

УДК 621.833

С. Н. Хатетовский, канд. техн. наук, доц.

## ОБЕСПЕЧЕНИЕ НЕЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ЗАЦЕПЛЕНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ К ИЗМЕНЕНИЮ ИХ ОТНОСИТЕЛЬНОГО ПОЛОЖЕНИЯ

В статье указывается на актуальность проблемы улучшения качественных показателей зацепления и обеспечения нечувствительности к изменению относительного положения колес. Рассматривается решение второй части данной проблемы. Получены уравнения поверхностей, зацепление которых может быть нечувствительно к изменению их относительного положения.

Одним из преимуществ эвольвентной передачи перед другими видами зубчатых передач является нечувствительность к изменению относительного положения колес в определенных пределах. Здесь под нечувствительностью подразумевается прежде всего сохранение передаточного отношения. Однако эвольвентная передача имеет ряд недостатков, например, относительно низкие коэффициент перекрытия и нагрузочную способность. Таким образом, можно констатировать существование актуальной проблемы создания зубчатых передач с улучшенными по сравнению с эвольвентной передачей характеристиками, которые одновременно были бы нечувствительны к любому изменению относительного положения колес.

Передаточное отношение зубчатой передачи обеспечивается геометрическими свойствами рабочих поверхностей зубьев колес. Поэтому решение поставленной проблемы сводится к поиску таких поверхностей, любое изменение относительного положения которых не нарушало бы передаточного отношения.

Основные принципы решения проблемы основаны на уравнении зацепления

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{v}_{12} = 0, \quad (1)$$

где  $\vec{n}_1$  – нормаль к первой поверхности, восстановленная в точке контакта со второй поверхностью;  $\vec{v}_{12}$  – относительная скорость точки контакта,

$$\vec{v}_{12} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2, \quad (2)$$

где  $\vec{v}_1$  – абсолютная скорость точки контакта, лежащей на первой поверхности;  $\vec{v}_2$  – абсолютная скорость точки контакта, лежащей на второй поверхности.

Уравнение зацепления перепишем следующим образом:

$$\vec{n}_1 \cdot (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = 0. \quad (3)$$

Выразим скорости  $\vec{v}_1$  и  $\vec{v}_2$ , входящие в уравнение зацепления:

$$\vec{v}_1 = \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1; \quad (4)$$

$$\vec{v}_2 = \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2, \quad (5)$$

где  $\vec{\omega}_1$  и  $\vec{\omega}_2$  – угловые скорости первой и второй поверхностей соответственно;  $\vec{r}_1$  и  $\vec{r}_2$  – радиус-векторы точки контакта, проведенные из точек, принадлежащих соответствующим осям вращений поверхностей.

Уравнение (3) запишем в следующей форме:

$$\vec{n}_1 \cdot (\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1 - \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2) = 0. \quad (6)$$

Проведя преобразования:

$$[\vec{\omega}_1, \vec{r}_1, \vec{n}_1] = [\vec{\omega}_2, \vec{r}_2, \vec{n}_1]; \quad (7)$$

$$[\vec{r}_1, \vec{n}_1, \vec{\omega}_1] = [\vec{r}_2, \vec{n}_1, \vec{\omega}_2], \quad (8)$$

введем величину момента общей нормали относительно оси вращения для первой и второй поверхностей соответственно:

$$M_1 = [\vec{r}_1, \vec{n}_1, \vec{k}_1]; \quad (9)$$

$$M_2 = [\vec{r}_2, \vec{n}_1, \vec{k}_2], \quad (10)$$

где  $\vec{k}_1$  – единичный вектор оси вращения первой поверхности;  $\vec{k}_2$  – единичный вектор оси вращения второй поверхности.

С учетом введенных величин уравнение (8) запишем следующим образом:

$$\frac{M_2}{M_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = u_{12}, \quad (11)$$

где  $\omega_1$  и  $\omega_2$  – алгебраические величины соответствующих угловых скоростей;  $u_{12}$  – передаточное отношение.

Уравнение (11) позволяет получить функцию зависимости передаточного отношения от геометрических параметров контактирующих поверхностей. При этом из уравнения (11) следует, что передаточное отношение будет постоянной величиной, если отношение момента общей нормали относительно оси вращения одной поверхности к моменту общей нормали относительно оси вращения другой поверхности во всех точках контакта будет постоянно.

Уравнение (11) представим в следующем виде:

$$\frac{M_{02} \cdot |\vec{n}_1|}{M_{01} \cdot |\vec{n}_1|} = u_{12}; \quad (12)$$

$$\frac{M_{02}}{M_{01}} = u_{12}, \quad (13)$$

где  $M_{01}$  – момент общей единичной нормали относительно оси вращения первой поверхности;  $M_{02}$  – момент общей единичной нормали относительно оси вращения второй поверхности.

Если, например, первую поверхность рассматривать изолированно от второй поверхности, то  $M_{01}$  можно интерпретировать как момент единичной нормали к первой поверхности относительно оси ее вращения.

Из (13) следует, что для обеспечения независимости передаточного отношения от относительного положения

поверхностей достаточно, чтобы эти поверхности обладали следующими свойствами:

1) момент единичной нормали к поверхности относительно оси вращения во всех точках этой поверхности должен иметь одно и то же значение (внутреннее свойство поверхности);

2) во всех возможных относительных положениях поверхностей в заданном диапазоне должна быть определена общая нормаль к контактирующим поверхностям.

Последнее условие необходимо, в частности, для недопущения кромоного контакта.

Математическая сторона проблемы определяется способами решения следующего уравнения:

$$[\vec{r}, \vec{n}_0, \vec{k}] = M, \quad (14)$$

где  $\vec{r}$  – это радиус-вектор точки поверхности, проведенный из фиксированного центра, лежащего на оси вращения;  $\vec{n}_0$  – единичная нормаль к поверхности;  $\vec{k}$  – единичный вектор оси вращения поверхности,  $M$  – не равная нулю конечная константа.

Это уравнение, как будет показано далее, является дифференциальным.

В декартовой системе координат  $Oxyz$ , ось  $Oz$  которой представляет собой ось вращения, вектор  $\vec{r}$  зададим следующим образом:

$$\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}, \quad (15)$$

где  $\vec{i}$  и  $\vec{j}$  – орты осей  $Ox$  и  $Oy$  соответственно.

Представим, что искомая поверхность описывается уравнением

$$y = y(x, z) \quad (16)$$

и найдем нормаль к этой поверхности:

$$\vec{n} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \vec{i} - \vec{j} + \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \vec{k}. \quad (17)$$

С учетом обозначений

$$p = \frac{\partial y}{\partial x}; \quad (18)$$

$$q = \frac{\partial y}{\partial z} \quad (19)$$

единичную нормаль к поверхности выразим следующим образом:

$$\vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \cdot (p \cdot \vec{i} - \vec{j} + q \cdot \vec{k}). \quad (20)$$

Упомянутому ранее дифференциальному уравнению придадим следующую форму:

$$\frac{-x - y \cdot p}{\sqrt{1+p^2+q^2}} - M = 0. \quad (21)$$

В [1] показано, что дифференциальные уравнения типа

$$F(x, z, y, p, q) = 0, \quad (22)$$

к которым относится также и полученное дифференциальное уравнение, в общем случае имеют бесконечное множество решений. Решения данного уравнения – это уравнения различных поверхностей, причем на каждой поверхности можно провести особые кривые, называемые характеристиками [1]. Характеристика описывается параметрическими уравнениями:

$$X = X(s); \quad (23)$$

$$Y = Y(s); \quad (24)$$

$$Z = Z(s), \quad (25)$$

которые удовлетворяют характеристическим уравнениям [1]:

$$\frac{dP}{ds} = -\frac{\partial F}{\partial X} - P \cdot \frac{\partial F}{\partial Y}; \quad (26)$$

$$\frac{dQ}{ds} = -\frac{\partial F}{\partial Z} - Q \cdot \frac{\partial F}{\partial Y}; \quad (27)$$

$$\frac{dZ}{ds} = \frac{\partial F}{\partial Q}; \quad (28)$$

$$\frac{dY}{ds} = P \cdot \frac{\partial F}{\partial P} + Q \cdot \frac{\partial F}{\partial Q}; \quad (29)$$

$$\frac{dX}{ds} = \frac{\partial F}{\partial P}, \quad (30)$$

где

$$P = P(s); \quad (31)$$

$$Q = Q(s), \quad (32)$$

а дифференцирование функции  $F$  производится после подстановки вместо  $x, z, y, p, q$  следующих функций (соответственно):  $X, Z, Y, P, Q$ . Уравнения (23)...(25), а также (31) и (32) описывают так называемые характеристические полосы [1], соответствующие искомой поверхности.

Для упрощения решения примем

$$F = -x - y \cdot p - M \cdot \sqrt{1+p^2+q^2}, \quad (33)$$

что приводит к появлению лишних корней, т. к.  $F$  определяется с точностью до некоторой постоянной величины [1]. Далее будет показано, как можно избавиться от лишних корней.

Принимая во внимание вид функции  $F$ , получим следующую систему характеристических уравнений:

$$\frac{dP}{ds} = 1 + P^2; \quad (34)$$

$$\frac{dQ}{ds} = Q \cdot P; \quad (35)$$

$$\frac{dZ}{ds} = -\frac{M \cdot Q}{\sqrt{1+P^2+Q^2}}; \quad (36)$$

$$\frac{dY}{ds} = P \cdot \left(-Y - \frac{M \cdot P}{\sqrt{1+P^2+Q^2}}\right) - \frac{M \cdot Q^2}{\sqrt{1+P^2+Q^2}}; \quad (37)$$

$$\frac{dX}{ds} = -Y - \frac{M \cdot P}{\sqrt{1+P^2+Q^2}}. \quad (38)$$

Решение данной системы дает:

$$P = \operatorname{tg}(s + C_1); \quad (39)$$

$$Q = \frac{C_2}{\cos(s + C_1)}; \quad (40)$$

$$Z = -\frac{M^* \cdot C_2}{\sqrt{1+C_2^2}} \cdot (s+C_1) + C_3; \quad (41)$$

$$Y = -\frac{M^*}{\sqrt{1+C_2^2}} \cdot ((1+C_2^2) \cdot \sin(s+C_1) - (s+C_1) \cdot \cos(s+C_1)) + C_4 \cdot \cos(s+C_1); \quad (42)$$

$$X = -\frac{M^*}{\sqrt{1+C_2^2}} \cdot ((1+C_2^2) \cdot \cos(s+C_1) + (s+C_1) \cdot \sin(s+C_1)) - C_4 \cdot \sin(s+C_1) + C_5; \quad (43)$$

где  $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5$  – постоянные интегрирования.

$$M^* = M \cdot \operatorname{sgn}(\cos(s+C_1)). \quad (44)$$

Упростим систему уравнений (39)...(43), допустив, что

$$M^* = M. \quad (45)$$

Корректность этого допущения проверим путем подстановки (39)...(43) (с учетом (45)) в дифференциальное уравнение (21). В результате данной подстановки получим, что

$$\frac{-X - Y \cdot P}{\sqrt{1+P^2+Q^2}} = \pm M. \quad (46)$$

Таким образом, с учетом (45) уравнения (39)...(43) описывают характеристические полосы, принадлежащие искомой поверхности, причем момент единичной нормали к этой поверхности относительно оси ее вращения постоянен по модулю.

Уравнения (39)...(43) не являются уравнениями искомой поверхности, т. к. в них входит лишь один независимый параметр –  $s$ . Для получения уравнения поверхности решим задачу Коши способом, предложенным в [1]. В соответствии с данным способом полагаем, что величины  $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5$  являются инвариантными лишь по отношению к параметру  $s$ , но зависят при этом от некоторого второго, независящего от  $s$ , параметра  $t$ , т. е.

$$C_1 = C_1(t); \quad (47)$$

$$C_2 = C_2(t); \quad (48)$$

$$C_3 = C_3(t); \quad (49)$$

$$C_4 = C_4(t); \quad (50)$$

$$C_5 = C_5(t). \quad (51)$$

При этом уравнения искомой поверхности будут иметь вид:

$$x = x(s, C_1(t), C_2(t), C_4(t), C_5(t)); \quad (52)$$

$$y = \eta(s, C_1(t), C_2(t), C_4(t)); \quad (53)$$

$$z = z(s, C_1(t), C_2(t), C_3(t)). \quad (54)$$

Величины  $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5$  зависят от функций:

$$X_0 = X_0(t); \quad (55)$$

$$Y_0 = Y_0(t); \quad (56)$$

$$Z_0 = Z_0(t); \quad (57)$$

$$P_0 = P_0(t); \quad (58)$$

$$Q_0 = Q_0(t), \quad (59)$$

задающих начальные, т. е. определяемые при  $s = 0$ , значения величин  $x, z, y, p, q$  соответственно.

В [1] показывается, что функции  $X_0, Y_0, Z_0, P_0$  и  $Q_0$  должны удовлетворять так называемому условию полосы

$$\frac{dY_0}{dt} = P_0 \cdot \frac{dX_0}{dt} + Q_0 \cdot \frac{dZ_0}{dt} \quad (60)$$

и дифференциальному уравнению (22).

Выразим  $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5$  через функции  $X_0, Y_0, Z_0, P_0$  и  $Q_0$ .

Из (39) следует, что

$$C_1 = \operatorname{arctg}(P_0). \quad (61)$$

Исходя из (40), получаем, что

$$C_2 = Q_0 \cdot \cos(C_1). \quad (62)$$

Величину  $C_3$  из (41) находим следующим образом:

$$C_3 = \frac{M \cdot C_1 \cdot C_2}{\sqrt{1 + C_2^2}} - Z_0. \quad (63)$$

Исходя из (42) получаем, что

$$C_4 = \frac{Y_0}{\cos(C_1)} + \frac{M}{\sqrt{1 + C_2^2}} \times \\ \times ((1 + C_2^2) \cdot \operatorname{tg}(C_1) - C_1). \quad (64)$$

Наконец, основываясь на (43), с учетом (64) после преобразований приходим к следующему:

$$C_5 = X_0 + Y_0 \cdot P_0 + M \cdot \sqrt{1 + P_0^2 + Q_0^2}. \quad (65)$$

Величина  $C_5$  – это начальное значение функции  $F$ , т. е. эта функция определяется с точностью до  $C_5$ . А так как величины  $X_0$ ,  $Y_0$ ,  $Z_0$ ,  $P_0$  и  $Q_0$  удовлетворяют условию полосы и дифференциальному уравнению (22), то величина  $C_5$  должна быть равна 0, что означает отсутствие лишних корней, о которых упоминалось ранее.

Сведем в одну систему все найденные уравнения, описывающие искомую поверхность:

$$\frac{dY_0}{dt} = P_0 \cdot \frac{dX_0}{dt} + Q_0 \cdot \frac{dZ_0}{dt}; \\ X_0 + Y_0 \cdot P_0 + M \cdot \sqrt{1 + P_0^2 + Q_0^2} = 0; \\ C_1 = \arctg(P_0); \\ C_2 = Q_0 \cdot \cos(C_1); \\ C_3 = \frac{M \cdot C_1 \cdot C_2}{\sqrt{1 + C_2^2}} - Z_0; \\ C_4 = \frac{Y_0}{\cos(C_1)} + \frac{M}{\sqrt{1 + C_2^2}} \times \\ \times ((1 + C_2^2) \cdot \operatorname{tg}(C_1) - C_1); \\ p = \operatorname{tg}(s + C_1); \\ q = \frac{C_2}{\cos(s + C_1)};$$

$$z = -\frac{M \cdot C_2}{\sqrt{1 + C_2^2}} \cdot (s + C_1) + C_3;$$

$$y = -\frac{M}{\sqrt{1 + C_2^2}} \cdot ((1 + C_2^2) \cdot \sin(s + C_1) - \\ - (s + C_1) \cdot \cos(s + C_1)) + C_4 \cdot \cos(s + C_1); \\ x = -\frac{M}{\sqrt{1 + C_2^2}} \cdot ((1 + C_2^2) \cdot \cos(s + C_1) + \\ + (s + C_1) \cdot \sin(s + C_1)) - C_4 \cdot \sin(s + C_1). \quad (66)$$

В [1] указывается на то, что решение задачи Коши, сформулированной применительно к дифференциальному уравнению (22), в общем случае справедливо лишь в малой окрестности начальной полосы. Однако для рассматриваемого частного случая, когда функция  $F$  определяется выражением (33), при всех допустимых значениях параметров  $s$  и  $t$  дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial y}{\partial t} = p \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + q \cdot \frac{\partial z}{\partial t} \quad (67)$$

превращается в тождество, в чем можно убедиться, продифференцировав функции  $x$ ,  $y$  и  $z$  по  $t$  и подставив найденные производные вместе с  $p$  и  $q$  в данное дифференциальное уравнение. Это позволяет утверждать, согласно [1], что при всех допустимых значениях параметров  $s$  и  $t$  уравнения (66) описывают искомую поверхность.

Для подтверждения справедливости полученных результатов проведем сравнительный компьютерный анализ работы цевочного зацепления, которое, как известно, чувствительно к изменению относительного положения колес, и зацепления двух поверхностей, описываемых уравнениями (66). Для проведения такого анализа необходимо программное обеспечение, позволяющее осуществлять симуляцию движения и взаимодействия твердотельных моделей, находящихся под действием системы сил. Подобное программное обеспечение в настоящее время достаточно

распространено.

Оба вида зацепления представим как контакт лишь одной пары поверхностей с параллельными осями вращения. При этом компьютерные эксперименты с обоими видами зацепления проводим при различных межосевых расстояниях, но при одном и том же времени контакта 5 с, которое устанавливаем подбором. Свойства материала, параметры взаимодействия, а также точность симулирования делаем общими. Считаем, что в обоих случаях частота вращения ведущей поверхности равна 1 об/мин, что соответствует угловой скорости  $\omega_1 = 0,1047 \text{ с}^{-1}$ , момент сопротивления вращению, приложенный к ведомой поверхности, равен 100 Н/мм, передаточное отношение  $u_{12} = -0,5$ . При этом теоретическое значение угловой скорости ведомой поверхности найдем следующим образом:

$$\omega_2 = \frac{\omega_1}{u_{12}} = \frac{0,1047}{-0,5} = -0,2094 \text{ с}^{-1}. \quad (68)$$

Данную величину также определим далее средствами программного обеспечения экспериментально, в ходе компьютерного симулирования.

Будем считать, что в цевочном зацеплении ведомой поверхностью является цилиндрическая поверхность цевки. Примем, что радиус цевки  $r_p = 5$  мм, радиус окружности, на которой расположен геометрический центр цевки,  $r_c = 30$  мм, а высота ведущей поверхности в радиальном направлении  $h = 20$  мм. При этом начальный радиус ведущей поверхности

$$r_w = \left| \frac{r_c}{u_{12}} \right| = \left| \frac{30}{-0,5} \right| = 60 \text{ мм} \quad (69)$$

будем считать минимальным радиусом, а максимальным радиус

$$r_a = r_w + h = 60 + 20 = 80 \text{ мм}. \quad (70)$$

Межосевое расстояние, при котором зададим ведущую поверхность в цевочном зацеплении,

$$A = r_c + r_w = 90 \text{ мм}. \quad (71)$$

Компьютерное исследование цевочного зацепления проведем в два этапа:

1) симулирование при межосевом расстоянии 90 мм (рис. 1);

2) симулирование при межосевом расстоянии 95 мм (рис. 2).

Анализ графика, представленного на рис. 1, показывает, что максимальное отклонение угловой скорости ведомой поверхности в цевочном зацеплении от расчетного значения в течение времени контакта не превышает  $0,009 \text{ с}^{-1}$ . Разброс значений этой угловой скорости объясняется погрешностью геометрического моделирования цевочного зацепления. Данная погрешность появляется из-за того, что профиль ведущей поверхности аппроксимируем сплайнами, последовательно соединяющими конечное количество точек, координаты которых рассчитываем по известным уравнениям теории цевочного зацепления.

При увеличении межосевого расстояния на 5 мм максимальное отклонение угловой скорости от расчетного значения в течение времени контакта увеличивается почти в 3 раза и составляет уже  $0,026 \text{ с}^{-1}$ , что иллюстрируется графиком, представленным на рис. 2.

Подобные компьютерные эксперименты проведем также с зацеплением поверхностей, задаваемых уравнениями (66). Данное зацепление назовем зацеплением II.

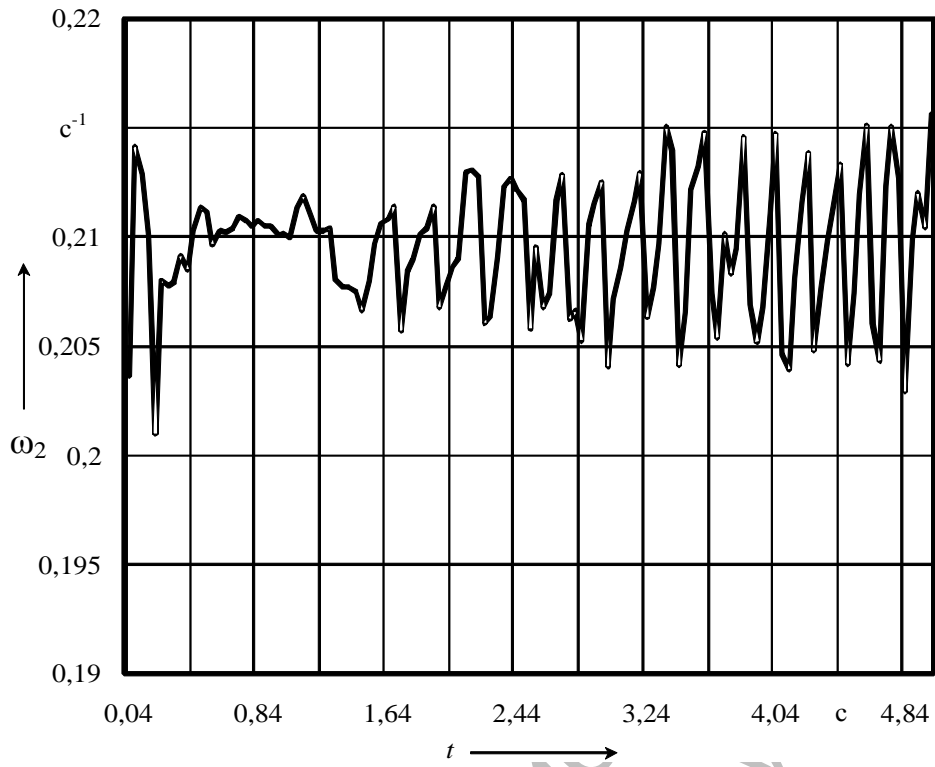


Рис. 1. График зависимости угловой скорости ведомой поверхности в цевочном зацеплении от времени при межосевом расстоянии 90 мм

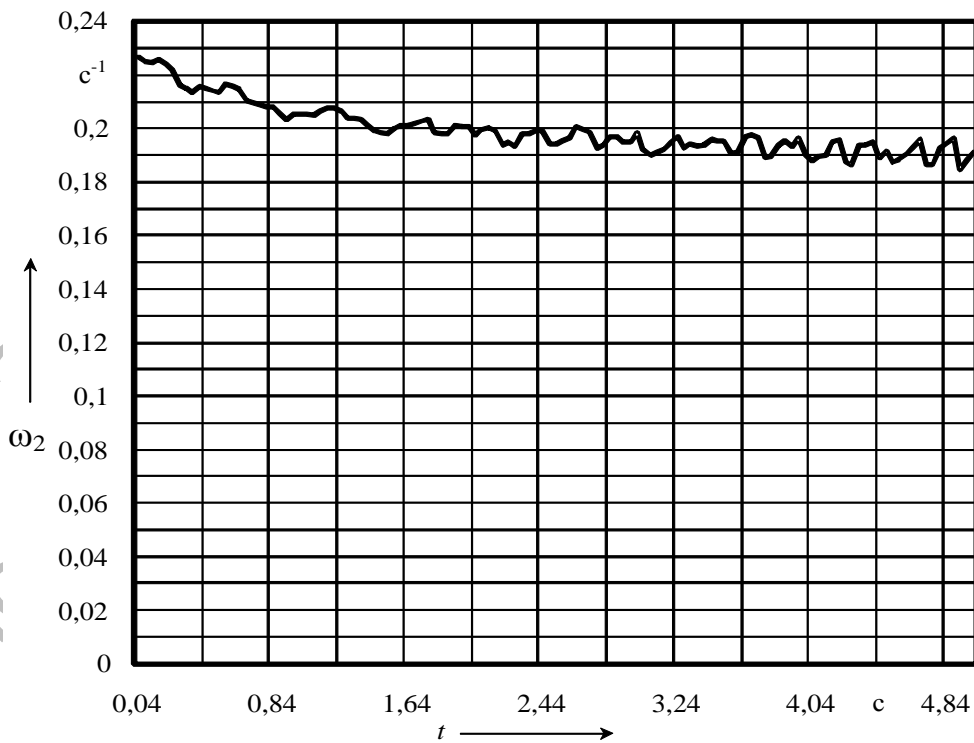


Рис. 2. График зависимости угловой скорости ведомой поверхности в цевочном зацеплении от времени при межосевом расстоянии 95 мм

Определим начальную полосу ведомой поверхности в зацеплении II:

$$X_0 = -M + t; \quad (72)$$

$$Y_0 = 0; \quad (73)$$

$$Z_0 = 0; \quad (74)$$

$$P_0 = 0; \quad (75)$$

$$Q_0 = \frac{\sqrt{t^2 - 2 \cdot M \cdot t}}{M}. \quad (76)$$

Носитель данной начальной полосы – это луч, совпадающий с осью абсцисс. Соответствующая система параметрических уравнений имеет следующий вид:

$$x = -M \cdot \left( \frac{M-t}{M} \cdot \cos(s) + s \cdot \frac{M}{M-t} \cdot \sin(s) \right); \quad (77)$$

$$y = -M \cdot \left( \frac{M-t}{M} \cdot \sin(s) - s \cdot \frac{M}{M-t} \cdot \cos(s) \right); \quad (78)$$

$$z = -\frac{M \cdot \sqrt{t^2 - 2 \cdot M \cdot t}}{M-t} \cdot s. \quad (79)$$

Из последнего уравнения выразим

$$s = \frac{z \cdot (t-M)}{M \cdot \sqrt{t^2 - 2 \cdot M \cdot t}} \quad (80)$$

и примем  $z$  в качестве нового параметра вместо  $s$ .

Таким образом, ведомую поверхность в зацеплении II представим в виде бесконечного числа кривых, лежащих в плоскостях, параллельных плоскости  $Oxy$  (перпендикулярных оси  $Oz$  вращения), т. е. в виде совокупности нормальных профилей.

Ведущую поверхность в зацеплении II опишем теми же уравнениями (77)...(79), что и ведомую поверхность в этом зацеплении, но координаты точек будем брать с противоположным зна-

ком. Очевидно, что такая замена знака не изменит модуль момента единичной нормали к ведущей поверхности относительно оси ее вращения.

Передаточное отношение зацепления II определим параметрами  $M_{01} = -30$  мм и  $M_{02} = -15$  мм. Таким образом, обеспечим передаточное отношение  $u_{12} = -0,5$  (см. выражение (11)), равное передаточному отношению цевочного зацепления. Принимаем также, что  $z_{\min} = -70$  мм,  $z_{\max} = -45$  мм,  $t_{\min} = 5$  мм,  $t_{\max} = 20$  мм. В заданных пределах изменения параметров  $z$  и  $t$  поверхность, описываемая уравнениями (77)...(79), имеет сингулярные точки, образующие кривую, делящую эту поверхность на две области. При переходе из одной области в другую момент единичной нормали меняет знак, оставаясь по модулю неизменным. Для того чтобы отбирать точки, принадлежащие только одной области, используем следующее условие отбора: момент нормали к поверхности относительно оси вращения должен быть или только положительным, или только отрицательным. Поэтому принимаем, что если

$$(\vec{r} \times \vec{n}) \cdot \vec{k} = (\vec{r} \times \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right)) \cdot \vec{k} < 0, \quad (81)$$

то точка отбирается, в противном случае – нет.

Ведущая и ведомая поверхности в зацеплении II содержат точки только эллиптического типа и являются выпуклыми, что позволяет при изменении межосевого расстояния (в определенных пределах) избегать кромочного контакта.

Точность геометрического моделирования поверхностей в зацеплении II зависит от шага изменения параметра  $z$  и от шага изменения параметра  $t$ . Подбираем данные шаги таким образом, чтобы в течение времени контакта максимальное отклонение угловой скорости ведомой поверхности в зацеплении II от



расчетного значения приблизительно равнялось бы аналогичной величине, определяемой в компьютерном эксперименте с цевочным зацеплением при межосевом расстоянии 90 мм. Таким образом была получена зависимость уг-

ловой скорости ведомой поверхности в зацеплении II от времени при межосевом расстоянии 120 мм (рис. 3), которое было выбрано таковым в определенном смысле произвольно.

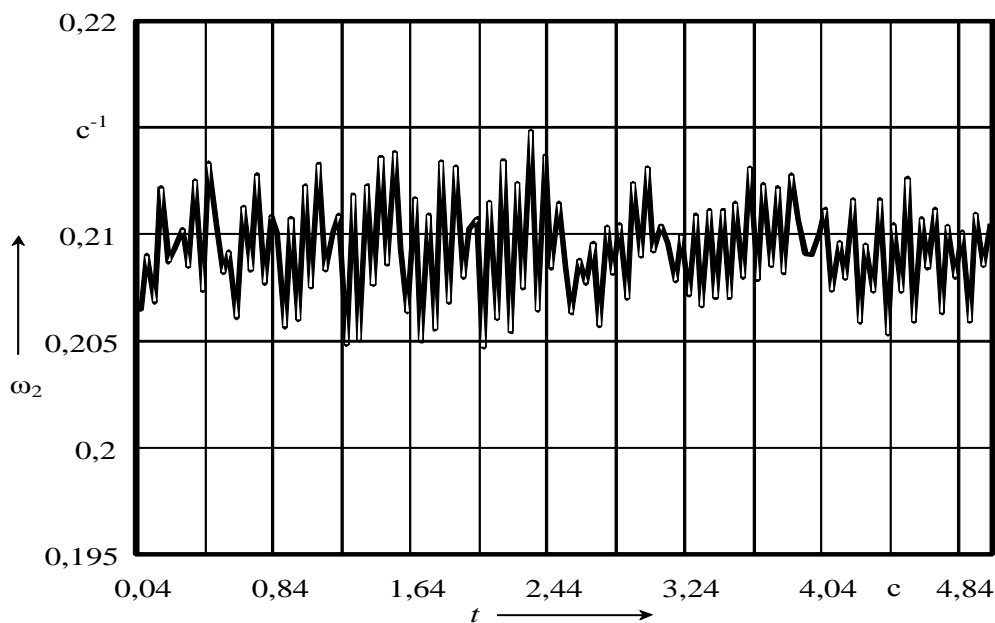


Рис. 3. График зависимости угловой скорости ведомой поверхности в зацеплении II от времени при межосевом расстоянии 120 мм

Вторая часть компьютерного эксперимента проводилась при межосевом расстоянии 130 мм. Ее результаты представлены на рис. 4.

Анализ двух последних графиков показывает, что в течение времени контакта максимальное отклонение угловой скорости ведомой поверхности в зацеплении II от расчетного значения при различных межосевых расстояниях не превышает  $0,006 \text{ с}^{-1}$ .

Анализ компьютерных экспериментов, проведенных с двумя видами зацеплений, подтверждает предположение о том, что зацепление, сформированное на основе поверхностей, описываемых уравнениями (6б), нечувствительно к изменению относительного положения этих поверхностей в отличие от цевочного зацепления.

### Выводы

Получена зависимость (13) передаточного отношения зацепления поверхностей от геометрических параметров, определяющих эти поверхности. Получены параметрические уравнения (6б) поверхностей, которые могут образовывать зацепления, нечувствительные к изменению их относительного положения. Предложен принцип выбора уравнений контактирующих поверхностей, позволяющий устранить кромочный контакт (см. описание зацепления II). Отмечены принципы анализа поверхностей с целью выявления областей, ограниченных сингулярными точками (см. выражение (81)).

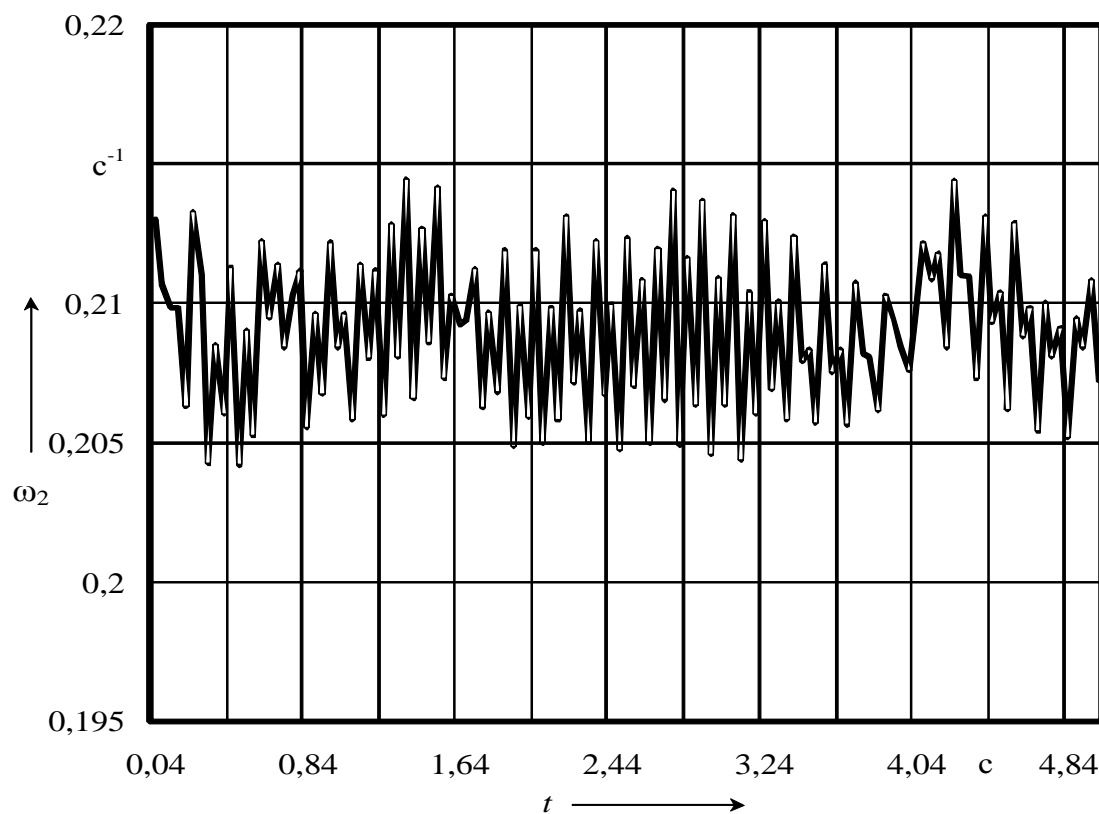


Рис. 4. График зависимости угловой скорости ведомой поверхности в зацеплении II от времени при межосевом расстоянии 130 мм

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Камке, Э. Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных

первого порядка / Э. Камке. – М. : Наука, 1966. – 260 с.

Белорусско-Российский университет  
Материал поступил 03.12.2009

**S. N. Khatetovski**  
**Support of surface engagement insensitivity**  
**to the change of their positional relationship**

In the article urgency of the problem of enhancement of qualitative indices of gearing and simultaneous support of gearing insensitivity to change of gear positional relationship is pointed. Solving of the second part of this problem is considered. Equations of surfaces of gearing that may be insensitive to the change of surface positional relationship have been found.