где $P(t) = P_{\text{ev}}(t) + P_{\text{od}}(t)$, $P_{\text{ev}}(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) & b_2(t) \\ b_3(t) & b_4(t) \end{pmatrix}$, $P_{\text{od}}(t) = \begin{pmatrix} \beta_1(t) & \beta_2(t) \\ \beta_3(t) & \beta_4(t) \end{pmatrix}$ – четная и нечетная матрицы соответственно, причем функции $b_i(t)$, $\beta_i(t)$ являются 2ω-периодическими и непрерывными при $t \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$.

Теорема. *Пусть* $r = r(t)$, $\psi = \psi(t)$ *– дифференцируемые при* $t \in \mathbb{R}$ *функции, причем функция* ψ *является* 2ω*-периодической, а* $r(t) \neq 0$ $\forall t \in \mathbb{R}$. *Пусть также имеют место соотношения*

$$b_1 \frac{d}{dt}(r^2) = b_3\beta_3 r^4 + (b_2\beta_3 + b_3\beta_2 + 2b_1(\beta_1 - \beta_4))r^2 + b_2\beta_2,$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = rb_3 - \frac{b_2}{r},$$

$$2rb_1 \cos\varphi + (r^2\beta_3 + \beta_2)\sin\varphi = 0,$$

где $\varphi = \varphi(t) = \dfrac{m}{n}\dfrac{\pi}{\omega}t + \psi(t)$, m/n *– несократимая рациональная дробь* $(m \in \mathbb{Z}$, $n \in \in \mathbb{N})$.

Тогда все решения системы (1) *являются* 2ω*-периодическими.*

Доказательство теоремы осуществляется с помощью теории отражающей функции (см. [1, 2]) и основано на том, что при указанных условиях отражающая матрица системы (1) имеет вид

$$F(t) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & r\sin\varphi \\ -r^{-1}\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Литература

1. Мироненко В.И. *Отражающая функция и периодические решения дифференциальных уравнений.* Мн.: Университетское, 1986.

2. Мироненко В.И. *Отражающая функция и исследование многомерных дифференциальных систем.* Гомель: ГГУ, 2004.

АНАЛИЗ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБОБЩЕНИЯ МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ ЛЯПУНОВА И РИККАТИ

Маковецкая О.А.

Белорусско-Российский университет, Могилев, Беларусь
olla.makzi@gmail.com

Рассматривается краевая задача

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + XB(t) + Q_1(t)XQ_2(t)XQ_3(t) + F(t, X) \equiv G(t, X), \tag{1}$$

$$X(0) = X(\omega), \tag{2}$$

где $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $t \in I$, $A, B, Q_i \in \mathbb{C}(I, \mathbb{R}^{n\times n})$ $(i = 1, 2, 3)$, $F \in \mathbb{C}(D_{\tilde\rho}, \mathbb{R}^{n\times n})$. Предполагается, что матрица-функция $F(t, X)$ в области $D_{\tilde\rho} = \{(t, X) : t \in I, \|X\| < \tilde\rho\}$

удовлетворяет относительно X условию Липшица (локально), $F(t,0)\not\equiv 0$, $I=[0,\omega]$, $\omega>0$, $0<\tilde\rho\leqslant\infty$.

В работе на основе подхода [1] получены конструктивные достаточные условия однозначной разрешимости периодической краевой задачи для матричного дифференциального уравнения Ляпунова–Риккати и априорная оценка области локализации решения. Дан итерационный алгоритм построения решения, основанный на вычислительной схеме классического метода последовательных приближений. Эти результаты обобщают и развивают [2–4].

Обозначения:

$$D_\rho=\{(t,X):t\in I,\ \ \|X\|\leqslant\rho\},\quad D=\{X(t):\|X\|_{\mathbb{C}}\leqslant\rho\},$$

$$\tilde A(\omega)=\int\limits_0^\omega A(\tau)\,d\tau,\quad \gamma=\|\tilde A^{-1}(\omega)\|,\quad \alpha=\max_t\|A(t)\|,$$

$$\beta=\max_t\|B(t)\|,\quad \delta_i=\max\|Q_i(t)\|\quad(i=1,2,3),\quad h=\max\|F(t,0)\|,$$

$$\varphi(\rho)=\gamma\delta\omega\left(1+\frac{1}{2}\alpha\omega\right)\rho^2+\gamma\omega\left[\beta+L+\frac{1}{2}\alpha\omega(\alpha+\beta+L)\right]\rho+\gamma\omega h\left(1+\frac{1}{2}\alpha\omega\right),$$

$$q(\rho)=\gamma\delta\omega(\alpha\omega+2)\rho+\frac{1}{2}\gamma\alpha\omega^2(\alpha+\beta+L),\quad \|X\|_{\mathbb{C}}=\max_t\|X(t)\|,$$

где $0<\rho<\tilde\rho$, $t\in I$, $\delta=\delta_1\delta_2\delta_3$, $L=L(\rho)>0$ – постоянная Липшица для $F(t,X)$ в области D_ρ, $\|\cdot\|$ – фиксированная норма матриц в конечномерной банаховой алгебре $\mathcal{B}(n)$ непрерывных матриц-функций, например, любая из норм, приведенных в [5, с. 21].

Теорема. *Пусть выполнены следующие условия:* $\det\tilde A(\omega)\neq 0$, $\varphi(\rho)\leqslant\rho$, $q(\rho)<1$. *Тогда в области* D_ρ *решение задачи* (1), (2) *существует и единственно.*

Для построения решения задачи (1), (2) разработан алгоритм

$$X_{k+1}(t)=\tilde A^{-1}(\omega)\bigg\{\int\limits_0^t\bigg(\int\limits_0^\tau A(\sigma)\,d\sigma\bigg)G(\tau,X_k(\tau))\,d\tau-\int\limits_t^\omega\bigg(\int\limits_\tau^\omega A(\sigma)\,d\sigma\bigg)G(\tau,X_k(\tau))\,d\tau-$$
$$-\int\limits_0^\omega[X_k(\tau)B(\tau)+Q_1(\tau)X_k(\tau)Q_2(\tau)X_k(\tau)Q_3(\tau)+F(\tau,X_k(\tau))]\,d\tau\bigg\},\quad k=0,1,2,\ldots,\quad(3)$$

где $X_0(t)$ – произвольная матричная функция класса $\mathbb{C}[0,\omega]$, принадлежащая множеству D.

С помощью известных приемов [6, с. 605] установлено, что последовательность $\{X_k(t)\}_0^\infty$, построенная с помощью алгоритма (3), сходится равномерно по $t\in I$ к решению интегрального уравнения

$$X(t)=\tilde A^{-1}(\omega)\bigg\{\int\limits_0^t\bigg(\int\limits_0^\tau A(\sigma)\,d\sigma\bigg)G(\tau,X(\tau))\,d\tau-\int\limits_t^\omega\bigg(\int\limits_\tau^\omega A(\sigma)\,d\sigma\bigg)G(\tau,X(\tau))\,d\tau-$$
$$-\int\limits_0^\omega[X(\tau)B(\tau)+Q_1(\tau)X(\tau)Q_2(\tau)X(\tau)Q_3(\tau)+F(\tau,X(\tau))]\,d\tau\bigg\},$$

эквивалентного задаче (1), (2), при этом справедливы оценки

$$\|X - X_k\|_{\mathbb{C}} \leqslant \frac{q^k}{1-q}\|X_1 - X_0\|_{\mathbb{C}}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$\|X\|_{\mathbb{C}} \leqslant \|X_0\|_{\mathbb{C}} + \frac{\|X_1 - X_0\|_{\mathbb{C}}}{1-q}. \tag{4}$$

Оценку (4) следует дополнить оценкой для $\|X_1 - X_0\|_{\mathbb{C}}$:

$$\|X_1 - X_0\|_{\mathbb{C}} \leqslant \gamma\omega\left[\frac{\alpha^2\omega}{2} + (\beta + \delta\rho + L)\left(\frac{\alpha\omega}{2} + 1\right)\right]\|X_0\|_{\mathbb{C}} + \gamma\omega h\left(\frac{\alpha\omega}{2} + 1\right). \tag{5}$$

В случае $X_0(t) \equiv 0$ из (5) имеем

$$\|X\|_{\mathbb{C}} \leqslant \frac{\gamma\omega h(\alpha\omega + 2)}{2(1-q)}.$$

Приближенные решения, построенные по алгоритму (3), вообще говоря, не обязаны удовлетворять краевому условию (2). В связи с этим в данном случае получена оценка:

$$\|X_{k+1}(\omega) - X_{k+1}(0)\| \leqslant \frac{1}{2}\gamma\alpha\omega^2 q^k h(\alpha\omega + 2), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Алгоритм (3) содержит достаточно простые вычислительные операции и поэтому удобен для применения к решению конкретных задач.

Литература

1. Лаптинский В.Н. *Конструктивный анализ управляемых колебательных систем.* Мн.: Ин-т математики НАН Беларуси, 1998.

2. Лаптинский В.Н., Маковецкая О.А. *Построение и структурные свойства решения периодической краевой задачи для обобщения матричных уравнения Ляпунова и Риккати* // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 7. С. 937–946.

3. Маковецкая О.А. *К конструктивному анализу периодической краевой задачи для матричного уравнения Ляпунова–Риккати с параметром* // // XIX Междунар. науч. конф. по дифференц. уравнениям «Еругинские чтения–2019»: тез. докл. междунар. науч. конф., Могилев, 14–17 мая 2019 г. Мн.: Ин-т математики НАН Беларуси. 2019. Т. 1. С. 83–84.

4. Маковецкая О.А. *К периодической краевой задаче для матричного уравнения Ляпунова–Риккати с параметром* // Материалы, оборудование и ресурсосберегающие технологии. Материалы междунар. науч. конф. Могилев, Белорусско-Российский унвиерситет, 2020. С. 495–496.

5. Демидович Б.П. *Лекции по математической теории устойчивости.* М.: Наука, 1967.

6. Канторович Л.В. *Функциональный анализ.* М.: Наука, 1977.

О КУБИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ С ДЕВЯТЬЮ ПАРАМЕТРАМИ

Маковецкая Т.В.[1], Ратушева Ю.Л.[2]

[1] Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
shcheglovskaya@tut.by
[2] Белорусский государственный экономический университет, Минск, Беларусь
YuliaInvisible@tut.by

Будем рассматривать кубическую систему

$$\dot{x} = y(1 + Dx + Px^2), \quad \dot{y} = -x + Ax^2 + 3Bxy + Cy^2 + Kx^3 + 3Lx^2y + Mxy^2 + Ny^3, \tag{1}$$