Студенческий Вестник Электронный научно-технический журнал Октябрь 2014 года

НОВЫЕ СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

М.Г. Концевой, А.А. Самосадов, **Л.А. Данилович, Л.В. Плетнев**

С помощью компьютерного эксперимента получено распределение определителей третьего порядка составленных из цифр и установлены числовые характеристики полученного распределения. Анализ полученных данных позволил установить три новых свойства определителей.

Ключевые слова: свойства определителей, числовые характеристики, новые свойства

Понятие определителя и связанного с ним понятия матрица введено около 400 лет назад. В изучение определителей и матриц внесли вклад десятки выдающихся ученых, среди которых можно выделить Лейбница, Крамера, Вандермонда, Гаусса, Коши, Бине, Якоби, Кэли, Сильвестра, Кронекера, Вейерштрасса [1]. В настоящее время определители широко используются в математике и физике: определители Вронского, якобианы перехода из одной системы координат в другую, и т.д. Последние свойства определителей были установлены почти 150 лет назад.

Появление вычислительной техники позволило подойти к проблеме определителей и их свойств с другой точки зрения. В данной статье анализируются распределения определителей третьего порядка в зависимости от величины определителей S с помощью компьютерных экспериментов.

В данной части исследований предполагалось, что элементы определителя могли быть любыми цифрами от 1 до 9. Вычисление таких определителей представляет одну из простейших задач в курсе алгебры и теории чисел [2, 3]. С помощью комбинаторики можно подсчитать число всех возможных определителей третьего порядка – N = 99 = 387420489. Для анализа статистических свойств определителей были поставлены следующие задачи: найти количество определителей, величины которых равны нулю (Δ); найти величину максимального (Sмакс) и минимального (Sмин) определителей; сколько определителей положительных (S+) и сколько отрицательных (S−). Получить распределение определителей в зависимости от величин определителей (S) и найти числовые характеристики данного распределения: среднее арифметическое ($\overline{S}$), среднее квадратическое отклонение (σ), асимметрию (As) и эксцесс (Ek). Необходимо отметить, что аналитически такую задачу решить невозможно.

Ответы на поставленные вопросы были получены с помощью компьютерного эксперимента. Определителей равных нулю оказалось Δ = 5902335, или 1,5235%. Величины максимальных определителей оказались равными 1216. Максимальных определителей, представленных в таблице 1, оказалось 3.

***Таблица* 1. Максимальные определители**

$\begin{vmatrix} 1 & 9 & 9 \\ 9 & 1 & 9 \\ 9 & 9 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 9 & 1 & 9 \\ 9 & 9 & 1 \\ 1 & 9 & 9 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 9 & 9 & 1 \\ 1 & 9 & 9 \\ 9 & 1 & 9 \end{vmatrix}$

Положительных и отрицательных определителей оказалось равное количество – по 190759077 (S± / N = 0,49238252). Анализ результатов компьютерного экспериментов показал, что от минимального до максимального значения определители для нескольких десятков значений S не существуют (в областях максимальных и минимальных значений).

Была проведена статистическая обработка полученных данных по формулам для начальных моментов и получены числовые характеристики распределения на основе этих величин [4].

$$\nu_k = \sum_{i=1}^{N} s_i^k / N, \quad (1)$$

где N – число определителей, S_i – величина i-го определителя [4]. Среднее арифметическое для данного вариационного ряда равно $\overline{S}$ = 0, среднее квадратическое отклонение равно σ = 147,571, асимметрия $A_s = 0$ и эксцесс $E_k =$ 0,26606. Дополнительный визуальный анализ полученных данных показал симметрию полученного распределения относительно $S = 0$. На рис. 1 приведен полигон частот, анализ которого показывает, что частоты определителей не являются монотонно возрастающими или убывающими функциями.

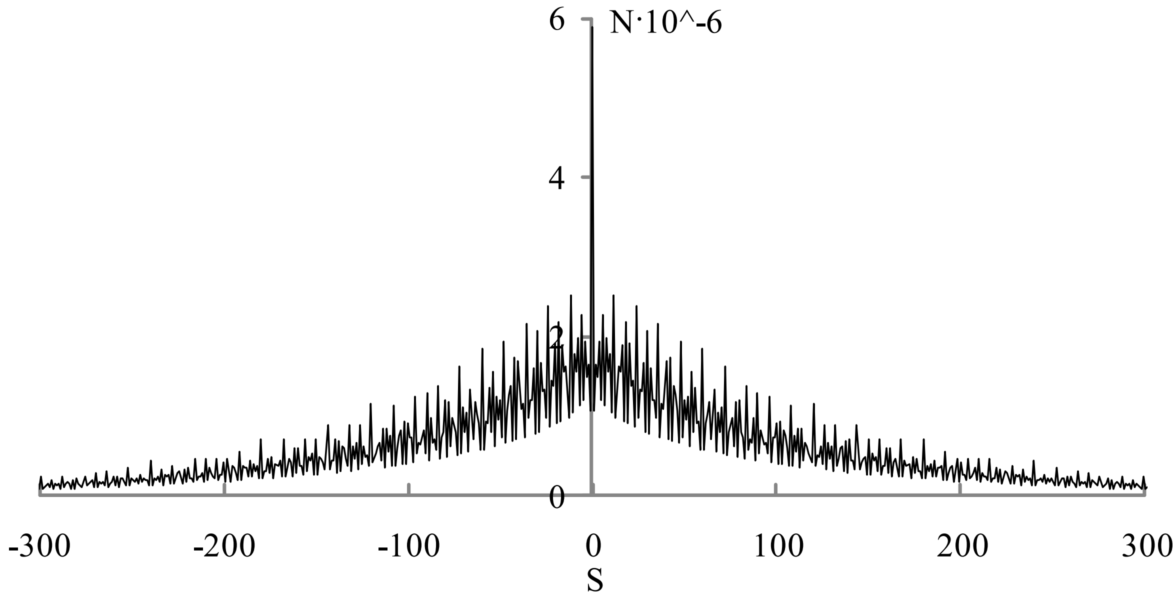

Рис. 1. Полигон частот.

Анализ полученных результатов позволил установить дополнительные свойства определителей.

Свойство 1.

Проблема отыскания определителей с максимальными и минимальными значениями может быть решена другим способом. Можно считать величину определителя S как функцию от 9 независимых переменных a_{ij}. Найдя частные производные от функции S по этим переменным, и приравняв их нулю, получим 9 алгебраических уравнений. Решение этой системы уравнений приводит к системе 3-х уравнений, зависящих от 6 независимых переменных.

Анализ этих производных позволил установить новую закономерность, связывающую частную производную от определителя по независимой переменной a_{ij} (элементу определителя):

$$\frac{\partial S}{\partial a_{ij}} = A_{ij}, \quad (2)$$

т.е. такая частная производная равна соответствующему алгебраическому дополнению данного элемента. Эта закономерность справедлива для определителей любых порядков. Доказательство этой закономерности основывается на разложении определителя по i строке или j столбцу. Данный элемент входит в разложение только один раз и умножается на алгебраическое дополнение, которое не зависит от этого элемента.

Определитель S получается как сумма интегралов от алгебраических дополнений по элементам a_{ij}

$$S = \sum_{j=1}^{n} \int_{0}^{a_{ij}} A_{ij} da_{ij} \ . \ (3)$$

Определение. Производная от определителя по элементу равна алгебраическому дополнению этого элемента.

Свойство 2.

Анализ максимальных определителей, приведенных в таблице 2, позволил установить еще одну закономерность. Если определитель повернуть на 90^0 в положительном или отрицательном направлении, то знак определителя изменится на противоположный

$\Delta = -\Delta \downarrow .$ (4)

Если такой определитель повернуть еще раз на 90^0, то знак определителя изменится на противоположный, т.е. станет таким, какой был у исходного определителя. Величина такого определителя будет равна величине исходного определителя. Например, первый определитель первой строки совпадает по величине с четвертым определителем этой строки, т.к. их величины равны 412. Это свойство справедливо для определителей любых порядков с любыми элементами. Доказательство не представляет трудностей и начинается с определителей второго порядка.

Определение. При повороте определителя на 90^0 знак определителя меняется на противоположный.

Свойство 3.

Для определителей третьего порядка и выше получено свойство, связанное с вычислением величины определителя, полученного в результате перестановки двух элементов определителя ($a_{ij} \leftrightarrow a_{ik}$ или $a_{ij} \leftrightarrow a_{kj}$), находящихся в одной строке или в одном столбце. Величина нового определителя S_n может быть выражена через величины этих элементов и их алгебраические дополнения в исходном определителе

$S_n = S - (a_{ij} - a_{ik}) \cdot (A_{ij} - A_{ik})$, (5)

где S – величина исходного определителя, A_{ij}, A_{ik} – соответствующие алгебраические дополнения для элементов a_{ij}, a_{ik}.

Для величины нового определителя S_n, полученного заменой двух элементов, находящихся не в одной строке или столбце, получена обобщающая формула

$S_n = S - (a_{ij} - a_{lk}) \cdot (A_{ij} - A_{lk}) - (-1)^{i+j+l+k} (a_{ij} - a_{lk})^2 \cdot M_{ij,lk}$, (6)

где $M_{ij,lk}$ – минор второго порядка/типа. В случае определителя третьего порядка он равен элементу a_{vr}, где индексы v и r не совпадают с индексами переставляемых элементов. мМожно ввести понятие алгебраического дополнения второго порядка

$A_{ij,lk} = (-1)^{i+j+l+k} M_{ij,lk}$. (7)

Определение. При взаимной замене двух элементов величина нового определителя может быть выражена через величину старого определителя, величины этих элементов и их алгебраические дополнения.

Компьютерные эксперименты, проведенные для получения распределения определителей третьего порядка, позволили получить новую уникальную информацию и закономерности, которые сложно или невозможно получить в традиционном подходе изучения определителей. Установлены новые закономерности, связанные с распределением определителей по величине и перестановкой элементов в определителе. Проделанная работа оказалась полезной не только с педагогической точки зрения, но и с научной. Полученные результаты можно использовать в криптографии. К сожалению, такой же анализ для определителей четвертого порядка на обычных компьютерах невозможен, т.к. объемы вычислений возрастают в несколько миллиардов раз.

Литература

1. *Александрова Н.В.* Математические термины. – М.: Высшая школа, 1978. – 190 с.
2. *Гусак А.А.* Справочник по высшей математике. – Мн.: Навука і тэхніка, 2003. – 480 с.
3. *Лопшиц А.М.* К вопросу о преподавании теории определителей. // Математическое просвещение. вып.2, 1957. – С. 51–59.
4. *Гмурман В.Е.* Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшая школа, 2003. – 479 с.

Концевой Максим Геннадьевич
Студент инженерно-экономического факультета
Белорусско-Российский университет г. Могилев
Тел.: +375(29) 126-94-20
E-mail: clainatomi.ctb@gmail.com
Самосадов Артем Андреевич
Студент инженерно-экономического факультета
Белорусско-Российский университет г. Могилев
Тел.: +375(25) 708-22-38
E-mail: pizzaeueu@gmail.ru
Данилович Людмила Александровна
Доцент кафедры высшей математики, к-т физ.-матем. наук
Белорусско-Российский университет г. Могилев
Тел.: +375(29) 692-59-64
E-mail: danilovich62@gmail.com
Плетнев Леонид Владимирович
Профессор кафедры высшей математики, д-р физ.-матем. наук
Тверской государственный технический университет г. Тверь
Тел.: +375(29) 746-19-53
E-mail: pletnev@tut.by