Литература

1. Корзюк В.И. Столярчук И.И. *Классическое решение первой смешанной задачи для уравнения Клейна–Гордона–Фока в полуполосе* // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 8. С. 1108–1117.

2. Корзюк В.И. Столярчук И.И. *Классическое решение первой смешанной задачи для уравнения типа Клейна-Гордона-Фока с неоднородными условиями согласования* // Докл. НАН Беларуси. 2019. Т. 63. № 1. С. 7–13.

3. Корзюк В.И. Козловская И.С. *Классические решения задач для гиперболических уравнений: курс лекций.* В 10 ч. Ч. 2. Мн.: БГУ, 2017.

РЕШЕНИЕ ПО ПРАНДТЛЮ ЗАДАЧИ О ДИНАМИЧЕСКОМ ТУРБУЛЕНТНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

Лаптинский В.Н.

Белорусско-Российский университет, Могилев, Беларусь
lavani@tut.by

Исследуется система соотношений

$$u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_x}{\partial y}=U\frac{dU}{dx}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\tau}{\partial y}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}=0, \tag{2}$$

$$u_x|_{y=0}=0,\quad u_y|_{y=0}=0,\quad u_x|_{y=\delta(x)}=U\left(x\right), \tag{3}$$

представляющая собой задачу Прандтля о динамическом турбулентном пограничном слое конечной толщины $\delta\left(x\right)$ в случае стационарного плоского течения несжимаемой жидкости (см., например, [1, с. 521; 2, с. 368]), при этом турбулентное напряжение трения $\tau=\tau(x,y)$, согласно Прандтлю, принято в виде

$$\tau=\mu\frac{\partial u_x}{\partial y}+\rho\kappa^2y^2\left|\frac{\partial u_x}{\partial y}\right|\frac{\partial u_x}{\partial y}. \tag{4}$$

Искомыми величинами являются функции $\delta\left(x\right)$ и $\tau_0\left(x\right)$ – касательное напряжение.

В случае ламинарного течения в работе [3] по методу [4] получены точные формулы для $\delta\left(x\right)$, $\tau_0\left(x\right)$. В работе [5] тем же методом с учетом (4) выведены соотношения

$$\frac{d\delta^2(x)}{dx}+\frac{2b}{\varphi}\frac{U'(x)}{U(x)}\delta^2(x)-\frac{2\kappa^2J_0}{\varphi}\delta(x)-\frac{2\nu}{\varphi U(x)}=0, \tag{5}$$

$$\tau_0\left(x\right)=\left(1+\frac{\psi}{\varphi}\right)\frac{\mu U}{\delta}+\left(a-\frac{b\psi}{\varphi}\right)\rho UU'\delta+\left(1+\frac{\psi}{\varphi}\right)\kappa^2J_0\rho U^2, \tag{6}$$

где

$$\varphi=\int\limits_0^1 f(s)(1-sf(s))\,ds-\frac{1}{2}\Bigg(\int\limits_0^1 f(s)\,ds\Bigg)^2,\quad \psi=\frac{1}{2}\Bigg(\int\limits_0^1 f(s)\,ds\Bigg)^2-\int\limits_0^1(1-s)f^2(s)\,ds,$$

$$J_0 = \int\limits_0^1 s^2 \left| f'(s) \right| f'(s)\, ds, \quad a = \frac{1}{2}\Bigg(\int\limits_0^1 f(s)\, ds \Bigg)^2 - 2\int\limits_0^1 (1-s) f^2(s)\, ds + \frac{1}{2},$$

$$b = \int\limits_0^1 f(s)(1 - 2sf(s))\, ds - \frac{1}{2}\Bigg(\int\limits_0^1 f(s)\, ds \Bigg)^2 + \frac{1}{2}, \quad f'(s) = df(s)/ds,$$

$f(s)$ – полуэмпирическая функция автомодельного типа, определяемая по соответствующему профилю скоростей [1, 6 и др.] $u_x/U = (y/\delta)^n$.

Как и задача [3], эта задача относится к обратным задачам газо- и гидродинамики, теплофизики. Она гораздо сложнее, чем задача [3], даже с учетом гипотезы Прандтля; это проявляется в соотношениях (5), (6) присутствием нелинейного интегрального функционала (функционала Прандтля) J_0.

Согласно методикам [4, 7], аналогом функции $f(y/\delta)$ является вспомогательная функция $\psi(x, y)$; ее построение связано с громоздкими выкладками. Поэтому присутствие функционала (7) не позволяет считать соотношения (5), (6) ключом к решению задачи (1)–(3), а рассматривать их как ее промежуточное решение. По-видимому, это квазиобратное решение соответствующей прямой задачи. В [8] этот функционал исключен из этих соотношений, но с использованием эмпирически определяемого сопротивления трения пластины конечной длины.

В данной работе, являющейся продолжением [5, 7, 8] и развитием [3, 4, 9], эта задача исследуется на основе формулы Прандтля (4) с использованием величины ударной вязкости пограничного слоя. Установлено, что функционал J_0 может быть исключен без использования эмпирически определяемых величин, при этом для функций $\delta\,(x)$, $\tau_0\,(x)$ получены следующие соотношения:

$$\frac{1}{2}\frac{d\delta^2}{dx} + \frac{bU'}{\varphi U}\delta^2 - \frac{\kappa^2 c_t \delta^3 \tau_0^2}{\varphi (\mu U)^2} - \frac{\nu}{\varphi U} = 0, \tag{7}$$

$$\tau_0 = \frac{2G}{1 + \sqrt{1 - 4FG}}, \tag{8}$$

где

$$F = F(x) \equiv \left(1 + \frac{\psi}{\varphi} \right) \frac{\kappa^2 c_t \delta^2}{\nu\mu}, \quad G = G(x) \equiv \left(1 + \frac{\psi}{\varphi} \right) \frac{\mu U}{\delta} + \left(a - \frac{b\psi}{\varphi} \right) \rho U U' \delta,$$

$c_t = c_t(x)$ – безразмерная функция, определяемая на основе безразмерного интегрального среднего значения на промежутке $[0, \delta(x)]$ турбулентной составляющей τ_t напряжения трения τ; $c_t(x) \equiv \mathrm{const}$ в случае профиля скоростей автомодельного типа.

В (7), (8) вводится обычное ограничение $1 - 4FG \geqslant 0$, точное в рамках гипотезы Прандтля о структуре τ_t; возможно, оно выполняется всегда с учетом этой гипотезы. Отметим следующее: о функционале J_0 нет существенной априорной информации, однако для $c_t(x)$ справедлива двусторонняя оценка $0 < c_t(x) < 1$, а также имеет место достаточно эффективное естественное приближение.

Таким образом, соотношения (7), (8) информативно полнее, чем (5), (6): (7) с учетом (8) представляет собой уравнение относительно δ, по формуле (8) τ_0 выражается через δ. Однако из-за присутствия $c_t(x)$ соотношения (7), (8) не дают полное решение задачи (1)–(4).

Литература

1. Шлихтинг Г. *Теория пограничного слоя.* М.: Наука, 1974.

2. Емцев Б. Т. *Техническая гидромеханика.* М.: Машиностроение, 1987.

3. Лаптинский В. Н. *Точное решение задачи Прандтля о динамическом ламинарном пограничном слое* // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 4. С. 549–552.

4. Лаптинский В. Н. *Об одном аналитическом методе решения задачи о динамическом ламинарном пограничном слое в автомодельном случае* // Учен. зап. ЦАГИ. 2013. Т. XLIV. № 5. С. 72–93.

5. Лаптинский В. Н. *К решению задачи о динамическом турбулентном пограничном слое* // XIX Междунар. науч. конф. по дифференц. уравнениям «Еругинские чтения–2019»: тез. докл. междунар. науч. конф., Могилев, 14–17 мая 2019 г. Мн.: Ин-т математики НАН Беларуси. 2019. Ч. 2. С. 82–84.

6. Авдуевский В.С. [и др.].*Основы теплопередачи в авиационной и ракетно-космической технике.* М.: Машиностроение, 1975.

7. Лаптинский В. Н. *Конструктивный метод анализа задачи о динамическом турбулентном пограничном слое* // Актуальные проблемы естественных наук и их преподавание: сб. науч. статей Междунар. науч.-практ. конф., посвящ. 100-летию МГУ им. А.А. Кулешова, Могилев, 20–22 февраля 2013 г. / МГУ им. А.А. Кулешова. Могилев, 2013. С. 86–89.

8. Лаптинский В. Н. *Замкнутое решение задачи Прандтля о динамическом турбулентном пограничном слое* // Материалы, оборудование и ресурсосберегающие технологии: материалы междунар. науч.-техн. конф., Могилев, 23–24 апр. 2020 г. / Белорус.-Рос. ун-т. Могилев, 2020. С. 487.

9. Лаптинский В. Н. *Конструктивный метод анализа задачи о ламинарном пограничном слое и его применение к расчету охлаждающей способности кристаллизаторов при непрерывном литье* // Препринт ИТМ НАН Беларуси № 18. Ч. II. Могилев: БРУ, 2010.

О РЕШЕНИЯХ ЗАДАЧИ КУПЕРА

Павленко В.Н.[1], Потапов Д.К.[2]

[1] Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия
pavlenko@csu.ru
[2] Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия
d.potapov@spbu.ru

В [1] Х.Дж. Купер предложил математическую модель стационарного распределения температуры T в проводнике, помещенном в однородное электрическое поле интенсивности $\sqrt{\lambda}$ (λ выступает в роли положительного параметра). Предполагается, что область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, занятая проводником, ограниченная, ее граница $\partial\Omega$ класса C^2, коэффициент теплопроводности $k(x,T)$ зависит от пространственной переменной x и от температуры T, а удельная электропроводность $\sigma(x,T)$ допускает разрывы по фазовой переменной T (при переходе через определенные температуры σ меняется скачком). На границе $\partial\Omega$ области Ω поддерживается постоянная температура. Не ограничивая общности, можно считать ее равной нулю. Математическая модель Купера описанного выше процесса – нижеследующая эллиптическая краевая задача с параметром λ и разрывной нелинейностью $\sigma(x,T)$:

$$-\sum_{i=1}^{n} (k(x,T(x))T_{x_i})_{x_i} = \lambda\sigma(x,T(x)), \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

$$T(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \tag{2}$$