ЛЕВОСТОРОННЯЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ РИККАТИ

Роголев Д.В.

Белорусско-Российский университет, Могилев, Беларусь
d-rogolev@tut.by

Изучается краевая задача типа [1, 2]

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{A}_1(t)\mathbf{X} + \mathbf{C}_1(t)\mathbf{X}\mathbf{B}_1(t) + \mathbf{X}\left(\mathbf{S}_1(t)\mathbf{X} + \mathbf{S}_2(t)\mathbf{Y}\right) + \lambda\mathbf{F}_1(t), \tag{1}$$

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{A}_2(t)\mathbf{Y} + \mathbf{C}_2(t)\mathbf{Y}\mathbf{B}_2(t) + \mathbf{Y}\left(\mathbf{P}_1(t)\mathbf{X} + \mathbf{P}_2(t)\mathbf{Y}\right) + \lambda^2\mathbf{F}_2(t), \tag{2}$$

$$\mathbf{X}(0,\lambda) = \mathbf{X}(\omega,\lambda), \quad \mathbf{Y}(0,\lambda) = \mathbf{Y}(\omega,\lambda), \tag{3}$$

где $t \in [0,\omega]$, $\mathbf{X},\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, матрицы $\mathbf{A}_i(t)$, $\mathbf{B}_i(t)$, $\mathbf{C}_i(t)$, $\mathbf{S}_i(t)$, $\mathbf{P}_i(t)$, $\mathbf{F}_i(t)$ $(i=1,2)$ определены и непрерывны на промежутке $[0,\omega]$, $\omega > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Матричные уравнения Ляпунова, Риккати и их обобщения играют важную роль в теории и приложениях дифференциальных уравнений. Системы таких уравнений относятся к числу малоизученных [3–5]. Двухточечная краевая задача для системы типа (1), (2), по-видимому, впервые поставлена в работе [4].

В работе, являющейся продолжением [1], с помощью метода [6, гл. 3] получены коэффициентные (т.е. в терминах задачи (1)–(3)) достаточные условия ее однозначной разрешимости, а также итерационный алгоритм построения решения.

Обозначения:

$$D = \{(t,\mathbf{X},\mathbf{Y}) : 0 \leqslant t \leqslant \omega, \quad \|\mathbf{X}\| \leqslant \rho_1, \quad \|\mathbf{Y}\| \leqslant \rho_2\}, \quad \tilde{\mathbf{A}}_i(\omega) = \int\limits_0^\omega \mathbf{A}_i(\tau)\,d\tau,$$

$$\gamma_i = \left\|\tilde{\mathbf{A}}_i^{-1}(\omega)\right\|, \quad \alpha_i = \max_t \|\mathbf{A}_i(t)\|, \quad \beta_i = \max_t \|\mathbf{B}_i(t)\|, \quad \sigma_i = \max_t \|\mathbf{C}_i(t)\|,$$

$$\delta_i = \max_t \|\mathbf{S}_i(t)\|, \quad \mu_i = \max_t \|\mathbf{P}_i(t)\|, \quad h_i = \max_t \|\mathbf{F}_i(t)\|, \quad \|\mathbf{X}\|_C = \max_t \|\mathbf{X}(t)\|,$$

$$\varepsilon = |\lambda|, \quad \varepsilon_0 = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\},$$

$$q_{11} = \gamma_1\left[\frac{1}{2}\alpha_1\left(\alpha_1 + \beta_1\sigma_1 + 2\delta_1\rho_1 + \delta_2\rho_2\right)\omega^2 + \left(\beta_1\sigma_1 + 2\delta_1\rho_1 + \delta_2\rho_2\right)\omega\right],$$

$$q_{12} = \gamma_1\delta_2\rho_1\omega\left(\frac{1}{2}\alpha_1\omega + 1\right), \quad q_{21} = \gamma_2\mu_1\rho_2\omega\left(\frac{1}{2}\alpha_2\omega + 1\right),$$

$$q_{22} = \gamma_2\left[\frac{1}{2}\alpha_2\left(\alpha_2 + \beta_2\sigma_2 + \mu_1\rho_1 + 2\mu_2\rho_2\right)\omega^2 + \left(\beta_2\sigma_2 + \mu_1\rho_1 + 2\mu_2\rho_2\right)\omega\right],$$

$$\varepsilon_1 = \left(\rho_1 - \gamma_1\left\{\frac{1}{2}\alpha_1\left[\left(\alpha_1 + \beta_1\sigma_1\right)\rho_1 + \delta_1\rho_1^2 + \delta_2\rho_1\rho_2\right]\omega^2 + \left[\beta_1\sigma_1\rho_1 + \delta_1\rho_1^2 + \delta_2\rho_1\rho_2\right]\omega\right\}\right) \times$$

$$\times\left(\gamma_1\left(\frac{1}{2}\alpha_1\omega + 1\right)h_1\omega\right)^{-1},$$

$$\varepsilon_2 = \left(\rho_2 - \gamma_2\left\{\frac{1}{2}\alpha_2[(\alpha_2+\beta_2\sigma_2)\rho_2+\mu_2\rho_2^2+\mu_1\rho_1\rho_2]\omega^2+[\beta_2\sigma_2\rho_2+\mu_2\rho_2^2+\mu_1\rho_1\rho_2]\omega\right\}\right)^{1/2}\times$$

$$\times\left(\gamma_2\left(\frac{1}{2}\alpha_2\omega+1\right)h_2\omega\right)^{1/2},$$

где $t\in[0,\omega]$, $0<\rho_1,\rho_2<\infty$, $\|\cdot\|$ – норма матриц, определяемая в рамках конечномерной банаховой алгебры $\mathfrak{B}(n)$ непрерывных матриц-функций, например, любая из норм, приведенных в [7].

В случае, когда коэффициенты в (1), (2) постоянные, получим систему типа [5], играющую важную роль в теории управления.

Теорема. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) $\det\tilde{\mathbf{A}}_i(\omega)\neq 0\quad(i=1,2)$;

2) $\gamma_1\left\{\dfrac{1}{2}\alpha_1\left[(\alpha_1+\beta_1\sigma_1)\,\rho_1+\delta_1\rho_1^2+\delta_2\rho_1\rho_2\right]\omega^2+\left[\beta_1\sigma_1\rho_1+\delta_1\rho_1^2+\delta_2\rho_1\rho_2\right]\omega\right\}<\rho_1,$

$\gamma_2\left\{\dfrac{1}{2}\alpha_2\left[(\alpha_2+\beta_2\sigma_2)\,\rho_2+\mu_2\rho_2^2+\mu_1\rho_1\rho_2\right]\omega^2+\left[\beta_2\sigma_2\rho_2+\mu_2\rho_2^2+\mu_1\rho_1\rho_2\right]\omega\right\}<\rho_2;$

3) $q_{11}<1$, $\det(\mathbf{E}-\mathbf{Q})>0$, *где* $\mathbf{E}=\operatorname{diag}(1,1)$, $\mathbf{Q}=(q_{ij})$.

Тогда при $|\lambda|<\varepsilon_0$ *задача* (1)–(3) *однозначно разрешима в области* D. *Решение представимо как предел равномерно сходящейся последовательности матричных функций, определяемых рекуррентными интегральными соотношениями и удовлетворяющих условиям* (3).

Разработан алгоритм построения решения задачи (1)–(3), который в дифференциальной форме имеет вид

$$\frac{d\mathbf{X}_{k+1}}{dt}=\mathbf{A}_1(t)\mathbf{X}_k+\mathbf{C}_1(t)\mathbf{X}_k\mathbf{B}_1(t)+\mathbf{X}_k\left(\mathbf{S}_1(t)\mathbf{X}_k+\mathbf{S}_2(t)\mathbf{Y}_k\right)+\lambda\mathbf{F}_1(t),\tag{4}$$

$$\frac{d\mathbf{Y}_{k+1}}{dt}=\mathbf{A}_2(t)\mathbf{Y}_k+\mathbf{C}_2(t)\mathbf{Y}_k\mathbf{B}_2(t)+\mathbf{Y}_k\left(\mathbf{P}_1(t)\mathbf{X}_k+\mathbf{P}_2(t)\mathbf{Y}_k\right)+\lambda^2\mathbf{F}_2(t),\tag{5}$$

$$\mathbf{X}_{k+1}(0,\lambda)=\mathbf{X}_{k+1}(\omega,\lambda),\tag{6}$$

$$\mathbf{Y}_{k+1}(0,\lambda)=\mathbf{Y}_{k+1}(\omega,\lambda),\quad k=0,1,2,\ldots,\tag{7}$$

где в качестве начального приближения $\mathbf{X}_0(\lambda)$, $\mathbf{Y}_0(\lambda)$ приняты постоянные матрицы, определяемые из соответствующих условий (6), (7) для приближений $\mathbf{X}_1(t,\lambda)$, $\mathbf{Y}_1(t,\lambda)$:

$$\int\limits_0^\omega\left[\mathbf{A}_1(\tau)\mathbf{X}_0+\mathbf{C}_1(\tau)\mathbf{X}_0\mathbf{B}_1(\tau)+\mathbf{X}_0\left(\mathbf{S}_1(\tau)\mathbf{X}_0+\mathbf{S}_2(\tau)\mathbf{Y}_0\right)+\lambda\mathbf{F}_1(\tau)\right]d\tau=0,$$

$$\int\limits_0^\omega\left[\mathbf{A}_2(\tau)\mathbf{Y}_0+\mathbf{C}_2(\tau)\mathbf{Y}_0\mathbf{B}_2(\tau)+\mathbf{Y}_0\left(\mathbf{P}_1(\tau)\mathbf{X}_0+\mathbf{P}_2(\tau)\mathbf{Y}_0\right)+\lambda^2\mathbf{F}_2(\tau)\right]d\tau=0.$$

Упомянутые рекуррентные интегральные соотношения получены из (4)–(7) с помощью регуляризатора [6, гл. 3]. Условия теоремы обеспечивают равномерную по $t\in$ $\in[0,\omega]$ сходимость этого алгоритма.

Литература

1. Лаптинский В.Н., Роголев Д.В. *Конструктивные методы построения решения периодической краевой задачи для системы матричных дифференциальных уравнений типа Риккати* // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47. № 10. С. 1412–1420.

2. Роголев Д.В. *К анализу периодической краевой задачи для линейно возмущенной системы матричных уравнений типа Риккати с параметром* // XIX Междунар. науч. конф. по дифференц. уравнениям «Еругинские чтения–2019»: тез. докл. междунар. науч. конф., Могилев, 14–17 мая 2019 г. Мн.: Ин-т математики НАН Беларуси. 2019. Ч. 1. С. 92–94.

3.Зубов В.И. *Лекции по теории управления.* М.: Наука, 1975.

4.Анисович В.В., Крюков Б.И., Мадорский В.М. *Об одном подходе к решению задач оптимального управления* // Докл. АН СССР. 1980. Т. 251. № 2. С. 265–268.

5. Jodar L. *Explicit solutions of Riccati equations appearing in differential games* // Appl. Math. Lett. 1990. V. 3. № 4. P. 9–12.

6. Лаптинский В.Н. *Конструктивный анализ управляемых колебательных систем.* Мн.: Ин-т математики НАН Беларуси, 1998.

7. Демидович Б.П. *Лекции по математической теории устойчивости.* М.: Наука, 1967.

СИСТЕМЫ С НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ ТРЕТЬЕЙ СТЕПЕНИ И ЦИКЛИЧНОСТЬЮ НЕ МЕНЕЕ 11

Руденок А.Е.

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
roudenok@bsu.by

Рассмотрим систему

$$\dot r = r^2(a\sin\varphi+b\cos\varphi-k\sin 3\varphi+m\cos 3\varphi)+r^3(e+s\sin 2\varphi+c\cos 2\varphi-K\sin 4\varphi+M\cos 4\varphi),$$

$$\dot\varphi = 1-r(A\cos\varphi+B\sin\varphi+k\cos 3\varphi+m\sin 3\varphi)-$$
$$-r^2(f+C\cos 2\varphi+S\sin 2\varphi+K\cos 4\varphi+M\sin 4\varphi). \qquad (1)$$

Здесь r, φ – полярные координаты точки (x,y). В декартовых координатах (x,y) эта система имеет в особой точке $(x,y)=(0,0)$ либо центр, либо фокус. Обозначим

$$\Lambda=(a,b,A,B,k,m,e,c,s,K,M,f,C,S).$$

Будем считать Λ точкой в 14-мерном аффинном пространстве A^* параметров системы. Точку $\Lambda_0\in A^*$ будем называть центром (фокусом), если соответствующая система (1) имеет центр (фокус) в особой точке $(x,y)=(0,0)$. Говорят, что $\Lambda_0\in A^*$ имеет цикличность, равную n, если для любой достаточно малой Δ-окрестности точки $(x,y)=(0,0)$ существует ε-окрестность точки Λ_0, в которой имеется фокус, имеющий n предельных циклов, расположенных в Δ-окрестности точки $(x,y)=(0,0)$.

Введем вектор-функцию $F(\Lambda)=(L_1,L_2,\ldots,L_n)$, где L_1, L_2, $\ldots$, L_n – постоянные Ляпунова (фокусные величины) системы (1). Точка $\Lambda_0\in A^*$ называется фокусом порядка n, если $F(\Lambda_0)=(0,0,\ldots,0,L_n(\Lambda_0))$, $L_n(\Lambda_0)\neq 0$. Точка $\Lambda_0\in A^*$ называется центром порядка n, если в любой сколь угодно малой окрестности Λ_0 существует фокус порядка n.

Теорема 1. *Если Λ_0 – центр и $\operatorname{rank}(DF(\Lambda_0))=n$, то Λ_0 имеет цикличность не менее n.*