\tau}{\partial \tau} d\tau,$$

где

$$w_\tau(x,t) = \begin{cases} 0,\ t < \tau, \\ 1 - \theta\left(\dfrac{x}{2a\sqrt{t-\tau}}\right), t \ge \tau, \end{cases}$$

$$\theta(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-y^2} dy.$$

$$w(x,t)=\frac{x}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{\mu(\tau)}{t-\tau}e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}d\tau .$$

Тогда решение исходной задачи имеет вид

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_0^{+\infty}u_0(\xi)\left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}\right)\xi+d\,\frac{x}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{\mu(\tau)}{t-\tau}e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}d\tau .$$

7.2 Задачи к занятию

Решить задачи.

1 $u_t=4u_{xx}+t+e^t,\ u(x,0)=2,\ u(0,t)=0\ \ x>0$.

2 $u_t=u_{xx}+\sin t,\ u(x,0)=0,\ u(0,t)=t\ \ x>0$.

3 $u_t=u_{xx}+\sin t,\ u(x,0)=2,\ u(0,t)=t^2,\ x>0$.

4 $u_t=u_{xx}-\cos t,\ u(x,0)=1,\ u(0,t)=t,\ x>0$.

8 Краевые задачи на отрезке

8.1 Теоретические сведения

Будем рассматривать краевую задачу для уравнения теплопроводности на отрезке с граничным условием $u(0,t)=\mu(t)$. Это условие определяет закон изменения температуры на левом конце стержня. Задача имеет вид

$$\begin{cases}u_t=a^2u_{xx},\ 0<x<l,t>0,\\ u(x,0)=\varphi(x),0<x<l,\\ u(0,t)=0,u(l,t)=0,t>0.\end{cases}\qquad(8.1)$$

Применим метод разделения переменных – метод Фурье, представим решения в виде произведения $u(x,t)=X(x)\cdot T(t)\neq 0$.

Применив известную методику, получим формулу, дающую общее решение задачи (8.1).

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(\xi)\sin\frac{\pi n\xi}{l}d\xi\right)e^{-\left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2}\sin\frac{\pi nx}{l}.\qquad(8.2)$$

8.2 Задачи к занятию

Решить задачи.

1 $u_t = 25u_{xx}$, $u(x,0) = \dfrac{1}{20}, x \in (1,2)$, $u(0,t) = u(4,t) = 0$.

2 $u_t = 25u_{xx}$, $u(x,0) = \dfrac{1}{2}x, x \in (1,2)$, $u(0,t) = u(4,t) = 0$.

3 $u_t = 25u_{xx}$, $u(x,0) = \dfrac{x^2}{20}, x \in (1,2)$, $u(0,t) = u(4,t) = 0$.

9 Гармонические функции

9.1 Теоретические сведения

Уравнением Лапласа в трехмерном случае называется уравнение вида

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \qquad (9.1)$$

Данное уравнение можно записать в двумерном случае, а также с помощью преобразования координат в полярных или сферических координатах.

Функция $u = u(x, y, z)$, непрерывная со своими частными производными второго порядка включительно в некоторой области *D* и удовлетворяющая там уравнению (9.1), называется гармонической функцией.

Свойства гармонических функций.

1 Если $u = u(x, y, z)$ – гармоническая функция в области *D*, тогда

$$\int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0,$$

здесь ∂D – граница области *D*, *n* – нормаль к границе области ∂D.

2 Гармоническая в области *D* функция $u = u(x, y, z)$ имеет в этой области непрерывные производные всех порядков.

3 Если $u = u(x, y, z)$ – гармоническая функция в некотором шаре *D*, то значение функции в центре шара равно среднему арифметическому значению по сфере, ограничивающей этот шар:

$$u(\xi) = \frac{1}{R}\int_S u(\tau)\,dS.$$

4 Гармоническая в конечной области *D* функция $u = u(x, y, z)$, не равная тождественно константе, не может принимать в этой области максимального и

минимального значений, но принимает их на границе этой области.

Гармоническая функция не может иметь внутри области локальных экстремумов.

9.3 Задачи к занятию

Найти выражение оператора Лапласа.

1 В криволинейных координатах $x = \varphi(\xi, \eta)$, $y = \psi(\xi, \eta)$.

2 В полярных координатах $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

3 В цилиндрических координатах $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$.

4 В сферических координатах $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$.

Найти значение постоянной *k*, для которой указанные функции являются гармоническими.

1 $x_1^3 + kx_1x_2^2$.

2 $x_1^2 + x_2^2 + kx_3^2$.

3 $e^{2x_1}\operatorname{ch} kx_2$.

4 $\sin 3x_1 \operatorname{ch} kx_2$.

10 Краевые задачи для уравнения Лапласа

10.1 Теоретические сведения

Пусть *D* – открытая область в $\mathbb{R}^2$, Γ – граница области *D*. Необходимо найти решение уравнения Лапласа

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{10.1}$$

удовлетворяющее условию

$$u\big|_\Gamma = \varphi. \tag{10.2}$$

1 Пусть *D* – круг радиусом *R*. В полярной системе координат задача (10.1), (10.2) имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} = 0; \tag{10.3}$$

$$u\big|_{\rho=R} = \varphi(\theta). \tag{10.4}$$

Решение задачи (10.3), (10.4) имеет вид

$$u(\rho,\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{R}\right)^n\left(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta\right),$$

где

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi(\theta)\cos n\theta d\theta,\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\theta)\sin n\theta d\theta,\ n=0,1,2,\dots .$$

2 Пусть $D=\left\{(x,y):r<x^2+y^2<R\right\}$ – кольцо. В полярной системе координат задача (10.1), (10.2) имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=0; \tag{10.5}$$

$$u\big|_{\rho=r}=\varphi_r(\theta),\ u\big|_{\rho=R}=\varphi_R(\theta). \tag{10.6}$$

Структура решения задачи (10.5), (10.6) имеет вид

$$u(\rho,\theta)=A_0\ln\rho+B_0+\sum_{n=1}^{\infty}\rho^n\left(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\rho^{-n}\left(C_n\cos n\theta+D_n\sin n\theta\right).$$

Коэффициенты A_n, B_n, C_n, D_n определяются из краевых условий.

3 Пусть требуется найти решение уравнения (10.1) в области D, где D – прямоугольник $(0,l_1)\times(0,l_2)$ и на границах этого прямоугольника выполняются краевые условия

$$u(0,y)=\psi_0(y),u(l_1,y)=\psi_1(y),\ y\in(0,l_2),$$

$$u(x,0)=\varphi_0(x),u(x,l_2)=\varphi_1(x),\ x\in(0,l_1),$$

при этом

$$\psi_0(0)=\psi_0(l_2)=\psi_1(0)=\psi_1(l_2)=0,$$

$$\varphi_0(0)=\varphi_0(l_1)=\varphi_1(0)=\varphi_1(l_1)=0.$$

Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в прямоугольнике будем искать в виде

$$u(x,y)=v(x,y)+w(x,y),$$

где $v(x,y)$ – решение задачи

$$\begin{cases} \Delta v = 0, \\ v(0,y) = v(l_1,y) = 0, \;\; y \in (0,l_2), \\ v(x,0) = \varphi_0(x), \, x \in (0,l_1), \\ v(x,l_2) = \varphi_1(x), \, x \in (0,l_1), \end{cases} \tag{10.7}$$

а $w(x,y)$ – решение задачи

$$\begin{cases} \Delta w = 0, \\ w(0,y) = \psi_0(y), \;\; y \in (0,l_2), \\ v(l_1,y) = \psi_1(y), y \in (0,l_2), \\ v(x,0) = v(x,l_2) = 0, \, x \in (0,l_1). \end{cases} \tag{10.8}$$

Решения задач (10.7), (10.8) отыскиваются методом разделения переменных и имеют вид

$$v(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \operatorname{sh} \frac{\pi n y}{l_1} + B_n \operatorname{ch} \frac{\pi n y}{l_1} \right) \sin \frac{\pi n x}{l_1},$$

$$w(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n \operatorname{sh} \frac{\pi n x}{l_2} + D_n \operatorname{ch} \frac{\pi n x}{l_2} \right) \sin \frac{\pi n y}{l_2},$$

где

$$A_n = \frac{2}{l_1 \operatorname{sh} \dfrac{\pi n l_2}{l_1}} \int_0^{l_1} \varphi_1(x) \sin \frac{\pi n x}{l_1} dx - B_n \operatorname{cth} \frac{\pi n l_2}{l_1},$$

$$B_n = \frac{2}{l_1} \int_0^{l_1} \varphi_0(x) \sin \frac{\pi n x}{l_1} dx,$$

$$c_n = \frac{2}{l_2 \operatorname{sh} \dfrac{\pi n l_1}{l_2}} \int_0^{l_2} \psi_1(y) \sin \frac{\pi n y}{l_2} dy - D_n \operatorname{cth} \frac{\pi n l_1}{l_2},$$

$$D_n = \frac{2}{l_2} \int_0^{l_2} \psi_0(y) \sin \frac{\pi n y}{l_2} dy.$$

10.2 Задачи к занятию

В круге $x^2 + y^2 < R^2$ решить задачу Дирихле

$$\Delta u(x, y) = 0, 0 \le r < R,$$

$$u(x, y) = g(x, y), r = R,$$

если имеем следующее.

1 $g(x, y) = x + xy$.

2 $g(x, y) = 4y^3$.

3 $g(x, y) = 4xy^2$.

4 $g(x, y) = 2(x^2 + y)$.

5 $g(x, y) = x^2 - 2y^2$.

Список литературы

1 **Торшина**, **О. А.** Уравнения математической физики: учебное пособие / О. А. Торшина. – Москва: ИНФРА-М, 2020. – 59 с.

2 **Титов, К. В.** Уравнения математической физики. Практикум. Компьютерные технологии решения задач: учебное пособие / К. В. Титов. – Москва: ИНФРА-М, 2019. – 262 с.

3 **Лесин**, **В. В.** Уравнения математической физики: учебное пособие / В. В. Лесин. – Москва: ИНФРА-М, 2017. – 240 с.