2. Амелькин В.В., Чинь Зань Данг. *О сильной изохронности дифференциальных систем Коши–Римана* // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 1993. № 2. С. 26–30.

3. Амелькин В.В. *Об одной гипотезе в теории изохронных систем Льенара* // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 10. С. 1283–1289.

4. Амелькин В.В, Доличанин-Джекич Д. *О сильной изохронности высших порядков систем Коши–Римана с однородными полиномиальными возмущениями линейного центра* // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 5. С. 687–691.

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ВАЛЛЕ-ПУССЕНА ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА ВТОРОГО ПОРЯДКА

Кашпар А.И.

Белорусско-Российский университет, Могилев, Беларусь
alex.kashpar@tut.by

Изучается матричное уравнение

$$\frac{d^2\mathbf{X}}{dt^2} = \mathbf{A}(t)\frac{d\mathbf{X}}{dt} + \frac{d\mathbf{X}}{dt}\mathbf{B}(t) + \lambda(\mathbf{A}_0(t)\mathbf{X}\mathbf{A}_1(t) + \mathbf{B}_0(t)\mathbf{X}\mathbf{B}_1(t)) +$$

$$+ \lambda(\mathbf{A}_2(t)\frac{d\mathbf{X}}{dt} + \frac{d\mathbf{X}}{dt}\mathbf{B}_2(t)) + \mathbf{F}_0(t) + \lambda\mathbf{F}_1(t) \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$\mathbf{X}(0,\lambda) = \mathbf{M}, \quad \mathbf{X}(\omega,\lambda) = \mathbf{N}, \tag{2}$$

где $t \in [0,\omega]$, $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{B}(t)$, $\mathbf{F}_0(t)$, $\mathbf{F}_1(t)$, $\mathbf{A}_i(t)$, $\mathbf{B}_i(t)$ $(i = 0,1,2)$ – матрицы класса $\mathbb{C}[0,\omega]$ соответствующих размерностей; $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$ – заданные вещественные матрицы.

Задача (1), (2) представляет собой задачу Валле-Пуссена в матричной постановке. В векторном случае такая задача качественными методами сравнительно хорошо изучена (см., например, [1, с. 491]). Эти задачи встречаются в ряде проблем математической физики и прикладной математики. Весьма важную роль эти задачи играют в теплофизике [2]. Задача (1), (2) ранее никем не изучалась.

В данной работе с помощью конструктивного метода [3, гл. 1] получены коэффициентные достаточные условия однозначной разрешимости исследуемой задачи, а также дана оценка области локализации решения.

Сначала сведем задачу (1), (2) к эквивалентной интегральной задаче, при этом вместо уравнения (1) будем рассматривать эквивалентную ему систему уравнений

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{Y}, \quad \frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{Y} + \mathbf{Y}\mathbf{B}(t) + \tilde{\mathbf{H}}(t,\lambda,\mathbf{X},\mathbf{Y}), \tag{3}$$

где

$$\tilde{\mathbf{H}}(t,\lambda,\mathbf{X},\mathbf{Y}) = \lambda(\mathbf{A}_0(t)\mathbf{X}(t,\lambda)\mathbf{A}_1(t) + \mathbf{B}_0(t)\mathbf{X}(t,\lambda)\mathbf{B}_1(t)) +$$

$$+ \lambda(\mathbf{A}_2(t)\frac{d\mathbf{X}(t,\lambda)}{dt} + \frac{d\mathbf{X}(t,\lambda)}{dt}\mathbf{B}_2(t)) + \mathbf{F}_0(t) + \lambda\mathbf{F}_1(t) \equiv \mathbf{H}(t,\lambda).$$

Обозначим через $\mathbf{U}(t)$, $\mathbf{V}(t)$ интегральные матрицы уравнений соответственно

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{U}, \quad \mathbf{U}(0) = \mathbf{E}_n, \quad \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{V}\mathbf{B}(t), \quad \mathbf{V}(0) = \mathbf{E}_m, \tag{4}$$

где $\mathbf{E}_k$ – единичная матрица порядка k.

Следуя методике, используемой в [4], на основе (2)–(4) получим интегральную задачу, эквивалентную (1), (2),

$$\mathbf{X}(t,\lambda) = \mathbf{M} + \int\limits_0^t \mathbf{Y}(\tau,\lambda)\,d\tau, \tag{5}$$

$$\mathbf{Y}(t,\lambda) = \mathbf{U}(t)\left(\mathbf{\Phi}^{-1}(\mathbf{N}-\mathbf{M})\right)\mathbf{V}(t) +$$
$$+\,\mathbf{U}(t)\mathbf{\Phi}^{-1}\Bigg(\int\limits_0^\omega \mathbf{U}(\tau)\Bigg(\int\limits_\tau^t \mathbf{U}^{-1}(s)\mathbf{H}(s,\lambda)\mathbf{V}^{-1}(s)\,ds\Bigg)\mathbf{V}(\tau)\,d\tau\Bigg)\mathbf{V}(t), \tag{6}$$

где $\mathbf{\Phi}$ – линейный матричный оператор, $\mathbf{\Phi}\mathbf{Z}(t,\lambda) = \int_0^\omega \mathbf{U}(\tau)\mathbf{Z}(t,\lambda)\mathbf{V}(\tau)\,d\tau$, который предполагаем однозначно обратимым.

Для получения условий существования и единственности решения краевой задачи (2), (3) используется модификация [3, §3.4] обобщенного принципа сжимающих отображений [5, с. 94] применительно к эквивалентной интегральной задаче (5), (6).

Обозначения:

$$\gamma = \left\|\mathbf{\Phi}^{-1}\right\|, \quad \varepsilon = |\lambda|, \quad \widetilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{UV}} = \mathbf{M} + \mathbf{P}_{\mathbf{UV}} + \mathcal{L}_1(\mathbf{0},\mathbf{0}), \quad \widetilde{\mathbf{Q}}_{\mathbf{UV}} = \mathbf{Q}_{\mathbf{UV}} + \mathcal{L}_2(\mathbf{0},\mathbf{0}),$$

$$\alpha_i = \max_{0\leqslant t\leqslant\omega}\|\mathbf{A}_i(t)\|, \quad \beta_i = \max_{0\leqslant t\leqslant\omega}\|\mathbf{B}_i(t)\|, \quad \lambda_U = \max_{0\leqslant s\leqslant\tau\leqslant\omega}\left\|\mathbf{U}(\tau)\mathbf{U}^{-1}(s)\right\|,$$

$$\lambda_V = \max_{0\leqslant s\leqslant\tau\leqslant\omega}\left\|\mathbf{V}^{-1}(s)\mathbf{V}(\tau)\right\|, \quad a_1 = \frac{\omega^3}{3}\gamma\lambda_U^2\lambda_V^2(\alpha_0\alpha_1+\beta_0\beta_1), \quad b_1 = \gamma\frac{\omega^3}{3}\lambda_U^2\lambda_V^2(\alpha_2+\beta_2),$$

$$a_2 = \frac{\omega^2}{2}\gamma\lambda_U^2\lambda_V^2(\alpha_0\alpha_1+\beta_0\beta_1), \quad b_2 = \frac{\omega^2}{2}\gamma\lambda_U^2\lambda_V^2(\alpha_2+\beta_2),$$

где $\|\cdot\|$ – норма матриц, определяемая в рамках конечномерной банаховой алгебры $\mathcal{B}(n)$ непрерывных матричнозначных функций.

Теорема. *Пусть оператор $\mathbf{\Phi}$ однозначно обратим. Тогда при выполнении условия*

$$\varepsilon(a_1+b_2) < 1 \tag{7}$$

задача (1), (2) однозначно разрешима, при этом справедлива оценка

$$\mathbf{Z} \leqslant (\mathbf{E}-\varepsilon\mathbf{K})^{-1}\mathbf{H}_0, \tag{8}$$

где

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix}\|\mathbf{X}\|_C\\ \|\mathbf{Y}\|_C\end{pmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}_0 = \begin{pmatrix}\|\widetilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{UV}}\|_C\\ \|\widetilde{\mathbf{Q}}_{\mathbf{UV}}\|_C\end{pmatrix}.$$

Следствие. Если оператор $\mathbf{\Phi}$ однозначно обратим, то задача (1), (2) имеет единственное решение в области $D = \{t\in[0,\omega]\,,\ |\lambda| < 1/(a_1+b_2),\ \|\mathbf{X}\| < \infty,\ \|\mathbf{Y}\| < \infty\}$.

Решение задачи (1), (2) может быть получено в виде ряда по степеням λ из системы уравнений (5), (6). Выполнение условия (7) обеспечивает равномерную по $t\in[0,\omega]$ сходимость этого ряда, а также справедливость оценки (8).

Литература

1. Хартман Ф. *Обыкновенные дифференциальные уравнения* М.: Мир, 1970.
2. Исаев С.И., Кожинов И.А., Кофанов В.И. и др. *Теория тепломассообмена* / Под ред. А.И. Леонтьева. М.: Высшая школа, 1979.
3. Лаптинский В. Н. *Конструктивный анализ управляемых колебательных систем* Мн.: Ин-т математики НАН Беларуси, 1998.
4. Кашпар А. И., Лаптинский В.Н. *О разрешимости и построении решения задачи Валле-Пуссена для матричного уравнения Ляпунова второго порядка с параметром* // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2019. Т. 55. № 1. С. 50–61.
5. Красносельский М.А. и др. *Приближенное решение операторных уравнений* М.: Наука, 1969.

РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛОВ КВАДРАТИЧНЫХ СИСТЕМ С ФОКУСОМ И АНТИСЕДЛОМ НА ФАЗОВОЙ ПЛОСКОСТИ И ДВУМЯ СЕДЛАМИ И УЗЛОМ В БЕСКОНЕЧНОСТИ

Кузьмич А.В.

Гродненский государственный университет им. Янки Купалы, Гродно, Беларусь
kuzmich_av@grsu.by

В работе рассматривается автономная вещественная система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = 1 + xy, \quad \frac{dy}{dt} = \sum_{i+j=0}^{2} a_{ij}x^i y^j, \tag{1}$$

которая представляет собой одно из канонических семейств квадратичных систем, к которому с помощью аффинного преобразования переменных и растяжения шкалы времени может быть сведена любая квадратичная система. В системе (1) параметры a_{02} и a_{20} определяют конфигурацию особых точек в конечной части фазовой плоскости.

Система (1) на вещественной фазовой плоскости может иметь предельные циклы, окружающие лишь одну особую точку – фокус, а всего система может иметь не более двух фокусов [1]. Поэтому, если система (1) имеет предельные циклы, то возможны их следующие распределения на фазовой плоскости: 1) n, $n > 0$, 2) (n_1, n_2), $n_1 \geqslant 0$, $n_2 \geqslant 0$, $n_1 + n_2 > 0$, где n, n_1, n_2 – нуль или натуральные числа 1, 2, 3.

Несмотря на то, что автономные квадратичные системы являются простейшими полиномиальными системами, имеющими предельные циклы, даже для них еще не решен вопрос о максимальном числе предельных циклов.

В работах Л.А. Черкаса [2, 3] изучались распределения предельных циклов двухпараметрических семейств квадратичных систем на фазовой плоскости с различными конфигурациями особых точек.

Целью работы является дополнение результатов работ [2, 3] за счет изучения распределений предельных циклов двупараметрических семейств квадратичных систем (1) с конфигурацией особых точек $F + A + 2S_\infty + N_\infty$, т.е. систем, имеющих две особые точки – фокус в точке $(1, -1)$ и антиседло в точке $(x_0, -1/x_0)$, $x_0 < 0$ в конечной части фазовой плоскости [1] и три особых точки в бесконечности – два седла и узел.