Для исследования система (1) сводится к системе Льенара, для которой применяется система прогнозов Смейла [2]. Она позволяет находить кривые сепаратрисных циклов и кривые двукратных решений, которые разбивают область на подобласти с постоянным числом решений системы прогноза, а количество решений системы прогноза Смейла дает прогнозное число предельных циклов, окружающих тот фокус, относительно которого она решается. Доказательство существования предельных циклов в полученных областях проводится за счет сведения системы (1) к системе Льенара и построения для нее функции Дюлака–Черкаса [3]. Оно основано на нахождении положительной на некотором промежутке линейной комбинации известных функций одной переменной с произвольными константами, число которых может быть любым. Задача нахождения такой функции во многих случаях сводится к решению задачи линейного программирования. В итоге исследования получен следующий результат

Теорема. *Система* (1) *при* $a_{02} = 34/33$, $x_0 = -1.7$, $a_{20} = -200$ *в полосе* $(a_{01}, a_{11}) \in W$, $W : -37.0031 < a_{01} < 37.8514$, $a_{11} \in \mathbb{R}$, *плоскости параметров имеет области со следующими распределениями предельных циклов* $(0,0)$, $(0,1)$, $(0,1)$, $(1,1)$, $(2;0)$, $(0,2)$, $(1,2)$, $(2;1)$, $(1,3)$ *на фазовой плоскости.*

Литература

1. Reyn J. *Phase portraits of planar quadratic systems* // Mathematics and Its Applications. 2007. V. 593.

2. Черкас Л.А. *Квадратичные системы с максимальным числом предельных циклов* // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45. № 10. P. 1409–1419.

3. Черкас Л.А. *Об оценке числа предельных циклов квадратичной системы* // Дифференц. уравнения. 2007. Т. 43. № 5. P. 628–639.

К МЕТОДАМ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Лаптинский В.Н.

Белорусско-Российский университет, Могилев, Беларусь
lavani@tut.by

В работе анализируются принципиальные отличия конструктивных методов (см. монографии [1, 2] и др.) регуляризации краевых задач от классического, в основу которого положено использование метода функций Грина (см. монографии [3, 4] и др.) либо метода функций краевых условий Азбелева–Хохрякова [5–7], представляющих собой обобщение функций Грина. Для наглядности рассматривается линейная задача

$$Lx \equiv \left(\frac{d}{dt} - A(t)\right) x = f(t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

$$lx \equiv x(0) - x(\omega) = 0. \tag{2}$$

Согласно классическому методу, следует из множества решений системы (1) выбрать решения, удовлетворяющие условию (2). Это сводится к построению либо функций Грина, либо функций краевых условий, в частности, вспомогательных функций Грина на основе декомпозиции $A(t) = A_1(t) + A_2(t)$, где $A_1(t)$, $A_2(t)$ выбираются в зависимости от структуры и функциональных свойств матрицы $A(t)$. Использование метода функций краевых условий затруднено из-за отсутствия методики их построения, однако он позволяет получать условия разрешимости задачи по ее исходным данным. Совокупности соотношений (1), (2) соответствует операторное уравнение типа (см., например, [4])

$$\mathcal{L}x = \varphi, \tag{3}$$

где вид оператора $\mathcal{L}$ и функции φ зависит от выбора метода, например, в случае вспомогательных функций Грина имеем $Lx \equiv (d/dt - A_1(t))\,x$, $\varphi = \varphi(t) \equiv A_2(t)x(t) + f(t)$. Уравнение (3) представляет собой уравнение первого рода.

Одним из методов регуляризации таких уравнений является сведение их к уравнению второго рода (см., например, [8, с. 156]). Заметим, что классический метод регуляризации применим только к линейным и квазилинейным задачам.

Согласно [2, с. 3], «Разработка и развитие конструктивных методов является одним из новейших направлений в современном математическом анализе и моделировании. Несмотря на то, что исследования в этой области насчитывают всего несколько десятилетий, класс конструктивных математических методов привлекает к себе все большее внимание. Пожалуй, не существует даже устоявшегося определения, которое строго ограничивало бы класс конструктивных методов, тем не менее этот термин становится все более распространенным. Видимо, наиболее естественно понимать под ним определенные методы построения решений различных классов уравнений, а также исследование существования и свойств точных и приближенных решений. Причем основной характеристикой конструктивных методов является возможность с их помощью доводить решение задачи до конечного результата (вплоть до численных значений), а также практически проверять те теоретические предпосылки и условия, которые обеспечивают правомочность применения этих методов к конкретным классам задач».

В конструктивном методе [9] подход к задаче (1), (2) принципиально иной. Вместо (2) на основе (1) в простейшем, но весьма важном с точки зрения методологии, случае принимается соотношение

$$\widetilde{\mathcal{L}}x \equiv \int\limits_0^\omega [A(\tau)x(\tau) + f(\tau)]\, d\tau = 0, \tag{4}$$

представляющее собой уравнение первого рода относительно $x(t)$. Следует из множества решений уравнения (4) выбрать решения класса $C^1[0,\omega]$, удовлетворяющие уравнению (1). К (4) применяются регуляризаторы [9, 10]:

$$\int\limits_0^\omega A(\tau)x(\tau)\, d\tau = \int\limits_0^\omega A(\tau)\, d\tau x(t) - \int\limits_0^t \left(\int\limits_0^\tau A(\sigma)\, d\sigma\right) dx(\tau) + \int\limits_t^\omega \left(\int\limits_\tau^\omega A(\sigma)\, d\sigma\right) dx(\tau), \tag{5}$$

$$\int\limits_0^\omega A(\tau)x(\tau)\, d\tau = \int\limits_0^\omega A(\tau)\, d\tau x(t) - \int\limits_0^\omega A(\tau)\, d\tau \int\limits_\tau^t dx(\sigma). \tag{6}$$

Если в (4), (5) функции $x(t)$ выбирать из уравнения (1), то придем к уравнению

$$\int\limits_0^\omega A(\tau)\, d\tau x(t) = \int\limits_0^t \left(\int\limits_0^\tau A(\sigma)\, d\sigma\right) [A(\tau)x(\tau) + f(\tau)]\, d\tau -$$

$$- \int\limits_t^\omega \left(\int\limits_\tau^\omega A(\sigma)\, d\sigma \right) [A(\tau)x(\tau) + f(\tau)]\; d\tau - \int\limits_0^\omega f(\tau)\, d\tau. \tag{7}$$

Аналогично на основе (4), (6) получим

$$\int\limits_0^\omega A(\tau)\, d\tau x(t) = \int\limits_0^\omega A(\tau)\, d\tau \int\limits_\tau^t [A(\sigma)x(\sigma) + f(\sigma)]\; d\sigma - \int\limits_0^\omega f(\tau)\, d\tau. \tag{8}$$

Для построения решений уравнений (7), (8) разработаны алгоритмы различных типов [9].

Заметим, что конструктивные методы [9, 10] применимы к существенно нелинейным краевым задачам. Развитию этих методов посвящено значительное количество исследований (см. монографии [9, 11] и др.).

Литература

1. Гребеников Е.А., Рябов Ю.А. *Конструктивные методы анализа нелинейных систем.* М.: Наука, 1979.

2. Самойленко А.М., Ронто Н.И. *Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений.* Киев: Наукова думка, 1992.

3. Буницкий Е.Л. *К теории функции Грина для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений.* Одесса: Сапожников, 1913.

4. Наймарк М.А. *Линейные дифференциальные операторы.* М.: Наука, 1969.

5. Азбелев Н.В., Рахматуллина Л.Ф., Терентьев А.Г. *W-метод в исследовании дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом* // Тр. Тамбовск. ин-та хим. машиностр. 1970. Вып. 4. С. 60–63.

6. Хохряков А.Я., Алексеенко М.И. *Функция краевых условий и оценки функции Грина периодической задачи* // Дифференц. уравнения. 1971. Т. 7. № 7. С. 1158–1170.

7. Хохряков А.Я., Зубов В.М. *О функции краевых условий* // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1971. № 5. С. 24–31.

8. Забрейко П.П. и др. *Интегральные уравнения.* М.: Наука, 1968.

9. Лаптинский В.Н. *Конструктивный анализ управляемых колебательных систем.* Мн.: Ин-т математики НАН Беларуси, 1998.

10. Лаптинский В.Н. *К регуляризации периодической краевой задачи для существенно нелинейных неавтономных дифференциальных систем* // XIX Междунар. науч. конф. по дифференц. уравнениям «Еругинские чтения–2019»: тез. докл. междунар. науч. конф., Могилев, 14–17 мая 2019 г. Мн.: Ин-т математики НАН Беларуси. 2019. Ч. 1. С. 81–82.

11. Лаптинский В.Н., Маковецкий И.И., Пугин В.В. *Матричные дифференциальные уравнения Ляпунова и Риккати.* Могилев: БРУ, 2012.

ЛИНЕЙНЫЕ ДВУМЕРНЫЕ СИСТЕМЫ, ВСЕ РЕШЕНИЯ КОТОРЫХ ПЕРИОДИЧНЫ

Майоровская С.В.

Белорусский государственный экономический университет, Минск, Беларусь,
svmayor@mail.ru

Рассмотрим двумерную линейную систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = P(t)x, \tag{1}$$