

МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Технологии металлов»

# СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ И ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

*Методические рекомендации к самостоятельной работе  
для студентов специальности 1-40 05 01 «Информационные  
системы и технологии (по направлениям)»  
заочной формы обучения*



Могилев 2021

УДК 539.3/.6  
ББК 30.121  
С64

Рекомендовано к изданию  
учебно-методическим отделом  
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Технологии металлов» «04» октября 2021 г.,  
протокол № 3

Составители: канд. техн. наук, доц. В. А. Попковский;  
ст. преподаватель С. В. Гонорова

Рецензент канд. техн. наук, доц. А. Е. Науменко

Методические рекомендации составлены в соответствии с учебной программой дисциплины «Сопротивление материалов и теория упругости» для студентов специальности 1-40 05 01 «Информационные системы и технологии (по направлениям)» заочной формы обучения. Содержат теоретический и практический материал для проведения аудиторной контрольной работы.

Учебно-методическое издание

## СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ И ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Ответственный за выпуск	Д. И. Якубович
Корректор	А. А. Подошевка
Компьютерная верстка	Н. П. Полевничая

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.  
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 36 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:  
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования  
«Белорусско-Российский университет».

Свидетельство о государственной регистрации издателя,  
изготовителя, распространителя печатных изданий  
№ 1/156 от 07.03.2019.

Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.

© Белорусско-Российский  
университет, 2021

## Содержание

Введение.....	4
1 Теория осевого растяжения и сжатия бруса.....	5
1.1 Внешние и внутренние силы. Метод сечений.....	5
1.2 Напряжения и деформации в точке тела.....	6
1.3 Построение эпюр продольных сил.....	7
1.4 Анализ напряженно-деформированного состояния стержня при осевом растяжении и сжатии.....	9
2 Пример расчета ступенчатого бруса при осевом растяжении и сжатии.....	12
3 Исходные данные к выполнению аудиторной контрольной работы «Анализ ступенчатого бруса при осевом растяжении и сжатии» .....	15
4 Основные соотношения расчета вала круглого поперечного сечения при совместном действии изгиба с кручением.....	17
5 Пример подбора вала круглого поперечного сечения при совместном действии изгиба с кручением.....	23
6 Задания для аудиторной контрольной работы.....	29
Список литературы.....	31

## Введение

Студенты специальности 1-40 05 01 «Информационные системы и технологии (по направлениям)» заочной формы обучения изучают дисциплину «Соппротивление материалов и теория упругости» на протяжении 3-го и 4-го семестров.

Цель преподавания дисциплины – сформировать у студентов основные знания и умения по расчету типового элемента различных изделий (бруса) на прочность, жесткость и устойчивость, по выбору конструкционных материалов и форм поперечных сечений, обеспечивающих требуемые показатели надежности, безопасности и экономичности различных объектов.

Полученные знания и умения будут использованы при изучении курса «Компьютерные системы конечно-элементных расчетов».

Методические рекомендации разработаны в соответствии с Положением об аудиторной контрольной работе.

Аудиторная контрольная работа (далее – АКР) является формой промежуточного контроля результатов межсессионной самостоятельной работы студентов заочной формы обучения, одним из элементов стимулирования подготовки к экзамену.

АКР организуется и проводится в период лабораторно-экзаменационной сессии в соответствии с расписанием, после проведения лекционных, практических и лабораторных занятий по дисциплине «Соппротивление материалов и теория упругости».

Студенты специальности «Информационные системы и технологии» выполняют две АКР в письменной форме: «*Расчет ступенчатого бруса при осевом растяжении и сжатии*» и «*Расчет вала круглого поперечного сечения при совместном действии изгиба и кручения*».

Общая продолжительность АКР для учебной группы составляет 2 академических часа.

АКР выполняется на бланках установленного образца. Перед решением задачи записываются исходные данные. Выбор исходных данных осуществляется по трем последним цифрам номера зачетной книжки. Решение сопровождается краткими пояснениями. Чертежи и схемы выполняются в удобном масштабе, карандашом, с использованием чертежного инструмента.

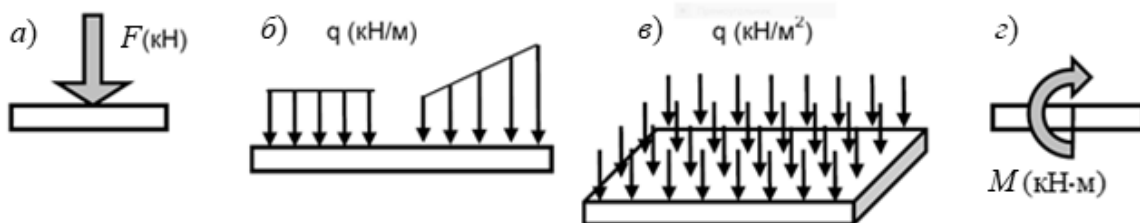
К выполнению АКР допускаются студенты заочной формы обучения, имеющие при себе зачетную книжку, удостоверение личности (паспорт либо вид на жительство, удостоверение беженца).

Перед АКР студентам предлагается изучить материал темы по конспекту лекций и рекомендуемой литературе [1–5], разобрать решение приведенных типовых примеров.

# 1 Теория осевого растяжения и сжатия бруса

## 1.1 Внешние и внутренние силы. Метод сечений

Внешние силы, действующие на конструкцию, разделяют на активные силы (нагрузку) и реакции опор. По характеру действия различают сосредоточенные силы, измеряемые в ньютонах (Н, кН), распределенную нагрузку, измеряемую в ньютонах на метр (Н/м, кН/м), если нагрузка распределена вдоль линии, или в ньютонах на квадратный метр (Н/м<sup>2</sup>, кН/м<sup>2</sup>), если нагрузка распределена по поверхности, сосредоточенный момент, измеряемый в ньютон-метрах (Н·м, кН·м) (рисунок 1.1). Реакции опор вычисляют через активные силы методами теоретической механики.



а – сосредоточенная сила; б – распределенная по длине стержня нагрузка; в – распределенная по поверхности пластинки нагрузка; г – сосредоточенный момент

Рисунок 1.1 – Виды внешних нагрузок

Под действием внешних сил стержень деформируется, при этом между отдельными частями стержня появляются дополнительные силы взаимодействия, называемые внутренними силами. Если стержень мысленно рассечь плоскостью, перпендикулярной к продольной оси стержня  $Z$ , то по всей площади поперечного сечения от одной части стержня на другую часть будут передаваться внутренние силы. Отбросим правую часть стержня. Внутренние силы, передающиеся от неё на левую часть (рисунок 1.2), по отношению к левой части стержня становятся внешними силами и могут быть представлены главным вектором и главным моментом. Центром приведения принимается центр тяжести поперечного сечения стержня, через который проводят координатные оси  $X$ ,  $Y$ , лежащие в плоскости сечения, и ось  $Z$ , перпендикулярную плоскости поперечного сечения. Главный вектор раскладывается на силы  $N$ ,  $Q_x$ ,  $Q_y$ , а главный момент – на моменты  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z$ .

Указанные шесть величин называют внутренними усилиями (внутренними силовыми факторами) стержня. Каждое из них имеет своё название:  $N$  – продольная (нормальная) сила,  $Q_x$  и  $Q_y$  – поперечные (перерезывающие) силы,  $M_x$  и  $M_y$  – изгибающие моменты,  $M_z$  – крутящий момент.

Для определения внутренних усилий используют метод сечений. Он заключается в выполнении четырех действий:

- 1) мысленно разрезать стержень плоскостью (поперечное сечение) на две части;
- 2) отбросить одну из частей стержня;
- 3) заменить действие отброшенной части стержня на оставшуюся часть внутренними усилиями;
- 4) уравновесить оставшуюся часть стержня.

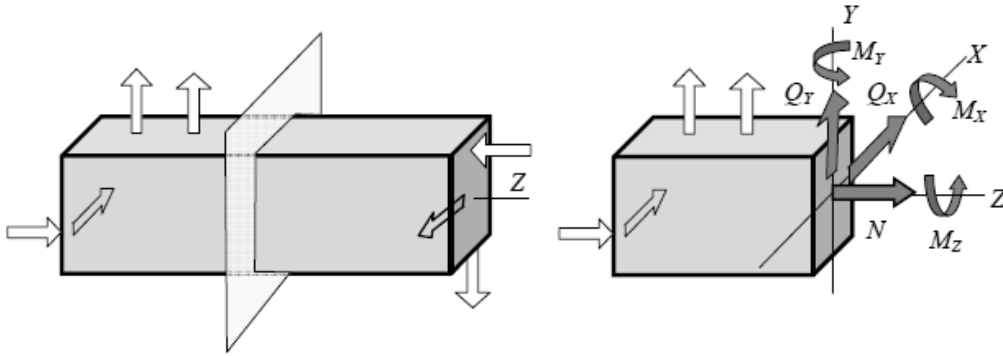


Рисунок 1.2 – Метод сечений и внутренние усилия в стержне

В общем случае можно составить шесть уравнений равновесия: суммы проекций всех сил на оси  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  и суммы моментов всех сил относительно этих осей. Этих уравнений достаточно для определения шести компонент внутренних силовых факторов.

## 1.2 Напряжения и деформации в точке тела

Векторная величина, равная интенсивности внутреннего усилия в произвольной точке сечения стержня, называется напряжением. Различают нормальное напряжение  $\sigma = \frac{dN}{dA}$ , перпендикулярное плоскости сечения, и касательные напряжения  $\tau_x = \frac{dQ_x}{dA}$ ,  $\tau_y = \frac{dQ_y}{dA}$ , лежащие в плоскости сечения (рисунок 1.3).

Напряжения можно вычислить на любой бесконечно малой площадке  $dA$ , проходящей через точку твердого тела. Совокупность напряжений на всех площадках, проходящих через точку, называется напряженным состоянием материала в точке. Напряжения измеряют в паскалях ( $1 \text{ Па} = 1 \text{ Н/м}^2$ ), но чаще в мегапаскалях ( $1 \text{ МПа} = 10^6 \text{ Па}$ ).

Около некоторой точки  $K$  твердого тела выделим бесконечно малый параллелепипед с длиной ребер соответственно  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  (рисунок 1.4). Его деформированное положение в плоскости  $xKy$  показано пунктирными линиями.

Для этой плоскости относительные линейные деформации в направлении координатных осей будут соответственно равны  $\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx}$  и  $\varepsilon_y = \frac{\Delta dy}{dy}$ ,

а также угол сдвига  $\gamma_{xy}$  (рисунок 1.4).

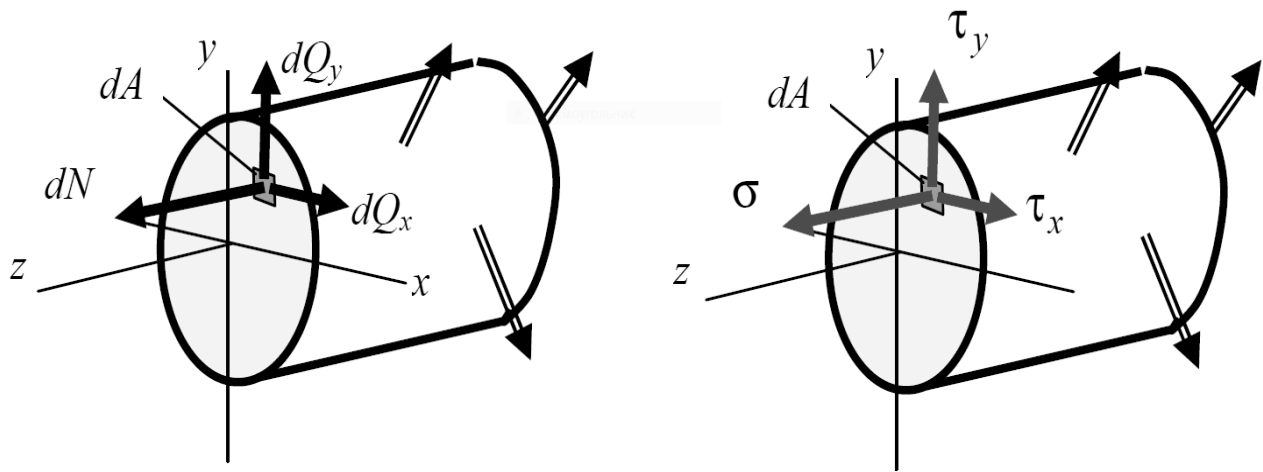


Рисунок 1.3 – Напряжения в точке сечения

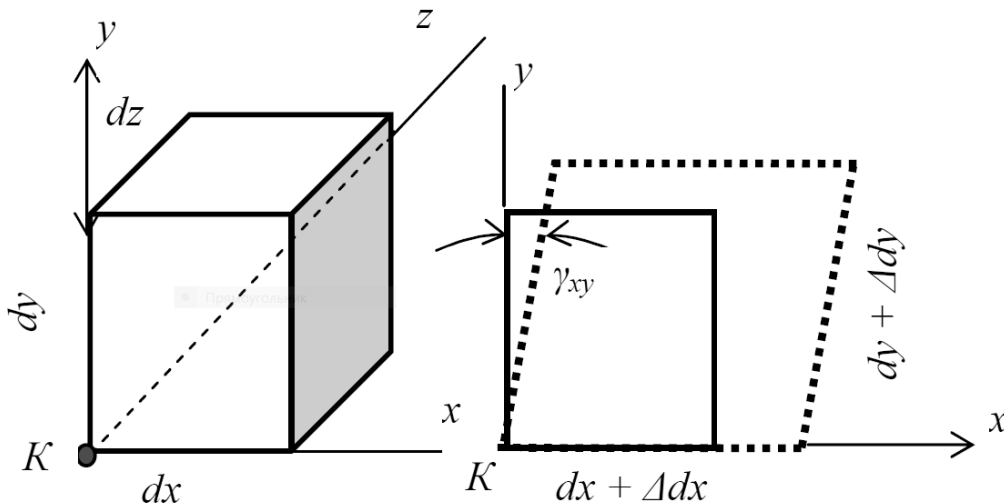


Рисунок 1.4 – Линейные и угловые (сдвиговые) деформации элементарного параллелепипеда в области рассматриваемой точки  $K$

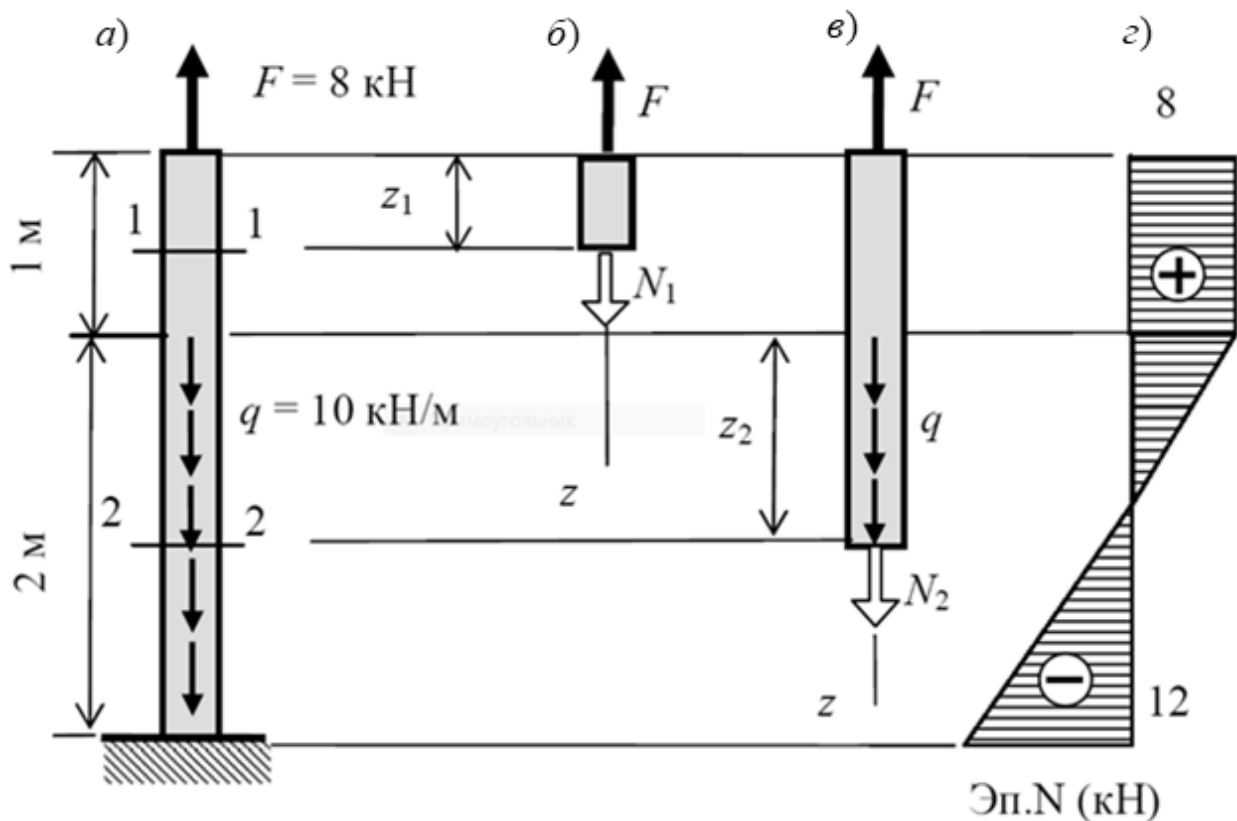
При вращении координатных осей вокруг точки  $K$  указанные деформации будут изменяться. Совокупность относительных линейных деформаций и углов сдвига для произвольных осей, проведенных через выбранную точку, называется деформированным состоянием материала в точке. В общем случае оно определяется шестью относительными деформациями:  $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ .

### 1.3 Построение эпюр продольных сил

Осевым растяжением (сжатием) называется такой вид деформации стержня, при котором в поперечных сечениях возникает только продольная сила  $N$ . Растягивающие продольные силы считаются положительными, а сжимающие – отрицательными. График, показывающий изменение продольной силы вдоль оси стержня, называется эпюрой продольных сил (Эп.  $N$ ). Для

построения Эп.  $N$  стержень разделяют на участки, на каждом из которых находят продольную силу методом сечений как функцию внешних сил и координаты  $Z$ , определяющей положение поперечного сечения. Затем строят графики полученных функций.

Рассмотрим пример построения эпюры продольных сил в стержне, нагруженном, как это показано на рисунке 1.5, при этом разделяем стержень на два участка. Здесь следует отметить, что разделение стержня на участки осуществляется в соответствии со следующим правилом – начало и концы участков должны совпадать с местом приложения сосредоточенной силы, а также с началом и концом действия распределенной нагрузки (рисунок 1.5, а).



а – заданный стержень; б, в – отсеченные части стержня; г – эпюра  $N$

Рисунок 1.5 – Построение эпюры продольных сил

Построение эпюры продольных сил в стержне один край, которого закреплен, а второй свободен от закрепления, как правило, начинают со стороны свободного конца. Обусловлено это тем, что при движении со стороны закрепленного конца необходимо также учитывать и реактивное усилие, возникающее в закреплении, которое необходимо предварительно определить, т. е. выполнить дополнительную операцию.

Проведя на верхнем участке произвольное сечение 1–1, выделяем верхнюю часть стержня, заменяя действие нижней части положительной продольной силой  $N_1$  (рисунок 1.5, б). Из уравнения равновесия в виде



$$\Sigma F_z = N_1 - F = 0$$

находим  $N_1 = F = 8$  кН при любом значении  $z_1$ . График этой функции – прямая, параллельная оси  $z$ . Нижний участок стержня рассекаем сечением 2–2, выделяем верхнюю часть стержня, заменяя действие нижней части положительной продольной силой  $N_2$  (рисунок 1.5, в). Из уравнения равновесия

$$\Sigma F_z = N_2 + q \cdot z_2 - F = 0$$

получаем  $N_2 = 8 - 10 z_2$  при  $0 \leq z_2 \leq 2$  м. График этой функции – наклонная прямая с ординатами на концах участка 8 и –12 кН (рисунок 1.5, г).

#### 1.4 Анализ напряженно-деформированного состояния стержня при осевом растяжении и сжатии

При растяжении стержня его длина увеличивается, а поперечные размеры уменьшаются (рисунок 1.6). Изменение длины  $\Delta l$  называется абсолютной продольной деформацией, а изменения поперечных размеров  $\Delta b$  и  $\Delta h$  – абсолютными поперечными деформациями. По этим величинам вычисляют относительную продольную деформацию

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

и относительную поперечную деформацию

$$\varepsilon' = \frac{\Delta b}{b} = \frac{\Delta h}{h}.$$

Опытами установлено, что отношение

$$\mu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right|$$

остаётся постоянным для каждого материала и находится в интервале 0...0,5.

Параметр  $\mu$  называется коэффициентом Пуассона.

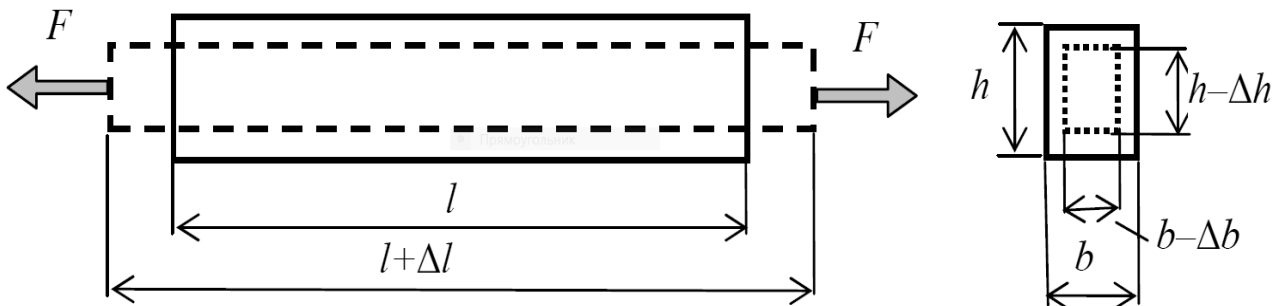


Рисунок 1.6 – Деформированное состояние растянутого стержня

В поперечных сечениях стержня возникают нормальные напряжения, которые, согласно гипотезе плоских поперечных сечений, равномерно распределены по всей площади сечения (рисунок 1.7) и равны отношению продольной силы к площади поперечного сечения:

$$\sigma = \frac{N}{A}.$$

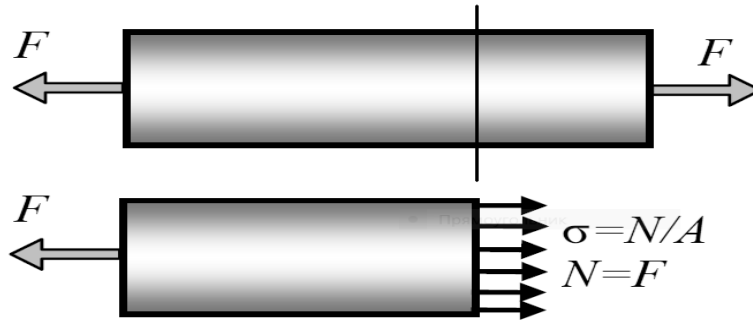


Рисунок 1.7 – Распределение нормальных напряжений в поперечном сечении стержня

Между нормальными напряжениями и относительной продольной деформацией существует зависимость, называемая законом Гука:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon,$$

в которой коэффициент пропорциональности  $E$  называется модулем упругости. Модуль упругости определяется опытным путем и является важной характеристикой материала. Единицы измерения модуля упругости совпадают с единицами измерения напряжений.

Учитывая приведенные выше выражения, абсолютная продольная деформация может быть вычислена по формуле

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA},$$

где произведение  $EA$  называется жёсткостью при растяжении (сжатии).

Здесь следует отметить, что данная формула для определения абсолютной продольной деформации применима только в случае, когда по всей длине стержня продольная сила является постоянной величиной ( $N = \text{const}$ ).

В случае, когда продольная сила представляет собой постоянную величину на каждом из участков стержня по отдельности, то в этом случае значение абсолютной продольной деформации может быть определено посредством использования следующего выражения:

$$\Delta l = \sum_{i=1}^n \frac{N_i l_i}{EA_i},$$

где  $n$  – это количество участков стержня, на которых параметры  $N_i$ ,  $l_i$  и  $A_i$  являются постоянными величинами одновременно на каждом участке.

Для проведения прочностных расчетов используют метод допускаемых напряжений, метод разрушающих нагрузок и метод предельных состояний.

В методе допускаемых напряжений вводится понятие допускаемого напряжения  $[\sigma]$ , величина которого получается делением опасного напряжения  $\sigma_{on}$  на коэффициент запаса прочности  $n$ :

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{on}}{n}.$$

Опасным напряжением принимается либо предел текучести материала, либо предел прочности. Коэффициент запаса прочности  $n > 1$ , он учитывает естественный разброс результатов опытов по определению  $\sigma_{on}$ , неточность установления величины внешней нагрузки, условия эксплуатации конструкции и ряд других факторов.

Условие прочности имеет вид:

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} \leq [\sigma].$$

Для материалов, по-разному сопротивляющихся растяжению и сжатию, вводят два различных допускаемых напряжения  $[\sigma]_p$  и  $[\sigma]_{сж}$ .

Условие прочности позволяет решать три типа задач.

1 При заданных нагрузках, размерах поперечного сечения и допускаемых напряжениях проверять прочность стержня

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} \leq [\sigma].$$

2 При заданных нагрузках и величине допускаемых напряжений определять площадь, а затем размеры поперечного сечения

$$A \geq \frac{N}{[\sigma]}.$$

3 При заданных размерах поперечного сечения и величине допускаемых напряжений определять величину допускаемой продольной силы в стержне

$$N \leq [\sigma]A.$$

Методы предельных состояний и разрушающих нагрузок изучаются в курсе «Строительная механика».

### ***Контрольные вопросы***

- 1 Какое правило знаков принимается для продольной силы?
- 2 Что называется эпюрой продольных сил?
- 3 Как вычислить нормальные напряжения в поперечном сечении стержня?
- 4 Что называется относительной линейной деформацией?
- 5 Что называется сдвиговой деформацией?

- 6 Что называется коэффициентом Пуассона?
- 7 Что называется модулем упругости материала?
- 8 Запишите формулу закона Гука.
- 9 Назовите механические характеристики прочности материала.
- 10 Как вычислить удлинение растянутого стержня?
- 11 Запишите условие прочности по методу допускаемых напряжений.
- 12 Какие типы задач решаются с использованием условия прочности?

## 2 Пример расчета ступенчатого бруса при осевом растяжении и сжатии

Для стального бруса (рисунок 2.1) требуется построить эпюры продольных (нормальных) сил, напряжений и перемещений. Для выполнения расчета модуль продольной упругости (модуль Юнга)  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа =  $2 \cdot 10^{11}$  Па.

Исходные данные:  $A_1 = 1,6$  см<sup>2</sup>,  $A_2 = 2,5$  см<sup>2</sup>,  $A_3 = 2$  см<sup>2</sup>.  $l_1 = 0,5$  м,  $l_2 = 1,2$  м,  $l_3 = 0,8$  м,  $l_4 = 0,6$  м,  $F_1 = 12$  кН,  $F_2 = 36$  кН,  $F_3 = 40$  кН.

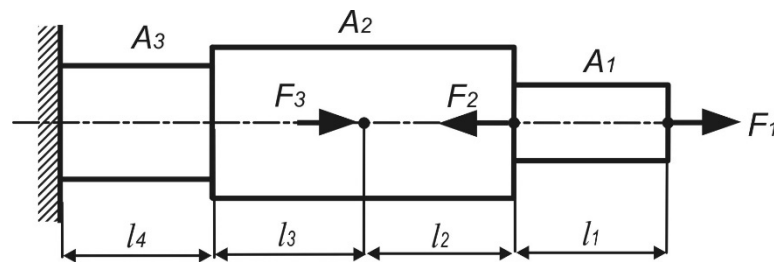
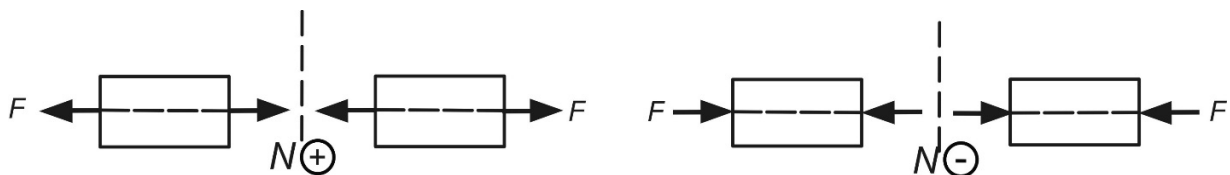


Рисунок 2.1 – Расчетная схема анализируемого бруса

Разбиваем брус на участки (рисунок 2.2, а).

Определяем продольные (нормальные) силы по участкам бруса, используя метод сечений, в соответствии с правилом знаков:

- участок 1:  $N_1 = 12$  кН;
- участок 2:  $N_2 = 12 - 36 = -24$  кН;
- участок 3:  $N_3 = 12 - 36 + 40 = 16$  кН;
- участок 4:  $N_4 = 12 - 36 + 40 = 16$  кН.



По полученным значениям строим эпюру нормальных сил (рисунок 2.2, б).

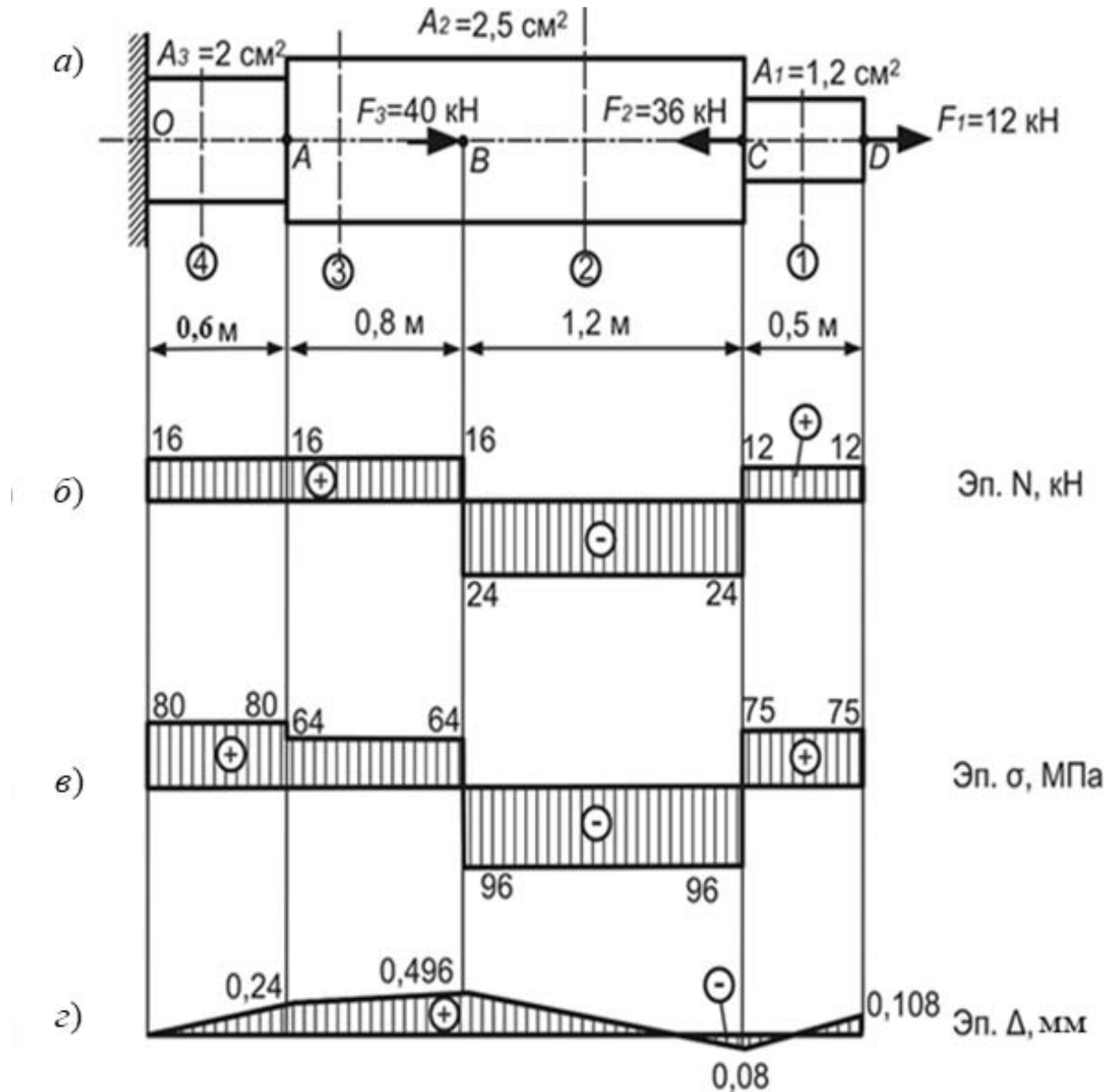


Рисунок 2.2 – Пример построение эпюр продольных сил, напряжений и перемещений для варианта бруса

Определим значения нормальных напряжений на участках бруса, используя выражение

$$\sigma = \pm \frac{N}{A}.$$

Отсюда

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{12 \cdot 10^3}{1,6 \cdot 10^{-4}} = 7,5 \cdot 10^7 \text{ Па} = 75 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = -\frac{24 \cdot 10^3}{2,5 \cdot 10^{-4}} = -9,6 \cdot 10^7 \text{ Па} = -96 \text{ МПа};$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_2} = \frac{16 \cdot 10^3}{2,5 \cdot 10^{-4}} = 6,4 \cdot 10^7 \text{ Па} = 64 \text{ МПа};$$

$$\sigma_4 = \frac{N_4}{A_3} = -\frac{16 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{-4}} = 8 \cdot 10^7 \text{ Па} = 80 \text{ МПа}.$$

Построим эпюру нормальных напряжений (рисунок 2.2, в).

Определим абсолютные удлинения (укорочения) участков бруса, используя соотношение закона Гука

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A}.$$

Отсюда

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot l_1}{E \cdot A_1} = \frac{12 \cdot 10^3 \cdot 0,5}{2 \cdot 10^{11} \cdot 1,6 \cdot 10^{-4}} = 1,88 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 0,188 \text{ мм};$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot l_2}{E \cdot A_2} = -\frac{24 \cdot 10^3 \cdot 1,2}{2 \cdot 10^{11} \cdot 2,5 \cdot 10^{-4}} = -5,76 \cdot 10^{-4} \text{ м} = -0,576 \text{ мм};$$

$$\Delta l_3 = \frac{N_3 \cdot l_3}{E \cdot A_2} = \frac{16 \cdot 10^3 \cdot 0,8}{2 \cdot 10^{11} \cdot 2,5 \cdot 10^{-4}} = 2,56 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 0,256 \text{ мм};$$

$$\Delta l_4 = \frac{N_4 \cdot l_4}{E \cdot A_3} = \frac{16 \cdot 10^3 \cdot 0,6}{2 \cdot 10^{11} \cdot 2 \cdot 10^{-4}} = 2,4 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 0,24 \text{ мм}.$$

Определим перемещения характерных сечений бруса:

$$\Delta_O = 0;$$

$$\Delta_A = \Delta l_4 = 0,24 \text{ мм};$$

$$\Delta_B = \Delta l_4 + \Delta l_3 = \Delta_A + \Delta l_3 = 0,24 + 0,256 = 0,496 \text{ мм};$$

$$\Delta_C = \Delta l_4 + \Delta l_3 + \Delta l_2 = \Delta_B + \Delta l_2 = 0,496 - 0,576 = -0,08 \text{ мм};$$

$$\Delta_D = \Delta l_4 + \Delta l_3 + \Delta l_2 + \Delta l_1 = \Delta_C + \Delta l_1 = -0,08 + 0,188 = 0,108 \text{ мм}.$$

По полученным значениям построим эпюру перемещений (рисунок 2.2, г).

### 3 Исходные данные к выполнению аудиторной контрольной работы «Анализ ступенчатого бруса при осевом растяжении и сжатии»

Выбор исходных данных осуществляется по трем последним цифрам номера зачетной книжки. Первые буквы русского алфавита располагают под указанными цифрами, например: 0294250

абв

Так как столбец, обозначенный буквой «в», ассоциируется с цифрой «0», то из данных этого столбца берем исходные данные по строке «0» – расчетную схему под номером 5 из рисунка 3.1 – и площади поперечных сечений соответственно  $A_1 = 1,5 \text{ см}^2$ ,  $A_2 = 2,5 \text{ см}^2$ ,  $A_3 = 3,3 \text{ см}^2$ .

Соответственно из столбца «а» выбираем данные строки «2»:

$$l_1 = 0,25 \text{ м}, l_2 = 0,2 \text{ м}, l_3 = 0,35 \text{ м}, l_4 = 0,7 \text{ м}.$$

Из столбца «б» по номеру строки «5»:  $F_1 = 8 \text{ кН}$ ,  $F_2 = 19 \text{ кН}$ ,  $F_3 = 16 \text{ кН}$ .

Таблица 3.1 – Исходные данные к выполнению аудиторной контрольной работы

Номер строки	Номер варианта схемы бруса по рисунку 3.1	Площадь поперечных сечений			Длина участка				Внешние силы		
		$A_1$	$A_2$	$A_3$	$l_1$	$l_2$	$l_3$	$l_4$	$F_1$	$F_2$	$F_3$
		см <sup>2</sup>			м				кН		
1	1	2,2	2,6	3,4	0,2	0,4	0,8	0,25	12	20	46
2	2	2,4	1,5	3,1	0,25	0,2	0,35	0,7	11	24	17
3	3	1,2	2,8	3,2	0,4	0,35	0,65	0,15	10	15	35
4	4	2,5	1,1	3,6	0,4	0,25	0,35	0,55	9	23	40
5	5	1,8	2,5	3,7	0,15	0,25	0,45	0,5	8	19	16
6	1	1,4	2,1	2,5	0,25	0,45	0,2	0,15	14	25	38
7	2	1,6	1,2	2,7	0,35	0,2	0,25	0,8	15	26	30
8	3	1,3	2,2	2,8	0,35	0,25	0,15	0,5	16	28	36
9	4	2,2	1,4	2,9	0,15	0,7	0,35	0,35	17	32	24
0	5	1,5	2,5	3,3	0,15	0,35	0,65	0,3	18	12	26
		<b>в</b>			<b>а</b>				<b>б</b>		

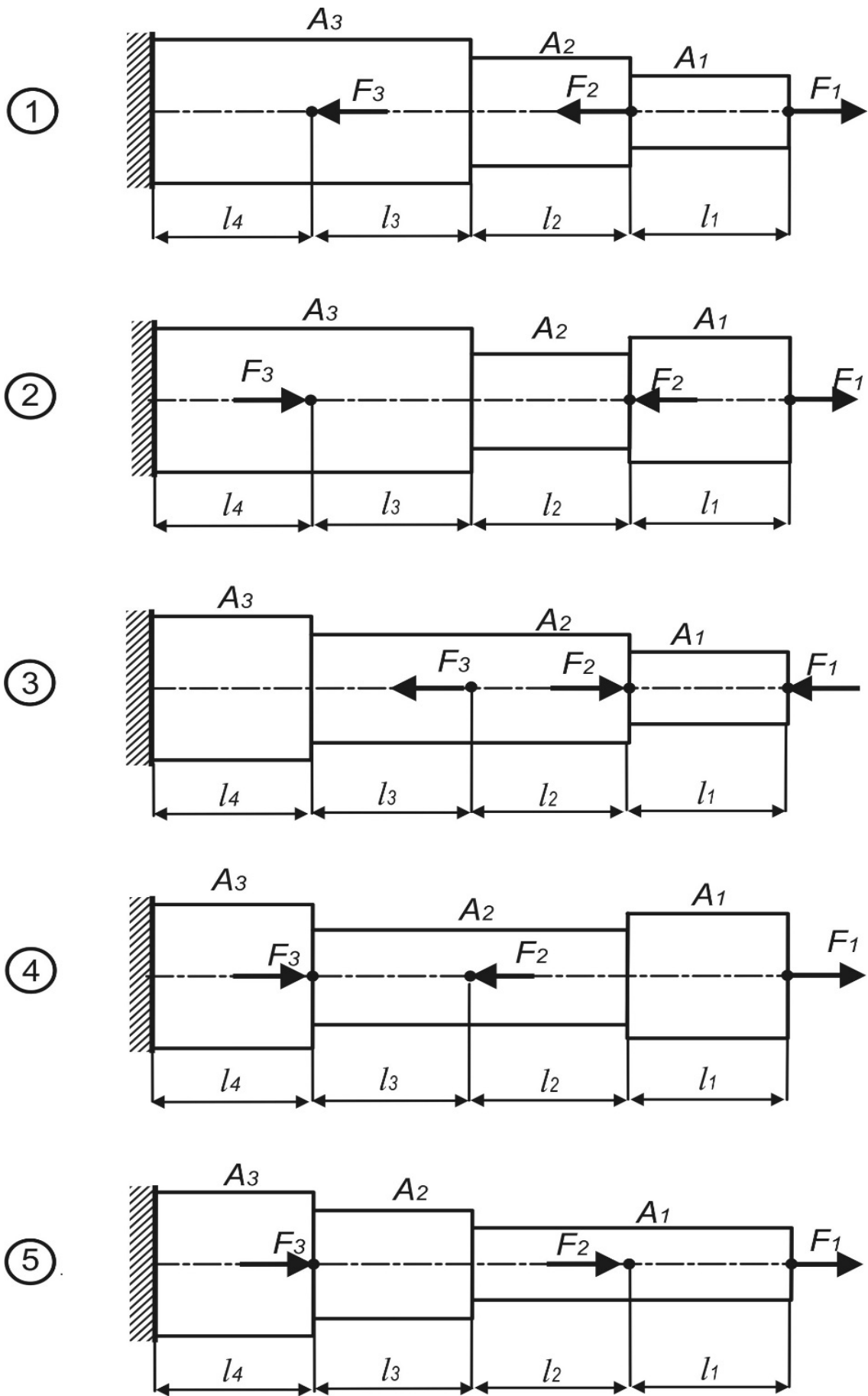


Рисунок 3.1 – Варианты расчетных схем бруса для аудиторной контрольной работы



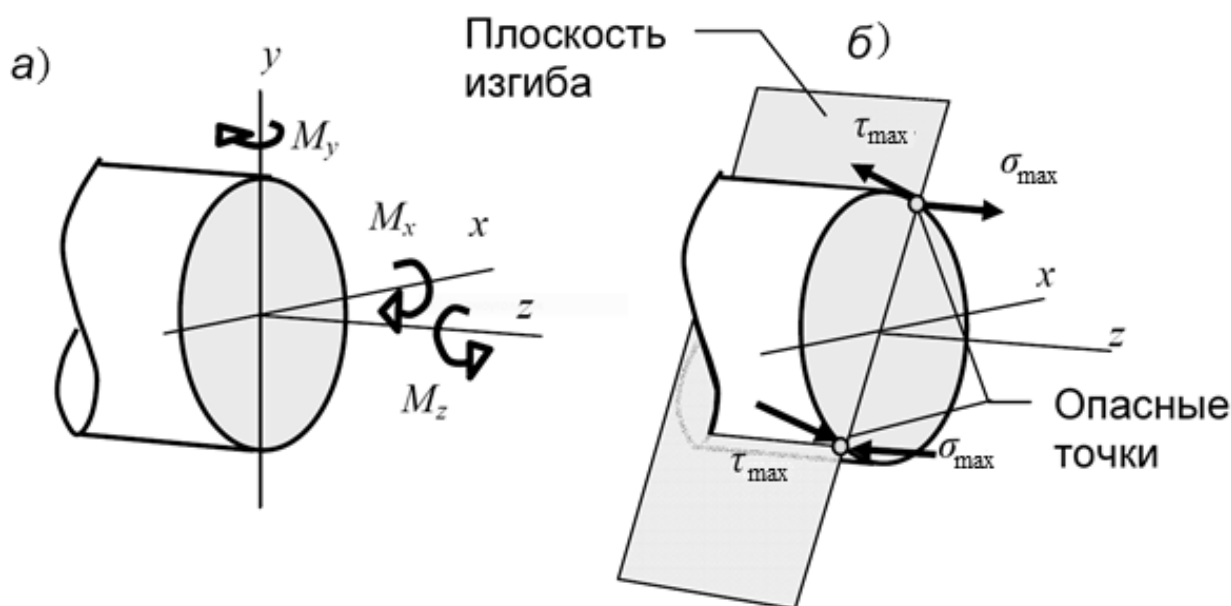
#### 4 Основные соотношения расчета вала круглого поперечного сечения при совместном действии изгиба с кручением

Совместное действие изгиба и кручения является распространенным видом нагружения в технике (валы редукторов, коробок скоростей, валы приводов конвейеров и т. д.).

Силы, действующие на вал (собственный вес вала и вес колес, давление на зубья шестерен, натяжение ремней шкивов и т. п.), вызывают в его поперечном сечении возникновение внутренних силовых факторов (ВСФ):  $M_{кр}$ ,  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $Q_x$ ,  $Q_y$ . Действием поперечных сил, как правило, пренебрегают, поскольку их влияние на общий уровень напряженного состояния вала незначителен. В практических расчетах действие крутящего момента  $M_{кр}$  и изгибающих моментов  $M_x$  и  $M_y$  рассматривают по отдельности с последующим суммированием по соответствующим теориям прочности [1, 2]. Валы чаще всего изготавливаются круглого поперечного сечения, поэтому в данном материале основное внимание будет уделяться такого рода изделиям. Для вала круглого поперечного сечения изгибающие моменты  $M_x$  и  $M_y$  можно всегда заменить результирующим изгибающим моментом

$$M_u = \sqrt{M_x^2 + M_y^2},$$

который действует в наклонной плоскости. Точки пересечения этой плоскости с контуром поперечного сечения являются опасными, в них возникают наибольшие по модулю нормальные  $\sigma_{\max}$  и наибольшие касательные напряжения  $\tau_{\max}$  (рисунок 4.1, б).



а – внутренние усилия; б – максимальные напряжения

Рисунок 4.1 – Совместное действие изгиба с кручением

Величины максимальных напряжений могут быть вычислены с помощью следующих соотношений:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_u}{W_x}; \quad \tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_p}.$$

Чтобы учесть одновременное действие различных компонент напряжений при проведении прочностного анализа, необходимо воспользоваться одной из теорий прочности, например *третьей* или *четвертой* теориями прочности. В соответствии с этими теориями прочности определяются эквивалентные напряжения, которые в последующем могут быть сопоставлены с допускаемыми напряжениями:

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{III}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma];$$

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{IV}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma].$$

Используя эти выражения, производят проверку на прочность или исходя из заданных условий нагружения и допускаемых напряжений для материала вала, определяют его диаметр. Так как моменты сопротивления связаны между собой соотношением  $W_p = 2W_x$ , то приведенные выше два неравенства могут быть преобразованы к следующему виду:

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{III}} = \frac{\sqrt{M_u^2 + M_{кр}^2}}{W_x} = \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_{кр}^2}}{W_x} \leq [\sigma];$$

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{IV}} = \frac{\sqrt{M_u^2 + 0,75M_{кр}^2}}{W_x} = \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2 + 0,75M_{кр}^2}}{W_x} \leq [\sigma].$$

Выражение, стоящее в числителе каждой из этих формул, получило название *эквивалентный момент*  $M_{\text{экв}}^{\text{III(IV)}}$  по третьей либо четвертой теориям прочности.

Напомним, что осевой момент сопротивления для круга описывается выражением

$$W_x = \frac{\pi D^3}{32},$$

а для кольца

$$W_x = \frac{\pi D^3}{32} \left( 1 - \left( \frac{d}{D} \right)^4 \right).$$

Исходя из условия прочности величина диаметра сплошного вала может быть определена из следующего неравенства:

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_{\text{экв}}^{\text{III(IV)}}}{\pi \cdot [\sigma]}}$$

Передаваемая валом мощность  $N$  является работой внешнего скручивающего момента  $m$  и определяется по формуле

$$N = m \cdot \omega = m \cdot \frac{\pi \cdot n}{30},$$

где  $n$  – частота вращения вала, об/мин;

$\omega$  – угловая скорость,  $\text{с}^{-1}$ .

Соответственно, внешний скручивающий момент можно найти по формуле

$$m = \frac{N}{\omega} = \frac{N \cdot 30}{\pi \cdot n}.$$

Основными изгибающими силами являются окружные усилия на зубьях шестерен  $F$  и усилия натяжения ветвей ременной передачи на шкивах  $T$  и  $t$ . Приведение изгибающих усилий к центру тяжести вала диаметром  $d$  в том его сечении, где располагается шестерня, показано на рисунке 4.2, а; в том сечении, где располагается шкив – на рисунке 4.2, б. Окружное усилие на зубчатом колесе средним диаметром  $D$  находят по формуле

$$F = \frac{2 \cdot m}{D}.$$

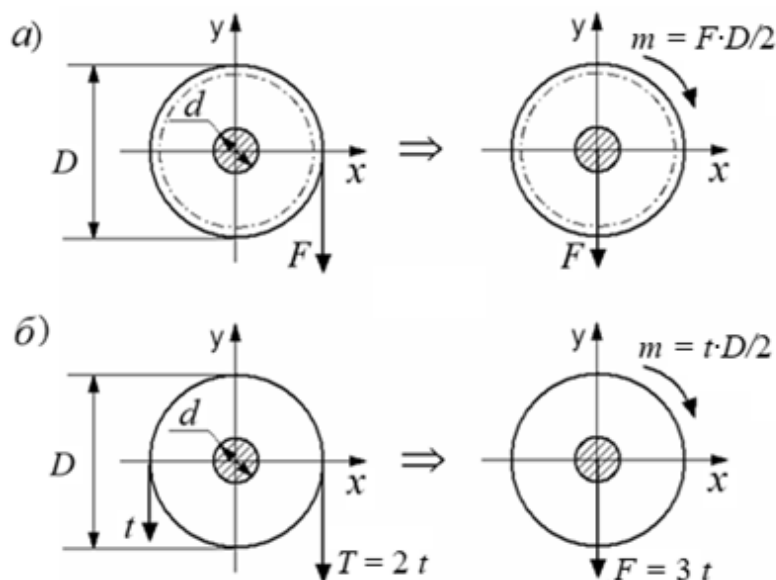


Рисунок 4.2 – Приведение изгибающих усилий на шестерне (а) и шкиве (б) к центру тяжести вала

Изгибающую силу на шкиве диаметром  $D$  при отношении усилий ременной передачи  $T = 2t$  находят по формуле

$$F = T + t = 3 \cdot \frac{2 \cdot m}{D},$$

где  $T$  – усилие натяжения на ведущей ветви передачи;  
 $t$  – усилие натяжения на ведомой ветви передачи.

Расчет вала на прочность ведется в *опасном сечении*, которое определяется по эюрам крутящих и изгибающих моментов при их наиболее неблагоприятном сочетании. Для примера рассмотрим вал, на который действуют скручивающий момент  $m$  и изгибающая сила  $F$  (рисунок 4.3).

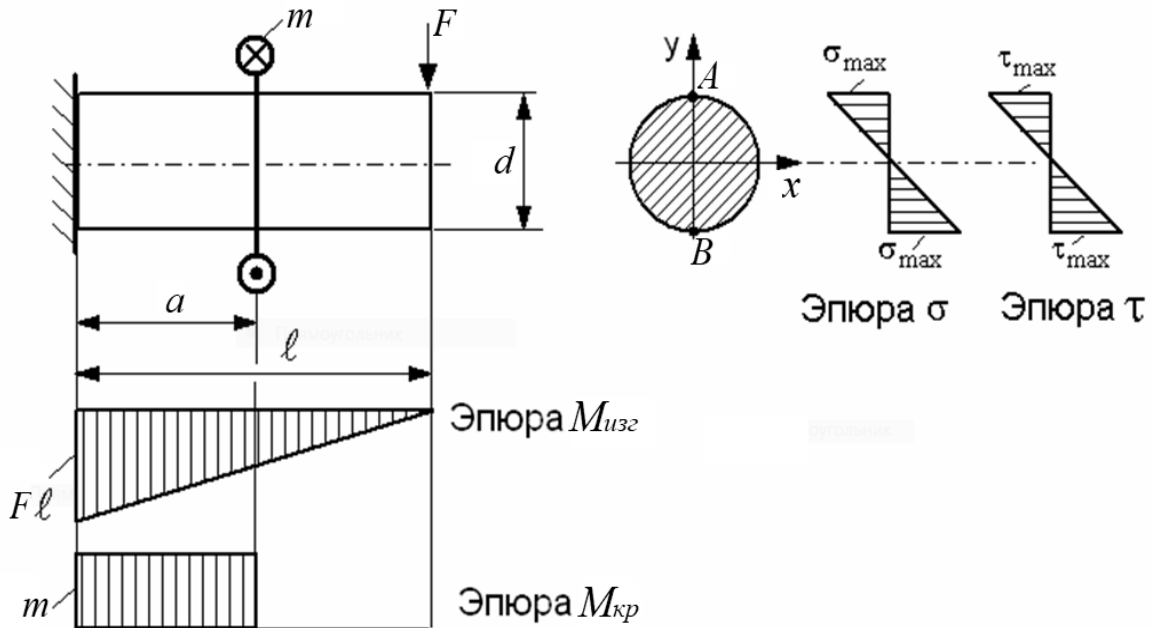


Рисунок 4.3 – Эюры изгибающего и крутящего моментов и эюры нормальных и касательных напряжений в поперечном сечении вала

Опасным будет являться сечение, примыкающее к заделке, и опасными точками в нем точки  $A$  и  $B$ , в которых достигаются максимальные значения нормальных напряжений  $\sigma_{\max}$  от изгибающего момента и максимальные значения касательных напряжений  $\tau_{\max}$  от крутящего момента:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_u}{W_x};$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_p}.$$

Для вала круглого поперечного сечения осевой и полярный моменты сопротивления можно определять по следующим приближенным формулам:

$$W_x = W_y = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0,1d^3;$$

$$W_{\rho} = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0,2d^3 = 2 \cdot W_x.$$

Подставляя в соответствующие теории прочности значения  $\sigma_{\max}$  и  $\tau_{\max}$  можно осуществить проверку на прочность вала при совместном действии изгиба и кручения.

Итак, процедура анализа вала круглого поперечного сечения при совместном действии изгиба с кручением включает в себя последовательное выполнение следующих шагов. Изгибающие силы, действующие в разных плоскостях, раскладывают на вертикальную и горизонтальную составляющие. Затем показывают отдельно схему изгиба вала от всех вертикальных сил и схему изгиба вала от всех горизонтальных сил. В каждой схеме изгиба определяют реакции на опорах. Под каждой схемой строится эпюра изгибающих моментов, причем вертикальные силы создают момент  $M_x$ , а горизонтальные – момент  $M_y$ . Так как у брусков круглого поперечного сечения кривой изгиб невозможен, то поперечное сечение вала будет испытывать прямой изгиб под действием полного изгибающего момента:

$$M_u = \sqrt{M_x^2 + M_y^2},$$

где  $M_x$  и  $M_y$  – изгибающие моменты в вертикальной и горизонтальной плоскостях соответственно.

По результатам расчета полного (суммарного) изгибающего момента в характерных точках вала строится эпюра  $M_u$ , которая характеризует только величину момента. Плоскости действия полных изгибающих моментов в различных сечениях вала различны, но на эпюре все ординаты условно расположены в плоскости чертежа. Для вала на шарикоподшипниковых опорах крайние участки эпюры полных изгибающих моментов очерчены прямыми линиями, внутренние – параболлами, выпуклостью, направленной к нулевой линии.

Эпюра крутящих моментов  $M_{кр}$  строится так же, как при чистом кручении.

При помощи эпюр  $M_{кр}$  и  $M_u$  определяют *опасное сечение*, в котором наиболее неблагоприятно сложились крутящий и изгибающий моменты (для вала постоянного поперечного сечения).

Проверку прочности производят по формуле

$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{M_{\text{экв}}}{W_x} = \frac{M_{\text{экв}} \cdot 32}{\pi \cdot d^3} \leq [\sigma].$$

Проектировочный расчет позволяет определить диаметр вала:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_{\text{экв}}}{\pi \cdot [\sigma]}}.$$

Диаметр вала, выраженный в миллиметрах, необходимо округлить в большую сторону в соответствии с рядом нормальных линейных размеров (таблица 4.1, графа Ra 40).

Таблица 4.1 – Ряд нормальных линейных размеров

Ряд				Ряд					
Ra 5	Ra 10	Ra 20	Ra 40	Ra 5	Ra 10	Ra 20	Ra 40		
10	10	10	10 10,5	100	100	100	100 105		
		11	11 15			110	110 120		
	12	12	12 13		125	125	125 130		
		14	14 15			140	140 150		
	16	16	16		16 17	160	160	160	160 170
			18		18 19			180	180 190
20		20	20 21	200	200		200 210		
		22	22 24		220		220 240		
25	25	25	25 26	250	250	250	250 260		
		28	28 30			280	280 300		
	32	32	32 34		320	320	320 340		
		36	36 38			360	360 380		
40	40	40	40 42	400	400	400	400 420		
		45	45 48			450	450 480		
	50	50	50 53		500	500	500 530		
		56	56 60			560	560 600		
63	63	63	63 67	630	630	630	630 670		
		71	71 75			710	710 750		
	80	80	80 85		800	800	800 850		
		90	90 95			900	900 950		

## 5 Пример подбора вала круглого поперечного сечения при совместном действии изгиба с кручением

*Исходные данные.* На нагруженный и закрепленный вал круглого сплошного сечения (рисунок 5.1) насажены шестерня средним диаметром  $D_1 = 0,23$  м и шкив ременной передачи диаметром  $D_2 = 0,39$  м.

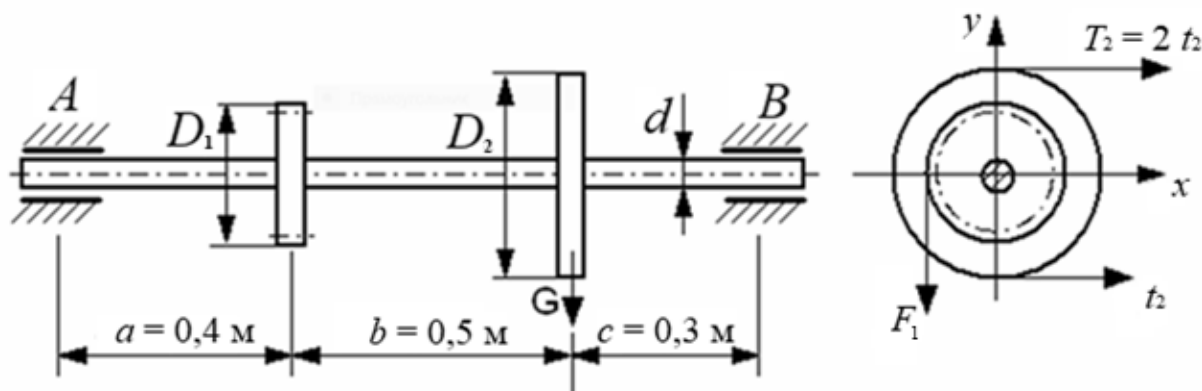


Рисунок 5.1 – Схема закрепления и нагружения вала

Вес шкива  $G = 600$  Н, собственным весом шестерни и вала пренебречь. Вал делает 660 об/мин и передает мощность, равную 40 кВт. Допускаемые напряжения для материала вала  $[\sigma] = 80$  МПа.

*Требуется* определить необходимый диаметр вала, используя четвертую теорию прочности и округлить его значение до стандартных величин (см. таблицу 4.1, графу Ra 40).

*Решение*

Определяем внешние крутящие моменты, передаваемые валом через шестерню на шкив:

$$m = \frac{N \cdot 30}{\pi \cdot n} = \frac{40000 \cdot 30}{3,14 \cdot 660} = 579 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

На рисунке 5.2 приведена расчетная схема и эпюра крутящих моментов, соответствующая данной схеме нагружения.

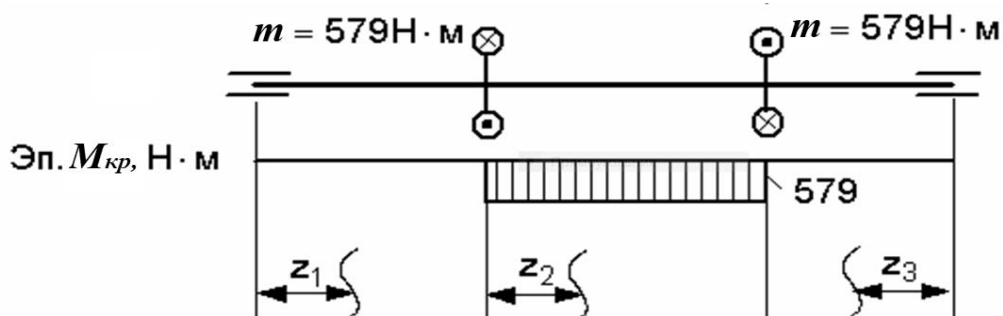


Рисунок 5.2 – Расчетная схема вала и эпюра крутящих моментов

Построение эпюры внутреннего силового фактора (крутящего момента  $M_{кр}$ ), возникающего в сечениях вала, производим по участкам 1 и 2, двигаясь слева направо, а на участке 3 – двигаясь справа налево (см. рисунок 5.2):

- участок 1  $M_{кр} = 0$ ;
- участок 2  $M_{кр} = m = 759 \text{ Н}\cdot\text{м}$ ;
- участок 3  $M_{кр} = 0$ .

Рассмотрим теперь нагрузки, действующие в вертикальной плоскости на вал, и построим эпюру изгибающих моментов  $M_x$ , возникающих в поперечных сечениях (рисунок 5.3).

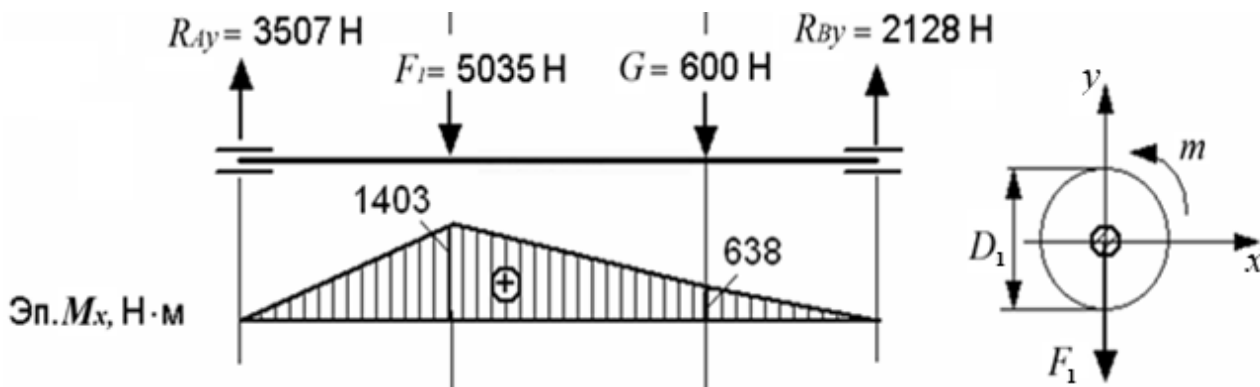


Рисунок 5.3 – Расчетная схема анализа вала в вертикальной плоскости и эпюра изгибающих моментов  $M_x$

Определим окружное усилие  $F_1$ , действующее на шестерню и вал в вертикальной плоскости:

$$F_1 = \frac{2 \cdot m}{D_1} = \frac{2 \cdot 579}{0,23} = 5035 \text{ Н}.$$

Схема действия вертикальных изгибающих сил показана на рисунке 5.3, на ней показано, что кроме силы  $F_1$  в вертикальной плоскости действует собственный вес шкива  $G$ .

Для определения опорных реакций  $R_{Ay}$  и  $R_{By}$  составим уравнения статического равновесия вала:

$$\sum m_B^{верм} = 0; \quad R_{Ay} \cdot 1,2 - 5035 \cdot 0,8 - 600 \cdot 0,3 = 0;$$

$$R_{Ay} = \frac{4208}{1,2} = 3507 \text{ Н};$$

$$\sum m_A^{верм} = 0; \quad R_{By} \cdot 1,2 - 5035 \cdot 0,4 - 600 \cdot 0,9 = 0;$$

$$R_{By} = \frac{2554}{1,2} = 2128 \text{ Н}.$$



Выполним проверку:

$$\sum y = 0; \quad R_{Ay} - F_1 - G + R_{By} = 3507 - 5035 - 600 + 2128 = 0.$$

Как видно, уравнение обращается в тождество, следовательно, реакции опор определены верно.

Перейдем к построению эпюры изгибающих моментов  $M_x$  по участкам.

Следует иметь в виду, что при построении эпюр изгибающих моментов движение по участкам осуществляется аналогичным образом тому, как это делалось и при построении эпюры крутящих моментов (см. рисунок 5.2).

Участок 1 ( $0 \leq z_1 \leq 0,4$  м):

$$M_x = R_{Ay} \cdot z_1 = 3507 \cdot z_1;$$

$$z_1 = 0; \quad M_x = 0;$$

$$z_1 = 0,4 \text{ м}; \quad M_x = 1403 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Участок 2 ( $0 \leq z_2 \leq 0,5$  м):

$$M_x = R_{Ay} \cdot (0,4 + z_2) - F_1 \cdot z_2 = 3507 \cdot (0,4 + z_2) - 5035 \cdot z_2;$$

$$z_2 = 0; \quad M_x = 1403 \text{ Н}\cdot\text{м};$$

$$z_2 = 0,5 \text{ м}; \quad M_x = 638 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Участок 3 ( $0 \leq z_3 \leq 0,3$  м):

$$M_x = R_{By} \cdot z_3 = 2128 \cdot z_3;$$

$$z_3 = 0; \quad M_x = 0;$$

$$z_3 = 0,3 \text{ м}; \quad M_x = 638 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

В результате проделанной работы эпюра изгибающих моментов  $M_x$  будет выглядеть, как это показано на рисунке 5.3.

Перейдем теперь к построению эпюры изгибающих моментов  $M_y$  от действия сил в горизонтальной плоскости. Изгибающая сила  $F_2$  от ременной передачи на шкиве, действующая на вал в горизонтальной плоскости, будет иметь следующее значение:

$$F_2 = 3 \cdot \frac{2 \cdot m}{D_2} = 3 \cdot \frac{2 \cdot 579}{0,39} = 8908 \text{ Н}.$$

Схема действия сил в горизонтальной плоскости изображена на рисунке 5.4.

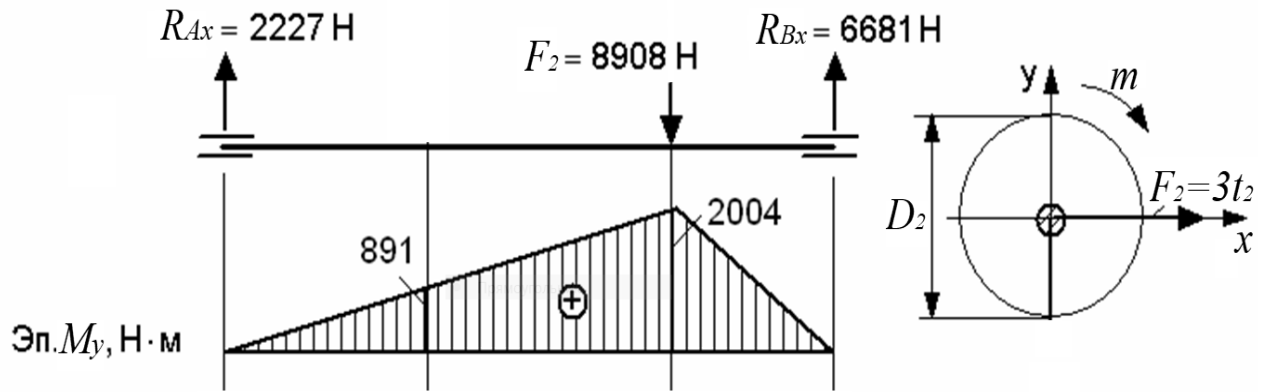


Рисунок 5.4 – Схема действия сил в горизонтальной плоскости и эпюра изгибающих моментов  $M_y$

Кроме того, на этом рисунке приведена эпюра изгибающих моментов  $M_y$ , построение которой осуществлялось на основании следующих рассуждений.

Для определения опорных реакций  $R_{Ax}$  и  $R_{Bx}$  составим уравнения статического равновесия вала:

$$\sum m_B^{zop} = 0; \quad R_{Ax} \cdot 1,2 - 8908 \cdot 0,3 = 0;$$

$$R_{Ax} = \frac{2672,4}{1,2} = 2227 \text{ Н};$$

$$\sum m_A^{zop} = 0; \quad R_{Bx} \cdot 1,2 - 8908 \cdot 0,9 = 0;$$

$$R_{Bx} = \frac{8017,2}{1,2} = 6681 \text{ Н}.$$

Выполним проверку:

$$\sum x = 0; \quad R_{Ax} - F_2 + R_{Bx} = 2227 - 8908 + 6681 = 0.$$

Построение эпюры изгибающих моментов  $M_y$  по участкам.

Участок 1 ( $0 \leq z_1 \leq 0,4$  м):

$$M_y = R_{Ax} \cdot z_1 = 2227 \cdot z_1;$$

$$z_1 = 0; \quad M_y = 0;$$

$$z_1 = 0,4 \text{ м}; \quad M_y = 891 \text{ Н·м}.$$

Участок 2 ( $0 \leq z_2 \leq 0,5$  м):

$$M_y = R_{Ax} \cdot (0,4 + z_2) = 2227 \cdot (0,4 + z_2);$$

$$z_2 = 0; \quad M_y = 891 \text{ Н}\cdot\text{м};$$

$$z_2 = 0,5 \text{ м}; \quad M_y = 2004 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Участок 3 ( $0 \leq z_3 \leq 0,3 \text{ м}$ ):

$$M_y = R_{Bx} \cdot z_3 = 6681 \cdot z_3;$$

$$z_3 = 0; \quad M_y = 0;$$

$$z_3 = 0,3 \text{ м}; \quad M_y = 2004 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Вычисляем значения полных изгибающих моментов  $M_u$  в характерных сечениях вала по формуле

$$M_u = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}.$$

Откуда

$$M_{D_1} = \sqrt{1403^2 + 891^2} = 1662 \text{ Н}\cdot\text{м}; \quad M_{D_2} = \sqrt{638^2 + 2004^2} = 2103 \text{ Н}\cdot\text{м};$$

$$M_A = 0; \quad M_B = 0.$$

Эпюра полных изгибающих моментов  $M_u$  показана на рисунке 5.5.

Опасным сечением вала является сечение по месту расположения шкива диаметром  $D_2$ , в нем действуют наибольший изгибающий момент  $M_u = 2103 \text{ Н}\cdot\text{м}$  и крутящий момент  $M_{кр} = 579 \text{ Н}\cdot\text{м}$  (см. рисунок 5.5).

Определим значение эквивалентного момента в опасном сечении вала по четвертой теории прочности:

$$M_{\text{экв}}^{\text{IV}} = \sqrt{M_{\text{изг}}^2 + 0,75 \cdot M_{\text{кр}}^2} = \sqrt{2103^2 + 0,75 \cdot 579^2} = 2162 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Зная величину максимального эквивалентного момента по четвертой теории прочности определим диаметр вала:

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_{\text{экв}}^{\text{IV}}}{\pi \cdot [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 2162}{3,14 \cdot 80 \cdot 10^6}} = 0,065 \text{ м} = 65 \text{ мм}.$$

Посредством использования таблицы 4.1 и графы Ра 40 диаметр вала принимаем равным  $d = 67 \text{ мм}$ .

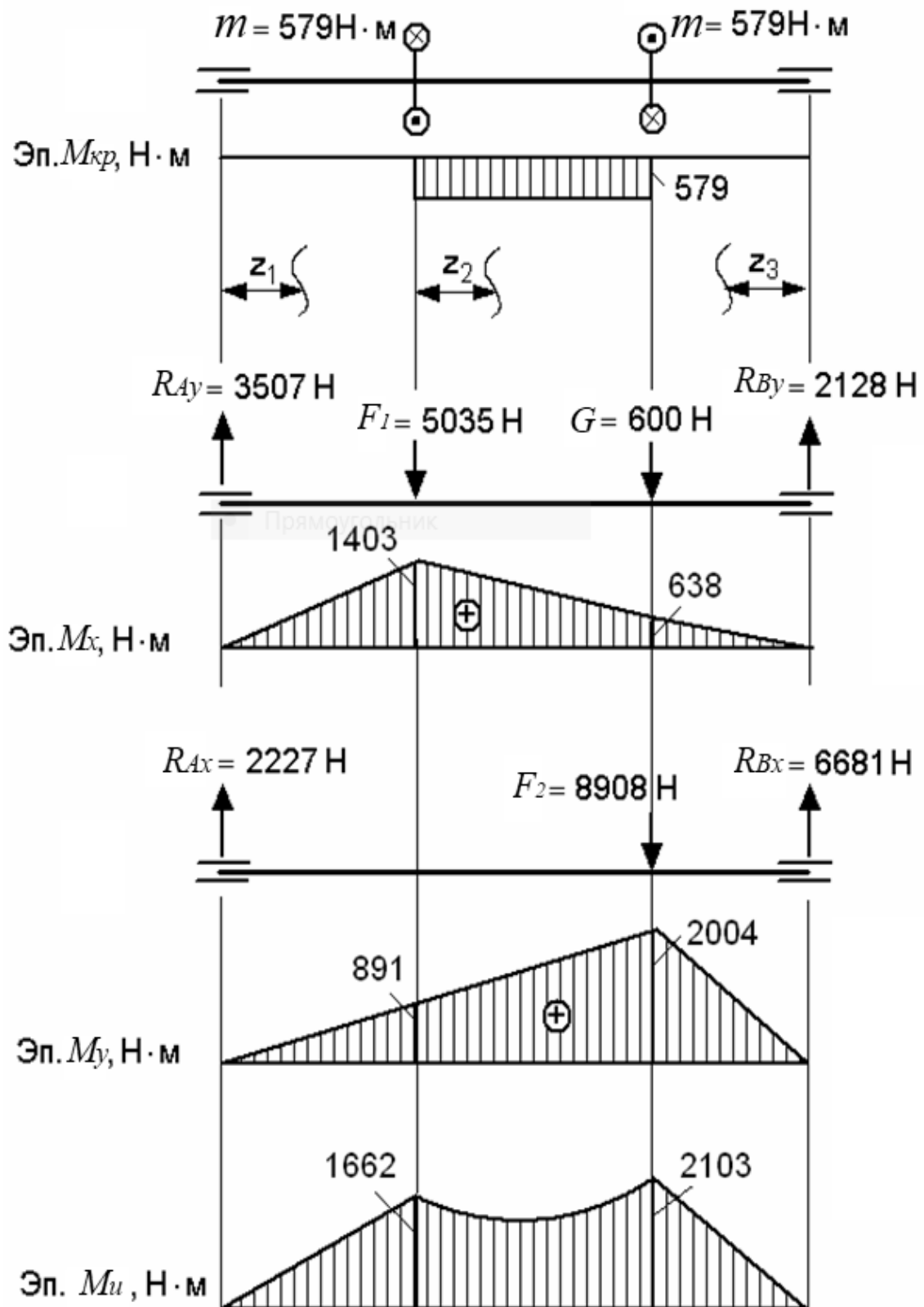


Рисунок 5.5 – Эпюры моментов и расчетные схемы для анализа вала

## 6 Задания для аудиторной контрольной работы

На вал круглого сплошного сечения диаметром  $d$  насажены шестерня средним диаметром  $D_1$  и шкив ременной передачи диаметром  $D_2$  (рисунок 6.1). Вес шкива равен  $G$ , собственными весами вала и шестерни пренебречь. Вал делает  $n$  оборотов в минуту и передает мощность, равную  $N$  киловатт. Допустимое напряжение материала вала  $[\sigma] = 80$  МПа.

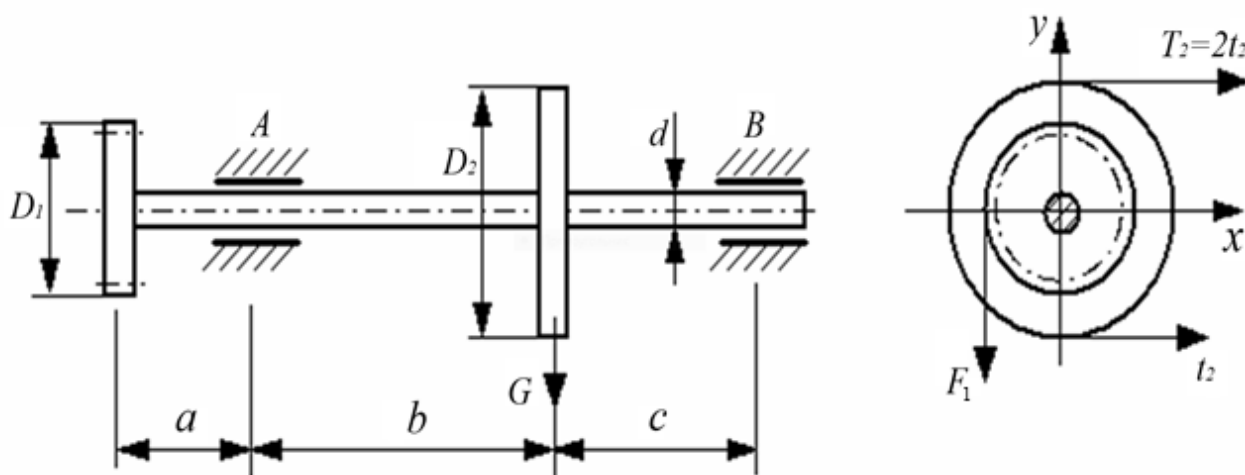


Рисунок 6.1 – Расчетная схема вала

Требуется определить необходимый диаметр вала, используя четвертую теорию прочности, и округлить его значение до стандартных величин (см. таблицу 4.1, графу Ra 40).

Исходные данные к задаче представлены в таблице 6.1.

Приступая к решению задачи, необходимо повторить правила построения эпюр крутящих и изгибающих моментов с использованием метода сечений.

На шарикоподшипниковых опорах реактивный крутящий момент отсутствует, поэтому эпюра  $M_{кр}$  строится только от внешних скручивающих моментов.

От изгибающих сил на опорах вала возникают реакции, которые определяются из уравнений статического равновесия.

При построении эпюр изгибающих моментов используют следующее правило знаков: изгибающий момент считается положительным, если от его действия участок изгибается выпуклостью вниз (верхние волокна сжаты), и отрицательным, если от его действия участок изгибается выпуклостью вверх (нижние волокна сжаты).

Индивидуальные исходные данные к проведению расчета необходимо взять из таблицы 6.1 в соответствии с последними тремя цифрами номера зачетной книжки. В таблице 6.1 приведена подробная информация по выбору этих исходных данных.

Таблица 6.1 – Значения исходных данных

Номер строки	$N$ , кВт	$n$ , об/мин	$G$ , Н	$a$ , м	$b$ , м	$c$ , м	$D_1$ , мм	$D_2$ , мм
1	10	1100	200	0,11	0,41	0,31	110	310
2	20	1200	220	0,12	0,42	0,32	120	320
3	30	1300	240	0,13	0,43	0,33	130	330
4	40	1400	260	0,14	0,44	0,34	140	340
5	50	1500	280	0,15	0,45	0,35	150	350
6	60	1600	300	0,16	0,46	0,36	160	360
7	70	1700	320	0,17	0,47	0,37	170	370
8	80	1800	340	0,18	0,48	0,38	180	380
9	90	1900	360	0,19	0,49	0,39	190	390
0	100	2000	380	0,20	0,50	0,40	200	400
	<b>а</b>	<b>б</b>	<b>в</b>	<b>а</b>	<b>б</b>	<b>в</b>	<b>б</b>	<b>в</b>

*Примечание* – Выбор исходных данных осуществляется по трем последним цифрам номера зачетной книжки. Первые буквы русского алфавита, располагают под указанными цифрами, например:

0 9 4 2 5 0  
а б в

Например, для шифра 094250 выбираем следующие исходные данные:  $N = 20$  кВт;  $n = 1500$  об/мин;  $G = 380$  Н;  $a = 0,12$  м;  $b = 0,45$  м;  $c = 0,4$  м;  $D_1 = 150$  мм;  $D_2 = 400$  мм

### ***Контрольные вопросы по теме «Совместное действие изгиба с кручением»***

- 1 Что называют сложным сопротивлением?
- 2 Приведите примеры сложного сопротивления.
- 3 Какие внутренние силовые факторы возникают при совместном действии изгиба и кручения?
- 4 Что изображено на расчетной схеме?
- 5 Какие нагрузки необходимо рассматривать при определении изгибающего момента в вертикальной плоскости?
- 6 Какие нагрузки необходимо рассматривать при определении изгибающего момента в горизонтальной плоскости?
- 7 При помощи каких эпюр определяют опасное сечение вала?
- 8 Какие напряжения возникают в поперечном сечении вала при совместном действии изгиба и кручения, какие внутренние силовые факторы их вызывают?

9 Какие задачи решают из условия прочности при совместном действии изгиба и кручения?

10 От чего зависит допускаемое напряжение в формуле определения диаметра вала?

11 Какие теории прочности могут использоваться при определении диаметра вала и почему?

12 Запишите условие прочности при совместном действии изгиба и кручения.

### Список литературы

1 **Кузменко, И. М.** Механика материалов: учебное пособие: в 2 ч. / И. М. Кузменко. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2020. – Ч. 1. – 289 с.: ил.

2 **Кузменко, И. М.** Механика материалов: учебное пособие: в 2 ч. / И. М. Кузменко. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2020. – Ч. 2. – 281 с.: ил.

3 **Кривошапко, С. Н.** Сопротивление материалов: учебник и практикум для прикладного бакалавриата / С. Н. Кривошапко. – Москва: Юрайт, 2016. – 413 с.

4 Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности: учебник / Г. С. Варданян [и др.]; под ред. Г. С. Варданяна. – 2-е изд., испр. и доп. – Москва: ИНФРА-М, 2011. – 638 с.

5 **Миронов, Л. П.** Краткий курс сопротивления материалов: учебное пособие / Л. П. Миронов. – Хабаровск: ДВГУПС, 2011. – 117 с.