МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Маркетинг и менеджмент»

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Методические рекомендации к практическим занятиям для студентов специальности 1-28 01 02 «Электронный маркетинг» очной и заочной форм обучения

Часть 2

Могилев 2022

УДК 517
ББК 22.161
М34

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Маркетинг и менеджмент» «09» декабря 2021 г., протокол № 5

Составитель канд. пед. наук, доц. Т. С. Старовойтова

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доц. В. А. Ливинская

В методических рекомендациях представлены материалы для практических занятий по дисциплине «Математический анализ». Основные теоретические положения проиллюстрированы примерами решения задач. Выделены задания для самостоятельной работы.

Учебно-методическое издание

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Часть 2

Ответственный за выпуск	А. В. Александров
Корректор	И. В. Голубцова
Компьютерная верстка	Е. В. Ковалевская

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 56 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.

Содержание

1 Дифференциальные уравнения и системы

Дифференциальные уравнения первого порядка. *Дифференциальное уравнение* – это уравнение, связывающее независимую переменную x, неизвестную функцию y и ее производные различных порядков y', y'', y''' и т. д. Наибольший из порядков производных, входящих в уравнение, называется *порядком* дифференциального уравнения.

Уравнение $F(x; y; y') = 0$, связывающее между собой независимую переменную, искомую (неизвестную) функцию $y(x)$ и ее производную $y'(x)$, называется *дифференциальным уравнением первого порядка*. Если дифференциальное уравнение можно записать в виде $y' = f(x; y)$, то говорят, что оно *разрешимо* относительно производной. Это уравнение иногда записывают в виде $dy = f(x; y)dx$ или в более общем виде $P(x; y)dx + Q(x; y)dy = 0$ (*дифференциальная форма*).

Решением или интегралом дифференциального уравнения первого порядка называется любая функция $y = \varphi(x)$, которая при подстановке в это уравнение обращает его в тождество. График функции $y = \varphi(x)$ в этом случае называется *интегральной кривой*. Процесс нахождения решений данного дифференциального уравнения называется *интегрированием* этого уравнения.

Задача отыскания решения дифференциального уравнения первого порядка, удовлетворяющего заданному начальному условию $y(x_0) = y_0$, называется *задачей Коши*. Геометрически это означает следующее: требуется найти интегральную кривую дифференциального уравнения, проходящую через точку $M_0(x_0; y_0)$.

Общим решением дифференциального уравнения называется такая функция $y = \varphi(x; C)$, где C – произвольная постоянная, что при любом конкретном значении C она является решением этого уравнения и для любого допустимого начального условия $y(x_0) = y_0$ найдется такое значение постоянной $C = C_0$, что $\varphi(x_0; C_0) = y_0$.

В некоторых случаях общее решение дифференциального уравнения приходится записывать *в неявном виде*: $\Phi(x; y; C) = 0$. Это выражение называется *общим интегралом* данного уравнения. Геометрически общее решение представляет собой семейство интегральных кривых на плоскости xOy.

Частным решением дифференциального уравнения первого порядка называется функция $y = \varphi(x; C_0)$, полученная из общего решения при конкретном значении постоянной $C = C_0$. *Частным интегралом* уравнения называется равенство $\Phi(x; y; C_0) = 0$, полученное из общего интеграла при фиксированном значении C.

Виды дифференциальных уравнений первого порядка:

а) *уравнения с разделяющимися переменными.* Дифференциальные уравнения вида $y' = f(x)g(y)$, где $f(x)$ и $g(x)$ – заданные функции, называются уравнениями с разделяющимися переменными.

Пример 1 **–** Решить уравнение $xy' + y = 0$.

Решение

Разрешим данное уравнение относительно y', получим $y' = -\dfrac{y}{x}$. Запишем уравнение в виде $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y}{x}$. Разделим переменные: $\dfrac{dy}{y} = -\dfrac{dx}{x}$. Интегрируя, получим $\ln|y| = \ln|x| + C_1$, где C_1 – произвольная постоянная. Положим, что $C_1 = \ln C_2\ (C_2 > 0)$. Тогда решение запишется в виде $\ln|y| = -\ln|x| + \ln C_2$, откуда $|y| = \dfrac{C_2}{|x|}$ или $y = \pm\dfrac{C_2}{x}$. Полагая, что $\pm C_2 = C$, получим $y = \dfrac{C}{x}$, где C – произвольная постоянная.

Геометрически полученное общее решение представляет собой семейство равносторонних гипербол.

Пусть требуется из найденного общего решения выделить частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y\big|_{x=4} = \dfrac{1}{2}$. Заменяя в полученном общем решении x и y начальными данными, получим $\dfrac{1}{2} = \dfrac{C}{4}$, $C = 2$. Искомое частное решение имеет вид $y = \dfrac{2}{x}$;

б) *линейные уравнения.* Дифференциальные уравнения вида $y' = f(x)y + g(x)$, где $f(x)$ и $g(x)$– заданные функции, называются *линейными дифференциальными уравнениями* первого порядка. Если $g(x) = 0$, то уравнение называется линейным уравнением без свободного члена или *линейным однородным уравнением*.

Пример 2 **–** Найти общее решение уравнения $y' = \dfrac{1}{x}y + x^2$ и выделить из него частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y\big|_{x=1} = \dfrac{3}{2}$.

Решение

Запишем данное уравнение в виде $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+x^2$ и рассмотрим вначале соответствующее ему уравнение без свободного члена, т. е. уравнение $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$. В этом уравнении переменные разделяются: $\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x}$.

Интегрируя, получаем $\ln|y|=\ln|x|+\ln C_1$. Общее решение данного уравнения имеет вид $y=z(x)\cdot x=\left(\frac{x^2}{2}+C_0\right)x$, или $y=\frac{x^3}{2}+C_0x$.

Найдем частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y=\frac{3}{2}$ при $x=1$: $\frac{3}{2}=\frac{1}{2}+C_0\cdot 1$, откуда $C_0=1$. Тогда частное решение запишется в виде $y=\frac{x^3}{2}+x$;

в) *уравнение в полных дифференциалах.* Дифференциальное уравнение первого порядка вида $P(x;y)dx+Q(x;y)dy=0$ называется *уравнением в полных дифференциалах*, если $P(x;y)$ и $Q(x;y)$ – непрерывные функции вместе со своими частными производными $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ в некоторой области G, а левая часть уравнения $P(x;y)dx+Q(x;y)dy$ является полным дифференциалом некоторой функции $U(x;y)$ (тождественно выполняется равенство $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$), т. е. $dU(x;y)=P(x;y)dx+Q(x;y)dy$.

Это уравнение может быть записано в виде $dU(x;y)=0$. Функция $U(x;y)$ находится следующим образом: $U(x;y)=\int_{x_0}^{x}P(t;y_0)dt+\int_{y_0}^{y}Q(x;t)dt$. Общий интеграл имеет вид $\int_{x_0}^{x}P(t;y_0)dt+\int_{y_0}^{y}Q(x;t)dt=C$. Здесь $(x_0;y_0)$ – произвольная фиксированная точка области G.

Пример 3 **–** Проинтегрировать уравнение $\frac{dy}{dx}=\frac{1-2xy}{3y^2+x^2}$.

Решение

Запишем данное уравнение в виде $\left(3y^2+x^2\right)dy=(1-2xy)dx$ или, преобразовав, в виде $(2xy-1)dx+\left(3y^2+x^2\right)dy=0.$ Очевидно, что $P(x;y)=2xy-1,$ а $Q(x;y)=3y^2+x^2$.

Проверим выполнение условия $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$. Получим $\dfrac{\partial P}{\partial y}=2x$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=2x$. Условие выполняется, значит, данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Находим общий интеграл, полагая для упрощения вычислений $x_0=y_0=0.$ Тогда $\int\limits_0^x(2t\cdot 0-1\,)dt+\int\limits_0^y\left(3t^2+x^2\right)dt=C$. Интегрируя, находим общий интеграл данного уравнения: $-t\,\Big|_0^x+\left(t^3+x^2t\right)\Big|_0^y=C$ или $-x+y^3+x^2y=C$.

Дифференциальные уравнения второго порядка. Дифференциальное уравнение второго порядка в общем случае записывается в виде $F(x;y;y';y'')=0$ или, если это возможно, в виде, разрешенном относительно второй производной $y''=f(x;y;y')$.

Рассмотрим простейшие уравнения, допускающие понижение порядка.

1 Уравнения вида $y''=f(x)$. Для их решения введем новую переменную $v(x)$, положив, что $y'=v(x)$. Тогда $y''=v'(x)$. Получаем уравнение первого порядка $v'(x)=f(x)$. Его решение $v(x)=\int f(x)dx=F(x)+C_1$, где C_1 – одна из первообразных $f(x)$. Так как $y'=v(x)$, то $y'=F(x)+C_1$, значит, $y=\int F(x)dx+C_1x+C_2$ – общее решение уравнения $y''=f(x)$.

2 Уравнение $y''=f(x;y')$. Такое уравнение не содержит явно искомой функции y; вводим новую функцию $v(x)=y'$. Тогда $v'(x)=y''$. Получаем уравнение первого порядка относительно функции $v(x)$: $v(x)=f(x;v)$. Общее решение этого уравнения имеет вид $v=\varphi(x;C_1)$, а заменяя функцию v на функцию y', получаем уравнение $y'=\varphi(x;C_1)$. Общее решение уравнения $y''=f(x;y')$ будет иметь вид $y=\int\varphi(x;C_1)dx+C_2$.

***Пример* 4 –** Найти общее решение уравнения $\left(1+x^2\right)y''-2xy'=0$ и частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y\,\big|_{x=1}=0,\ y'\,\big|_{x=1}=1.$

Решение

Пусть $y' = v(x)$, тогда $y'' = v'(x)$ и $\left(1 + x^2\right)v' - 2xv = 0$ – дифференциальное уравнение первого порядка. $\frac{dv}{v} = \frac{2x\,dx}{1 + x^2}$, $\frac{dv}{v} = \frac{2x\,dx}{1 + x^2}$, $\ln|v| = \ln\left(1 + x^2\right) + \ln C_0$, $v = \pm C_0\left(1 + x^2\right) = C_1\left(1 + x^2\right)$. Так как $v = y'$, $y' = C_1\left(1 + x^2\right)$, то общее решение уравнения имеет вид $y = C_1\left(x + \frac{x^3}{3}\right) + C_2$.

Если $y\big|_{x=1} = 0$, то $0 = C_1\left(1 + \frac{1}{3}\right) + C_2$; если $y'\big|_{x=1} = 1$, то $1 = C_1(1 + 1) = 2C_1$. $C_1 = \frac{1}{2}$. Тогда $C_2 = -\frac{2}{3}$. Искомое частное решение имеет вид $y = \frac{x^3}{6} + \frac{x}{2} - \frac{2}{3}$.

3 Уравнение $y'' = f(y; y')$. Оно не содержит явно независимую переменную *x*. Для понижения порядка введем функцию $v(y) = y'$. Тогда $y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{dv(y)}{dx} = \frac{dv(y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$. Так как $\frac{dy}{dx} = v(y)$, то $y'' = \frac{dv}{dy} \cdot v$ и данное уравнение преобразуется в уравнение первого порядка относительно функции $v(y)$: $\frac{dv}{dy} \cdot v = f(y; v)$, а его общее решение имеет вид $v(y) = \varphi(x; C_1)$.

Так как $v(y) = \frac{dy}{dx}$, то получим уравнение с разделяющимися переменными $\frac{dy}{dx} = \varphi(y; C_1)$. Тогда общий интеграл первоначального уравнения имеет вид $\int \frac{dy}{\phi(y; C_1)} = x + C_2$.

Пример 5 **–** Найти общее решение уравнения $1 + y'^2 = 2yy''$.

Решение

Пусть $y' = v(y)$, $y'' = \frac{dv}{dy}v$, тогда $1 + v^2 = 2yv\frac{dv}{dy}$. Разделим переменные: $\frac{2v\,dv}{1 + v^2} = \frac{dy}{y}$. Тогда $\ln\left(1 + v^2\right) = \ln|y| + \ln C_0$. Значит, $1 + v^2 = \pm C_0 y = C_1 y$ и $v = \pm\sqrt{C_1 y - 1}$. Так как $v = \frac{dy}{dx}$, то $\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{C_1 y - 1}$ и $dx = \frac{dy}{\pm\sqrt{C_1 y - 1}}$.

Тогда общий интеграл $x + C_2 = \pm \frac{2}{C_1}\sqrt{C_1 y - 1}$. Отсюда находим общее решение: $y = \frac{C_1^2 \left(x + C_2\right)^2 + 4}{4C_1}$.

Линейные дифференциальные уравнения второго порядка. Дифференциальное уравнение вида $a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = b(x)$ называется *линейным* дифференциальным уравнением второго порядка. Коэффициенты уравнения $a_0(x), a_1(x), a_2(x)$ и свободный член $b(x)$ – заданные функции аргумента x. Если $b(x) = 0$, то $a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$ – *однородное* линейное дифференциальное уравнение; если $b(x) \neq 0$, то $a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = b(x)$ – *неоднородное* линейное уравнение.

Однородные линейные дифференциальные уравнения. *Теорема*. Если функции $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ являются решениями линейного однородного дифференциального уравнения, то функция $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, являющаяся линейной комбинацией функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$, также является решением этого уравнения при любых значениях постоянных C_1 и C_2.

Два частных решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ однородного линейного дифференциального уравнения второго порядка образуют *фундаментальную систему решений* на некотором интервале (α, β), если ни в одной точке этого интервала определитель

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)$$

не обращается в нуль.

Определитель $W(x)$ называется *определителем Вронского* (*вронскианом*).

Теорема о структуре общего решения. Если два частных решения $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ однородного линейного дифференциального уравнения второго порядка образуют на некотором интервале (α, β) фундаментальную систему, то общее решение этого уравнения имеет вид $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$.

При этом предполагается, что коэффициенты $a_0(x), a_1(x), a_2(x)$ непрерывны и $a_0(x) \neq 0$ на интервале (α, β).

Пример 6 **–** Найти общее решение уравнения $x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$ и выделить из него частное решение, удовлетворяющее следующим условиям: $y\big|_{x=1} = 0$, $y'\big|_{x=1} = 1$.

Решение

Данное уравнение является однородным линейным, а его частными решениями являются функции $y_1 = x$ и $y_2 = x^2$. Они образуют фундаментальную систему решений на любом интервале, не содержащем точку $x = 0$, т. к. $W(x) = \begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = 2x^2 - x^2 = x^2$. Поэтому на основании теоремы о структуре общего решения имеем $y = C_1 x + C_2 x^2$.

Найдем $y' = C_1 + 2C_2 x$. Тогда при $y'\big|_{x=1} = 1$ получим $1 = C_1 + 2\,C_2$, а при $y\big|_{x=1} = 0$ получим $0 = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 1 = C_1 + C_2$. Из системы $\begin{cases} C_1 + C_2 = 0; \\ 1 = C_1 + 2\,C_2 \end{cases}$ находим, что $C_1 = -1, C_2 = 1$. Искомое частное решение имеет вид $y = x^2 - x$.

Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Разделим все члены уравнения $a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$ с постоянными коэффициентами a_0, a_1, a_2 на a_0 при условии, что $a_0 \neq 0$. Обозначив $\frac{a_1}{a_0} = p$, $\frac{a_2}{a_0} = q$, получим уравнение $y'' + py' + qy = 0$. Его частное решение запишем в виде $y = e^{kx}$, тогда $e^{kx}k^2 + pke^{kx} + qe^{kx} = 0$ или $k^2 + pk + q = 0 -$ характеристическое уравнение. Оно позволяет находить коэффициент k.

Если корни характеристического уравнения действительны и различны, $k_1 \neq k_2$, то $y_1 = e^{k_1 x}$, $y_2 = e^{k_2 x}$. Общее решение имеет вид $Y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$.

Если корни характеристического уравнения равны, тогда общее решение имеет вид $Y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x e^{k_1 x}$ или $Y = e^{k_1 x}\left(C_1 + C_2 x\right)$.

Если корни характеристического уравнения комплексные, $k_1 = \alpha + \beta i, k_2 = \alpha - \beta i$, то общее решение уравнения имеет вид $Y = C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x}\sin\beta x$ или $Y = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x\right)$.

***Пример** 7* – Найти общее решение дифференциального уравнения:

1) $y'' + 5y' + 6y = 0$;
2) $y'' - 2y' + y = 0$;
3) $y'' + 4y' + 13y = 0$.

Решение

1 Характеристическое уравнение $k^2 + 5k + 6 = 0$; его корни $k_1 = -2$, $k_2 = -3$. Фундаментальная система частных решений $y_1 = e^{-2x}$, $y_2 = e^{-3x}$. Общее решение $Y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x}$.

2 Характеристическое уравнение $k^2 - 2k + 1 = 0$; его корни $k_1 = k_2 = 1$. Фундаментальная система частных решений $y_1 = e^x,\ y_2 = xe^x$. Общее решение $Y = e^x\left(C_1 + C_2 x\right)$.

3. Характеристическое уравнение $k^2 + 4k + 13 = 0$; его корни $k_1 = -2 + 3i$, $k_2 = -2 - 3i$; $\alpha = -2, \beta = 3$. Фундаментальная система частных решений $y_1 = e^{-2x}\cos 3x$, $y_2 = e^{-2x}\sin 3x$. Общее решение уравнения имеет вид $Y = e^{-2x}\left(C_1\cos 3x + C_2 \sin 3x\right)$.

Пример 8 – Найти частное решение системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

$$\begin{cases} x' = 3x - y; \\ y' = 4x - y, \end{cases} \quad x(0) = 5,\ y(0) = 8.$$

Решение

Выразим y из первого уравнения системы: $y = -\dfrac{dx}{dt} + 3x.$

Дифференцируем по t: $\dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{d^2x}{dt^2} + 3\dfrac{dx}{dt}.$

Подставим y и $\dfrac{dy}{dt}$ во второе уравнение системы:

$$-\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} = 4x - \left(-\frac{dx}{dt} + 3x\right),$$

$$-\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} = 4x + \frac{dx}{dt} - 3x,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} + x = 0.$$

Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = 1$ – кратные действительные корни, поэтому $x(t) = \left(C_1 + C_2 t\right)e^t$.

Дифференцируем по t: $x'(t) = C_2 e^t + \left(C_1 + C_2 t\right)e^t = \left(C_1 + C_2 + C_2 t\right)e^t$.

Подставим $x(t)$ и $x'(t)$ в уравнение

$$y(t) = -\frac{dx}{dt} + 3x = -\left(C_1 + C_2 + C_2 t\right)e^t + 3\left(C_1 + C_2 t\right)e^t =$$

$$= \left(-C_1 - C_2 - C_2 t + 3C_1 + 3C_2 t\right)e^t = \left(2C_1 - C_2 + 2C_2 t\right)e^t.$$

Общее решение системы $\begin{cases} x(t) = (C_1 + C_2 y)e^t; \\ y(t) = (2C_1 - C_2 + 2C_2 t)e^t, \end{cases}$ где $C_1, C_2 - \text{Const}$.

Найдем частное решение, соответствующее заданным начальным условиям: $\begin{cases} x(0) = C_1 = 5; \\ y(0) = 2C_1 - C_2 = 8. \end{cases}$ Решения системы $C_1 = 5, C_2 = 2$ определяют частное решение системы $\begin{cases} x(t) = (5 + 2t)e^t; \\ y(t) = (8 + 4t)e^t. \end{cases}$

Задачи для самостоятельной работы

1 Решить уравнения с разделяющимися переменными:

а) $(x+1)y' + xy = 0$; б) $(1 + y^2)xdx + (1 + x^2)dy = 0$.

2 Решить уравнения в полных дифференциалах:

а) $\frac{1}{x}dy - \frac{y}{x^2}dx = 0$; б) $\frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = 0$.

3 Решить дифференциальные уравнения, используя методы понижения порядка:

а) $y'' = \frac{1}{1 + x^2}$; в) $(1 - x^2)y'' + xy' - 2 = 0$;

б) $2yy'' = y'^2 + y^2$; г) $(y-1)y'' = 2y'^2$.

4 Найти общие решения дифференциальных уравнений:

а) $y'' - 2y' - 2y = 0$; б) $4y'' - 8y' + 5y = 0$; в) $y'' + 6y' + 13y = 0$.

2 Числовые ряды

Выражение вида $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \; (a_n \in R)$ называется ***числовым рядом***. Числа $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ называются членами ряда, а число $a_n -$ n-м или общим членом ряда. Суммы $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, $S_3 = a_1 + a_2 + a_3$, …, $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$, … называются частичными суммами ряда, а $S_n -$ n-й частичной суммой ряда.

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{n+k} = a_{n+1} + a_{n+2} + + a_{n+3} + \ldots = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k$ называется n-м остатком ряда.

Ряд называется сходящимся, если последовательность его частичных сумм сходится, т. е. если существует $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. Этот предел называется суммой ряда и записывается $S=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$. Разность $r_n = S - S_n$ называется остатком ряда. Если последовательность частичных сумм ряда расходится, то он называется расходящимся, т. е. $\lim_{n\to\infty} S_n$ не существует или бесконечен.

Теорема 1. Сходимость или расходимость ряда не нарушится, если изменить, добавить или отбросить конечное число членов ряда (сумма ряда при этом не изменится).

Теорема 2. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится и имеет сумму S, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}Ca_n$, полученный из предыдущего умножением всех членов на одно и то же число С, также сходится и имеет сумму CS, т. е. $\sum_{n=1}^{\infty}C a_n = CS$.

Теорема 3. Сходящиеся ряды можно почленно складывать и вычитать, т. е. если $\sum_{n=1}^{\infty}U_n = S$, $\sum_{n=1}^{\infty}V_n = T$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(U_n \pm V_n\right)$ сходится и имеет сумму $S \pm T$.

Необходимый признак сходимости. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}U_n$ сходится, то его общий член U_n стремится к нулю при $n \to \infty$, т. е. $\lim_{n\to\infty}U_n = 0$.

Отсюда следует, что если $\lim_{n\to\infty}U_n \neq 0$, то ряд расходится.

Если все члены ряда $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ больше 0, то он называется знакоположительным. Для такого ряда частичная сумма S_n возрастает с возрастанием n. Положительный ряд либо сходится, либо его сумма бесконечна, т. е. $\lim_{n\to\infty}S_n = S$ или $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$.

Достаточные признаки сходимости.

Признак сравнения. Пусть имеются два ряда с положительными членами

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots . = \sum_{n=1}^{\infty} a_n; \tag{1}$$

$$b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n + \ldots . = \sum_{n=1}^{\infty} b_n. \tag{2}$$

Пусть, начиная с некоторого номера n_0, члены ряда (1) меньше соответствующих членов ряда (2), т. е. $0 \le a_n < b_n$ $\left(\forall n > n_0\right)$. Тогда:

1) если ряд (2) сходится, то ряд (1) тоже сходится. В этом случае ряд (2) называется *мажорантой ряда* (1). Таким образом, положительный ряд **сходится**, если он обладает сходящейся мажорантой;

2) если ряд (1) расходится, то ряд (2) тоже расходится.

Предельный признак сравнения. Если для рядов (1) и (2) выполняется условие

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=A\left(A=\mathrm{Const},\ A>0\right),$$

то два ряда сходятся или расходятся одновременно.

Признак Даламбера. Если члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ положительны и существует $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=k$, то при $k<1$ ряд сходится; при $k>1$ ряд расходится; при $k=1$ вопрос о сходимости ряда не решен (требуется дополнительное исследование с использованием других достаточных признаков сходимости).

Признак Коши. Если для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ с положительными членами существует $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=k$, то при $k<1$ ряд сходится; при $k>1$ ряд расходится; при $k=1$ вопрос о сходимости ряда не решен (требуется дополнительное исследование с использованием других достаточных признаков сходимости).

Интегральный признак Коши. Если члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ таковы, что $a_n=f(n)$, а функция $f(x)$ – непрерывная положительная монотонно убывающая на $[1;+\infty)$, то ряд сходится (расходится) тогда и только тогда, когда сходится (расходится) несобственный интеграл $\int_1^{+\infty}f(x)\,dx$.

«Эталонными» рядами для сравнения являются следующие ряды:

1) *геометрический ряд* $a+aq+aq^2+aq^3+\ldots+aq^{n-1}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}aq^n$ сходится, если $q<1$ и $S=\dfrac{a}{1-q}$; если $q\geq 1$, то геометрический ряд расходится;

2) *гармонический ряд* $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ расходится;

3) *обобщенный гармонический ряд* (*ряд Дирихле*) $1+\dfrac{1}{2^p}+\dfrac{1}{3^p}+\ldots+\dfrac{1}{n^p}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$ сходится при $p>1$ и расходится при $p\leq 1$.

Пример 1 – Установить сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\left(n+1\right)}$ и найти его сумму.

Решение

Так как члены ряда положительные, то $S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} =$
$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$. Данный ряд сходится, т. к. $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$, и его сумма $S = 1$.

Пример 2 – Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+5}{n+7}$.

Решение

Все члены ряда положительны; применим необходимый признак сходимости. Найдем $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+5}{n+7} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n\left(n+\frac{5}{n}\right)}{n\left(1+\frac{7}{n}\right)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+\frac{5}{n}}{1+\frac{7}{n}} = \infty$. Так как предел n-го члена ряда не стремится к нулю, то данный ряд расходится.

Пример 3 – Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$.

Решение

Обозначим $a_n = \frac{n}{2^n}$, $a_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}}$ и найдем $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)\cdot 2^n}{n\cdot 2^{n+1}} = \frac{1}{2}$. По признаку Даламбера данный ряд сходится.

Пример 4 – Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7n+5}{2n+3}\right)^n$.

Решение

Данный ряд является рядом с положительными членами. Применим признак Коши. Найдем $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{7n+5}{2n+3}\right)^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{7n+5}{2n+3} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n\left(7+\frac{5}{n}\right)}{n\left(2+\frac{3}{n}\right)} = \frac{7}{2}$.

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} > 1$, то данный ряд расходится.

Числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется **знакопеременным**, если он содержит бесконечное число как положительных, так и отрицательных членов. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$, составленный из абсолютных величин членов ряда, сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется **абсолютно сходящимся**. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется **условно сходящимся**.

Из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *следует* сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, но из расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *не следует* расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Ряды, в которых за каждым положительным членом следует отрицательный и за каждым отрицательным следует положительный, т. е. ряды вида $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n+1} a_n + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$, называются **знакочередующимися.**

Признак Лейбница (*достаточный признак сходимости знакочередующегося ряда*). Если в знакочередующемся ряде $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ абсолютные величины членов ряда убывают, т. е. $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots > a_n > \ldots$, и общий член стремится к нулю, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то ряд сходится. Его сумма $0 < S \le a_1$.

Пример 5 **–** Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

Решение

Рассмотрим члены ряда по абсолютной величине и сравним их. Получим $\left(1+\dfrac{1}{1}\right)^1 > \left(1+\dfrac{1}{2}\right)^2 > \left(1+\dfrac{1}{3}\right)^3 > \ldots > \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n > \ldots$ – убывающая последовательность.

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e \ne 0$, то по признаку Лейбница ряд расходится.

Пример 6 – Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{1}{n}$.

Решение

По признаку Лейбница $\frac{1}{1}>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\ldots>\frac{1}{n}>\ldots$, эта последовательность убывающая; $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n\cdot}=0$. Данный ряд сходится. Ряд из абсолютных величин членов, т. е. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, расходится. Следовательно, данный ряд сходится условно.

Пример *7* – Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(-1)^n}{n^2}$.

Решение

По признаку Лейбница $\frac{1}{1}>\frac{1}{2^2}>\frac{1}{3^2}>\ldots>\frac{1}{n^2}>\ldots$, эта последовательность убывающая; $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$. Данный ряд сходится. Ряд из абсолютных величин членов, т. е. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, сходится как обобщенный гармонический ряд (при $p=2$). Следовательно, исходный ряд сходится абсолютно.

Задачи для самостоятельной работы

1 Установить сходимость или расходимость рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{1000n+1}\right)$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n-1}{9n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{\left(n^2+1\right)^2}$.

2 Используя признак сравнения, исследовать на сходимость ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2+3}\right)$; б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}-1}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n-1}{9n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$.

3 Используя признак Даламбера, исследовать на сходимость ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2n-1)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$.

4 Используя признак Коши, исследовать на сходимость ряды:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{2^{3n-1}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{3n+2}\right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{n}\right)^n$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n-1}{6n+7}\right)^{(n+1)^2}$.

5 Используя интегральный признак Коши, исследовать на сходимость ряды:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[6]{(2n+3)^7}}$; б) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{(n^2+1)^2}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{(5n-1)^2}}$.

6 Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряды:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$; б) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{2n-1}$; в) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{2n-1}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)}$.

3 Функциональные ряды

Выражение вида $u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ называется **функциональным рядом**. Если у членов функционального ряда зафиксировать значение аргумента $x=x_0$, то полученный ряд будет являться числовым рядом $u_1(x_0)+u_2(x_0)+u_3(x_0)+\ldots+u_n(x_0)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$.

Функциональный ряд называется *сходящимся в точке* $x=x_0$, если сходится числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$. Множество значений x, при которых ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ сходится, называется *областью сходимости функционального ряда*.

Если значение x_0 принадлежит области сходимости функционального ряда, то $u_1(x_0)+u_2(x_0)+\ldots+u_n(x_0)+\ldots=S(x_0)$ – *сумма* ряда в точке $x=x_0$.

Если $S(x)$ – сумма ряда, а $S_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\ldots+u_n(x)-$ n-я частичная сумма, то $r_n(x)=S(x)-S_n(x)=u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\ldots$ его n-й *остаток*. В области сходимости ряда $\lim_{n\to\infty}S_n(x)=S(x)$, а $\lim_{n\to\infty}r_n(x)=0$.

Функциональный ряд $\sum f(x)$ называется *равномерно сходящимся* к $f(x)$ на некотором множестве H, принадлежащем области сходимости D функционального ряда, если $\forall\varepsilon>0\ \exists\, n\in \mathrm{N}$ такой, что $\left|S_n(x)-f(x)\right|<\varepsilon$ для $\forall n>N,\ \forall x\in H$.

Функциональный ряд называется *мажорируемым в области* D, если существует сходящийся числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\ (\alpha_n>0)$ такой, что $\forall x\in D$ справедливы неравенства $\left|u_k(x)\right|\le\alpha_k$ ($k=1,2,\ldots$). Таким образом, ряд называется *мажорируемым в области* D, если каждый его член по абсолютной величине не больше соответствующего члена некоторого сходящегося числового ряда с положительными членами.

Равномерно сходящиеся ряды, для которых можно найти мажорирующийся сходящийся ряд, часто называют *правильно сходящимися.*

Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функциональных рядов: функциональный ряд, мажорируемый в некоторой области, равномерно сходится во всех точках этой области.

Свойства равномерно сходящихся функциональных рядов.

1 Всякий функциональный ряд, правильно сходящийся на сегменте $[a, b]$, сходится абсолютно в любой точке этого сегмента.

2 Если члены правильно сходящегося на сегменте $[a, b]$ функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ непрерывны, то сумма также непрерывна на сегменте $[a, b]$.

3 Если члены правильно сходящегося на сегменте $[a, b]$ функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ непрерывны на этом сегменте, то ряд почленно интегрируем.

4 Пусть функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$сходится на сегменте $[a, b]$ и его члены имеют непрерывные производные $u_n'(x)$ ($n=1, 2, \ldots$). Тогда если ряд, полученный после почленного дифференцирования, является правильно сходящимся на $[a, b]$, то его сумма равна производной от суммы данного ряда.

Пример 1 – Найти область сходимости функционального ряда $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^6}+\ldots+\frac{1}{x^{2n}}+\ldots$.

Решение

Члены ряда образуют геометрическую прогрессию $q=\frac{1}{x^2}$, которая сходится при $|q|<1$ и расходится при $|q|\geq 1$. Поэтому данный ряд сходится для тех значений x, для которых $\frac{1}{x^2}<1$, или $x^2>1$.Таким образом, ряд сходится для всех точек x, для которых $|x|>1$. Область сходимости данного ряда состоит из двух бесконечных интервалов: $-\infty<x<-1$ и $1<x<+\infty$.

Пример 2 – Проверить, является ли равномерно сходящимся функциональный ряд $\frac{\cos x}{1}+\frac{\cos 2x}{2^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\ldots+\frac{\cos nx}{n^2}+\ldots$.

Решение

Сравним данный ряд со сходящимся рядом $\frac{1}{1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots$. Для всех значений x выполняется неравенство $\left|\frac{\cos nx}{n^2}\right|\le\frac{1}{n^2}$ $(n=1, 2, \ldots)$, поэтому данный функциональный ряд – мажорируемый на всей оси Ox, по признаку Вейерштрасса он является равномерно сходящимся на всей оси Ox.

Задачи для самостоятельной работы

1 Найти область сходимости функциональных рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-x)^{n-1}}{n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n\cdot 9^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(nx)^2}{2^n}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n n}{3^n(n+1)^2}$.

2 Найти области сходимости функциональных рядов $(x\in R)$ и исследовать ряды на абсолютную сходимость:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ n^{-x}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!(x+3)^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^x$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{x^n}$.

3 Найти области равномерной сходимости функциональных рядов $(x\in R)$:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ n^{-x}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$.

4 Степенные ряды

Степенным рядом по степеням $x-x_0$ называется функциональный ряд вида $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\,(x-x_0)^n$, где $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ – постоянные числа, называемые *коэффициентами ряда*; x_0 – фиксированное число. Если $x_0=0$, то получается ряд вида $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\,x^n$.

Теорема Абеля. Если степенной ряд сходится при некотором значении $x = x_1 \neq 0$, то он сходится, и притом абсолютно, при всех значениях x, для которых $|x| < |x_1|$.

Если степенной ряд расходится при некотором значении $x = x_2$, то он расходится при всех значениях x, для которых $|x| < |x_2|$.

Интервалом сходимости степенного ряда называется промежуток $(-R, R)$ такой, что для всякой точки x, которая лежит внутри этого интервала, ряд сходится (абсолютно), а для точек x, лежащих вне его, ряд расходится. Число R называется *радиусом сходимости*. При всех $|x| < R$ степенной ряд сходится, а при всех $|x| > R$ расходится. Радиус сходимости степенного ряда можно определить через его коэффициенты: $R = \lim\limits_{n \to \infty} \left| \dfrac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ или $R = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$.

Исследовать степенной ряд на сходимость означает *найти его интервал сходимости* и *установить сходимость или расходимость ряда* в граничных точках интервала, т. е. *при* $x = R$ *и* $x = -R$.

Свойства степенных рядов.

1 Если степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ имеет интервал сходимости $(-R, R)$, тогда ряды, полученные из данного ряда его почленным дифференцированием и интегрированием, имеют тот же интервал сходимости, что и данный ряд.

2 Если степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ имеет интервал сходимости $(-R, R)$, а r – произвольное положительное число, меньшее чем $R \, (0 < r < R)$, тогда степенной ряд является правильно сходящимся на сегменте $[-R, R]$.

3 Сумма степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ является непрерывной функцией в каждой точке его интервала сходимости $(-R, R)$.

4 Степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ можно почленно дифференцировать в любой точке его интервала сходимости.

5 Степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ можно почленно интегрировать в интервале сходимости $(-R, R)$.

Пример 1 **–** Найти область сходимости ряда $1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} + \ldots$.

Решение

Рассмотрим ряд $1+\frac{|x|}{1!}+\frac{|x|^2}{2!}+\ldots+\frac{|x|^n}{n!}+\ldots$, члены которого равны абсолютным величинам членов данного ряда. Применим признак Даламбера: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}:\frac{|x|^n}{n!}\right)=|x|\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=|x|\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=0<1$, то ряд $1+\frac{|x|}{1!}+\frac{|x|^2}{2!}+\ldots+\frac{|x|^n}{n!}+\ldots$ и данный ряд сходится на всей числовой оси. Значит, радиус сходимости $R=\infty$.

Пример 2 **–** Найти радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n^3}$.

Решение

Так как $a_n=\frac{1}{n^3}$, $a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)^3}$, то $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3}{n^3}=1$.

Если функция $y=f(x)$ раскладывается в степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\,(x-x_0)^n$ с областью сходимости D, т. е. $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\,(x-x_0)^n$ для любого x из области сходимости, то этот ряд является ее **рядом Тейлора** в точке x_0:

$$f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Если положить, что $x_0=0$, то получится ряд **Маклорена** функции $f(x)$.

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Разложения в ряд Маклорена некоторых элементарных функций приведены в таблице 1.

Таблица 1 – Разложение в ряд Маклорена

Функция	Разложение в ряд Маклорена	Условие сходимости ряда
e^x	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!} = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} + \ldots$	$\lvert x \rvert < \infty$
$\sin x$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \ldots$	$\lvert x \rvert < \infty$
$\cos x$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^{n} \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \ldots$	$\lvert x \rvert < \infty$
$\dfrac{1}{1-x}$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$	$-1 < x < 1$
$(1+x)^m$	$1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!} x^n =$ $= 1 + mx + \dfrac{m(m-1)}{2!} x^2 + \dfrac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \ldots$	$-1 < x < 1$
$\ln(1+x)$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{x^n}{n} = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \ldots$	$-1 < x \le 1$
$\ln(1+x)$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{x^n}{n} = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \ldots$	$-1 < x \le 1$
$\operatorname{arctg} x$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{x^{2n-1}}{2n-1} = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \ldots$	$-1 \le x \le 1$

Пример 3 – Разложить в степенной ряд функцию $f(x) = e^{-x^2}$.

Решение

Положим, $-x^2 = t$. Тогда $e^{-x^2} = e^t$. Запишем разложение функции e^t, применив формулу из таблицы 1: $e^t = 1 + t + \dfrac{t^2}{2!} + \dfrac{t^3}{3!} + \ldots + \dfrac{t^n}{n!} + \ldots$. При $t = -x^2$ получим разложение $e^{-x^2} = 1 - x^2 + \dfrac{x^4}{2!} - \dfrac{x^6}{3!} + \ldots + \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{n!} + \ldots$, справедливое для всех значений x. Тогда $e^{-x^2} = 1 - \dfrac{x^2}{1!} + \dfrac{x^4}{2!} - \dfrac{x^6}{3!} + \ldots + \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{n!} + \ldots$.

Пример 4 – Разложить функцию $f(x) = x^3 + 4x^2 - 3x + 2$ в ряд Тейлора по степеням $(x-1)$.

Решение

Разложение функции проводится по степеням $(x-1)$, значит, $x_0=1$. Тогда $f(x_0)=f(1)=4$; $f'(x_0)=f'(1)=8$; $f''(x_0)=f''(1)=14$; $f'''(x_0)=f'''(1)=6$; $f^{(4)}(x_0)=6'=0$, все остальные производные будут нулевыми. Таким образом,

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots=$$

$$=4+\frac{8}{1!}(x-1)+\frac{14}{2!}(x-1)^2+\frac{6}{3!}(x-1)^3+0+0+\ldots=4+8(x-1)+7(x-1)^2+(x-1)^3.$$

Задачи для самостоятельной работы

1 Найти радиусы сходимости степенных рядов:

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{2^n}$; б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(nx)^2}{2^n}$; в) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{3^n}$; г) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2^n}$.

2 Найти области сходимости степенных рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{(2n-1)(2n-1)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{3\sqrt[n]{n}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-2)^n}{2\sqrt[n]{n+1}}$; г) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{nx^n}{n!}$.

3 Разложить в ряд Маклорена функции:

а) $f(x)=\cos^2 x$; б) $f(x)=\frac{1}{(1-x)(1+2x)}$; в) $f(x)=\frac{1}{2+4x}$.

4 Разложить в ряд Тейлора функцию:

а) $f(x)=x^5-4x^4+2x^3+2x+1$ по степеням $(x+1)$;

б) $f(x)=\frac{1}{(x-3)^2}$ по степеням $(x-1)$;

в) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-1}}$ по степеням $(x-2)$.

5 Ряды Фурье

Рядом Фурье периодической функции $f(x)$ с периодом 2π, определенной на отрезке $[-\pi,\pi]$, называется ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

где

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \ (n = 0, 1, 2, \dots);$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \ (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Коэффициенты a_0, a_n, b_n называются *коэффициентами Фурье* функции $f(x)$. Если ряд Фурье сходится, то его сумма $S(x)$ есть периодическая функция с периодом $T=2\pi$, т. е. $S(x+2\pi) = S(x)$.

Найти ряд Фурье данной функции означает нахождение коэффициентов Фурье этой функции по указанным формулам и запись тригонометрического ряда Фурье с этими коэффициентами.

Теорема Дирихле. Пусть функция $f(x)$ на отрезке $[-\pi, \pi]$ имеет конечное число экстремумов и является непрерывной, за исключением конечного числа точек разрыва 1-го рода (т. е. удовлетворяет условиям Дирихле). Тогда ряд Фурье этой функции сходится в каждой точке сегмента $[-\pi, \pi]$ и сумма ряда вычисляется следующим образом:

1) $S(x) = f(x)$ во всех точках непрерывности $f(x)$, лежащих внутри отрезка $[-\pi, \pi]$;

2) $S(x) = \frac{1}{2}[f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)]$, где x_0 – точка разрыва 1-го рода функции $f(x)$;

3) $S(x) = \frac{1}{2}[f(-\pi + 0) + f(\pi - 0)]$ на концах промежутка, т. е. при $x = \pm\pi$.

Для случая, когда $f(x)$ – *четная функция*, ее ряд Фурье содержит только свободный член и косинусы, т. е.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx\,,\ \ a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \ (n = 0, 1, 2, \dots).$$

В случае, когда $f(x)$ – *нечетная функция*, ее ряд Фурье содержит только синусы, т. е.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx\,,\ \ b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \ (n = 0, 1, 2, \dots).$$

В случае, когда $f(x)$– *периодическая функция* с периодом $T = 2l$, для которой на сегменте $[-l, l]$ выполняются условия Дирихле, эта функция может быть представлена в виде суммы ряда Фурье

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right),$$

где

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx;$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx;$$

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\,dx.$$

В случае, когда $f(x)$ – *четная* функция, ее ряд Фурье содержит только свободный член и косинусы, т. е.

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}, a_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx,\ a_0=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\,dx,\ b_n=0.$$

Если $f(x)$ – *нечетная* функция, то ее ряд Фурье имеет вид

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l},\ \ b_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx\ ,\ a_0=0,\ a_n=0.$$

Пример 1– Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом 2π функцию $f(x)$, заданную на промежутке $[-\pi;\pi]$.

$$f(x)=\begin{cases}0,\ -\pi\le x\le 0,\\ 4-2x,\ 0<x\le\pi.\end{cases}$$

Решение

Разложение данной периодической функции в ряд Фурье имеет вид $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$, где коэффициенты находятся с использованием следующих формул:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx,\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx,\ a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx.$$

Найдем эти коэффициенты.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}0\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(4-2x)\,dx=\frac{1}{\pi}\left(4x-2x^2\right)\Big|_0^{\pi}=\frac{1}{\pi}\left(4\pi-2\pi^2\right)=4-\pi;$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(4-2x)\cos nx\,dx=\begin{bmatrix}4-2x=u,\ du=-2dx\\ \cos nx\,dx=dv,\ v=\dfrac{1}{n}\sin nx\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{n\pi}(4-2x)\sin nx\Big|_0^{\pi}+\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx=\frac{1}{n\pi}(4-2\pi)\sin nx-\frac{1}{n\pi}4\cdot\sin 0-\frac{2}{n^2\pi}\cos nx\Big|_0^{\pi}=$$

$$=-\frac{2}{n^2\pi}\cos nx+\frac{2}{n^2\pi}\cos 0=\frac{2}{n^2\pi}\left(1-(-1)^n\right);$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(4-2x)\sin nx\,dx=\begin{bmatrix}4-2x=u,\ du=-2dx\\ \sin nx\,dx=dv,\ v=-\dfrac{1}{n}\cos nx\end{bmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{n\pi}(4-2x)\cos nx\Big|_0^{\pi}-\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx=$$

$$=-\frac{1}{n\pi}(4-2\pi)\cos n\pi+\frac{1}{n\pi}4\cdot\cos 0-\frac{2}{n^2\pi}4\cdot\sin nx\Big|_0^{\pi}=\frac{4}{n\pi}-\frac{4-2\pi}{n\pi}(-1)^n.$$

Тогда разложение в ряд Фурье данной функции следующее:

$$f(x)=\frac{4-\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n^2\pi}\cos nx+\left(\frac{4}{n\pi}-\frac{4-2\pi}{n\pi}(-1)^n\sin nx\right)\right).$$

Пример 2 – Разложить функцию $f(x)=2x-1$ в ряд Фурье на промежутке $-2\le x<2$.

Решение

Вычислим коэффициенты разложения:

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\,dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}(2x-1)\,dx=\frac{1}{2}\left(x^2-x\right)\Big|_{-2}^{2}=\frac{1}{2}\left(4-2-(4+2)\right)=-2;$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f\left(x\right)\cos\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}\left(\,2x-1\right)\cos\frac{n\pi x}{l}dx=\begin{bmatrix} u=2x-1,\; du=2dx \\ dv=\cos\frac{n\pi x}{2}dx,\; v=\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{n\pi}\left(\,2x-1\right)\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_{-2}^{2}-\frac{4}{n\pi}\int_{-2}^{2}\sin\frac{n\pi x}{2}dx\right)=\frac{1}{n\pi}\left(\,0-0\right)-\frac{2}{n\pi}\left(-\frac{2}{n\pi}\right)\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_{-2}^{2}=$$

$$=\frac{4}{n^2\pi^2}-\left(\cos n\pi-\cos\left(-n\pi\right)\right)=0;$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f\left(x\right)\sin\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}\left(\,2x-1\right)\sin\frac{n\pi x}{2}dx=\begin{bmatrix} u=2x-1,\; v=-\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}; \\ du=2dx;\; dv=\sin\frac{n\pi x}{2}dx,\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{2}{n\pi}\left(\,2x-1\right)\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_{-2}^{2}+\frac{4}{n\pi}\int_{-2}^{2}\cos\frac{n\pi x}{2}dx\right)=$$

$$=-\frac{1}{n\pi}\left[3\cos n\pi-\left(-5\right)\cos\left(-n\pi\right)\right]+\frac{2}{n\pi}\cdot\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_{-2}^{2}=$$

$$=-\frac{1}{n\pi}-\left(3\left(-1\right)^n+5\left(-1\right)^n\right)+\frac{4}{n^2\pi^2}\left(0-0\right)=-\frac{8\left(-1\right)^n}{n\pi}.$$

Таким образом,

$$f\left(x\right)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)=-\frac{2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(0\cdot\cos\frac{n\pi x}{2}-\frac{8\left(-1\right)^n}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\right)=$$

$$=-1-\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^n\sin\frac{n\pi x}{2}.$$

Пример 3 – Разложить в ряд Фурье функцию $f\left(x\right)=\begin{cases}-1, & -1\le x<0,\\ 1, & 0\le x\le 1.\end{cases}$

Решение

Так как по условию T = 2, то l = 1. Данная функция нечетная, значит, разложение в ряд Фурье содержит только синусы, т. е. $ghf\left(x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l}.$

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f\left(x\right)\sin\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{2}{1}\int_0^1 1\cdot\sin\frac{n\pi x}{1}dx=2\int_0^1\sin\left(n\pi x\right)dx=$$

$$=\frac{2}{n\pi}\int_0^1\sin\left(n\pi x\right)d\left(n\pi x\right)=-\frac{2}{n\pi}\left(\cos n\pi-\cos 0\right)=-\frac{2\left(\left(-1\right)^n-1\right)}{n\pi}=\frac{2\left(1-\left(-1\right)^n\right)}{n\pi}.$$

Тогда разложение имеет вид

$$f\left(x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2\left(1-\left(-1\right)^n\right)}{n\pi}\sin\left(n\pi x\right)\right]=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\left(1-\left(-1\right)^n\right)}{n}\sin\left(n\pi x\right)\right].$$

Задачи для самостоятельной работы

1 Разложить в ряд Фурье функцию $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x}{2},\ \pi<x<0,\\ 0,\ x=\pi.\end{cases}$

Ответ: $f\left(x\right)=\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x-\frac{1}{4}\sin 4x+\ldots+\left(-1\right)^{n+1}\frac{1}{n}\sin nx+\ldots.$

2 Разложить в ряд Фурье функцию $f\left(x\right)=\begin{cases}-1,\ -2<x<0,\\ 2,\ 0\le x\le 2.\end{cases}$

Ответ: $f\left(x\right)=\frac{1}{2}+\frac{6}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin\frac{\left(2n-1\right)\pi x}{2}.$

3 Разложить в ряд Фурье функцию $f\left(x\right)=2-3x$ с периодом 2π, заданную на отрезке $\left[-\pi;\pi\right]$.

Ответ: $f\left(x\right)=2+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^n\frac{\sin nx}{n}.$

4 Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $T=10$ функцию $f\left(x\right)=\begin{cases}10-x,\ 5<x<15,\\ 0,\ x=5.\end{cases}$

Ответ: $f\left(x\right)=\frac{10}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n x}{n}\sin\frac{\pi n x}{5}.$

5 Разложить в ряд Фурье по синусам функцию $f\left(x\right)=\begin{cases}x,\ 0\le x<1,\\ 2-x,\ 1\le x\le 2.\end{cases}$

Ответ: $f\left(x\right)=\frac{8}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^{n-1}\frac{\sin\frac{\left(2n-1\right)\pi x}{2}}{\left(2n-1\right)^2}.$

6 Разложить в ряд Фурье по косинусам функцию $f\left(x\right)=\begin{cases}1-\dfrac{x}{2},\ 0\le x<2,\\ 0,\ 2\le x<\pi.\end{cases}$

Ответ: $f\left(x\right)=\dfrac{1}{\pi}+\dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin^2 n}{n^2}\cos nx.$

6 Функции комплексной переменной

Пусть даны два непустых множества D и E, элементами которых являются соответственно комплексные числа $z=x+iy$ и $w=u+iv$. Если каждому числу $z\in D$ по некоторому правилу f поставлено в соответствие определенное число $w\in E$, то говорят, что на множестве D определена *однозначная функция комплексной переменной* z, и записывают $w=f\left(z\right)$. Множество D называется *областью определения* функции $w=f\left(z\right)$, а множество E − *областью значений*. Говорят также, что точка w – *образ* точки z, а точка z – *прообраз* точки w.

Если каждому z соответствует несколько значений w, то функция $w=f\left(z\right)$ называется *многозначной*.

Геометрический смысл функции комплексной переменной: функция $w=f\left(z\right)$ устанавливает соответствие между точками области D комплексной плоскости z и точками области E комплексной плоскости w.

Функцию комплексной переменной можно записать в виде

$$w=f\left(z\right)=f\left(x+iy\right)=u\left(x;y\right)+v\left(x;y\right)i,$$

т. е. выделить ***действительную*** $u\left(x;y\right)$ и ***мнимую*** $v\left(x;y\right)$ части как две функции действительных переменных. Обозначают $u\left(x;y\right)=\operatorname{Re}f\left(x+iy\right)$ и $v\left(x;y\right)=\operatorname{Im}f\left(x+iy\right)$. Задание функции комплексной переменной $w=f\left(z\right)$ равносильно заданию двух функций двух действительных переменных.

δ-окрестностью точки z_0 называется внутренность круга радиусом δ с центром в точке z_0. Число w_0 называется *пределом* функции $w=f\left(z\right)$ в точке z_0, если для любого числа $\varepsilon>0$ существует число $\delta\left(\varepsilon\right)>0$, что для всех $z\ne z_0$ при $\left|z-z_0\right|<\delta$ следует неравенство $\left|f\left(z\right)-w_0\right|<\varepsilon$. Записывают $w_0=\lim\limits_{z\to z_0}f\left(z\right)$.

Функция $w=f\left(z\right)$ называется *непрерывной в точке* z_0, если она определена в этой точке и некоторой ее окрестности и существует предел $\lim\limits_{z\to z_0}f\left(z\right)$, равный значению функции в этой точке, т. е. $\lim\limits_{z\to z_0}f\left(z\right)=f\left(z_0\right)$.

Пример 1 – Найти действительную и мнимую части функции $\omega = z^2 + 2z$.

Решение

Так как $z = x + iy$, то $\omega = (x+iy)^2 + 2(x+iy) = x^2 - y^2 + 2x + (2xy + 2y)i$. Тогда $u(x;y) = x^2 - y^2 + 2x$ – действительная часть (не содержит мнимой единицы), $v(x;y) = 2xy + y$ – мнимая часть.

Пример 2 – Исследовать на непрерывность функцию $w = z^2 \operatorname{Re}\overline{z} - i\operatorname{Im}\left(z^2\right)$.

Решение

Если $z = x + iy$, то $\overline{z} = x - iy$, $\operatorname{Re}\overline{z} = x$, $\operatorname{Im}(x+iy)^2 = \operatorname{Im}\left(x^2 + 2xiy - y^2\right) = 2xy$. Тогда $w = (x+iy)^2 \operatorname{Re}(x - iy) - i\operatorname{Im}(x+iy)^2 = \left(x^2 - y^2 + 2xiy\right)x - 2xiy =$ $= x^3 - y^2x + 2x^2iy - 2xiy = \left(x^3 - xy^2\right) + \left(2x^2y - 2xy\right)i$.

Функции $u = x^3 - x^2y$, $v = 2x^2y - 2xy$ – непрерывные для всех $x, y \in R$, значит, w непрерывна на множестве комплексных чисел C.

Пример 3 – Определить функцию $w = f(z)$ по известным действительной и мнимой частям: $u(x;y) = x + y, v(x;y) = x - y$.

Решение

Если $z = x + iy$, то $\overline{z} = x - iy$, тогда $x = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$ и $y = -\frac{i}{2}(z - \overline{z})$. Получим выражения для $u(x;y) = x + y = \frac{1}{2}(z + \overline{z}) - \frac{i}{2}(z - \overline{z}) = \frac{1-i}{2}z + \frac{1+i}{2}\overline{z}$ и для $v(x;y) = x - y = \frac{1}{2}(z + \overline{z}) + \frac{i}{2}(z - \overline{z}) = \frac{1+i}{2}z + \frac{1-i}{2}\overline{z}$.

Следовательно, $f(z) = u(x;y) + iv(x;y) = \frac{1-i}{2}z + \frac{1+i}{2}\overline{z} + \frac{1+i}{2}iz + \frac{1-i}{2}i\overline{z} =$ $= \left(\frac{1-i}{2} + \frac{1+i}{2}i\right)z + \left(\frac{1+i}{2} + \frac{1-i}{2}i\right)\overline{z} = (1+i)\overline{z}$.

Задачи для самостоятельной работы

1 Найти действительную и мнимую части функций:

а) $w = \frac{\overline{z}}{i} + \frac{i}{\overline{z}}$; б) $w = 2i - z + iz^2$; в) $w = \frac{z+i}{z-i}$; г) $w = \frac{z^2 + z + 1}{iz + \overline{z}}$.

2 Определить функцию $w = f(z)$ по действительной и мнимой частям:

а) $u(x;y) = x^2 - y^2 - 2y - 1,\ v(x;y) = 2xy - y^2 - 2y - 1.$

Ответ: $w = z^2 + 2iz - 1;$

б) $u(x;y) = x\dfrac{x^2 + y^2 + 1}{x^2 + y^2},\ v(x;y) = y\dfrac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2}.$

Ответ: $w = z + \dfrac{1}{z}.$

7 Аналитические функции

Пусть функция комплексной переменной $w = f(z)$ определена в некоторой точке z_0 и ее окрестности. Если существует предел отношения приращения функции $\Delta w = f(z) - f(z_0) = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$ к приращению аргумента $\Delta z = z - z_0$ при $\Delta z = \Delta x + i\Delta y \to 0$, т. е. $z \to z_0$ и этот предел не зависит от способа стремления $z \to z_0$, то его называют **производной функции** в точке z_0:

$$w' = f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}.$$

Функция $w = f(z)$ называется **дифференцируемой** в точке z_0.

Теорема. Если функция $w = f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ определена в некоторой окрестности точки z_0, причем в этой точке действительные функции $u(x;y)$ и $v(x;y)$ дифференцируемы, то для дифференцируемости $w = f(z)$ в точке z_0 *необходимо и достаточно*, чтобы в этой точке выполнялись равенства

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Эти равенства (условия) называются **условиями Коши – Римана**. Независимость способа стремления $z \to z_0$ означает, что производную функции можно находить по одной из формул:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x} \text{ или } f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - i\,\frac{\partial u}{\partial y}.$$

При выполнении условий Коши – Римана производная $f'(z)$ может быть записана соответственно:

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\,\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\,\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\,\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}+i\,\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Однозначная функция $w=f(z)$ называется *аналитической* (*регулярной*, *голоморфной*) в точке z_0, если она дифференцируема в этой точке и некоторой ее окрестности. Функция $w=f(z)$ называется *аналитической* в области D, если она аналитическая в каждой точке этой области. Функция $w=f(z)$ *целая*, если она аналитична на C.

Дифференциалом dw аналитической функции $w=f(z)$ в точке z называется *главная часть* ее приращения, т. е. $dw=f'(z)\,dz$, где $dz=\Delta z$ – приращение аргумента.

Пример 1 – Доказать, что функция $f(z)=e^{2z}$ аналитична, и найти $f'(z)$.

Решение

Для данной функции $f(z)=e^{2z}=e^{2x}(\cos 2y+i\sin 2y)$ проверим выполнимость условий Коши – Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2e^{2x}\cos 2y,\ \frac{\partial u}{\partial y}=-2e^{2x}\sin 2y,\ \frac{\partial v}{\partial x}=2e^{2x}\sin 2y,\ \frac{\partial v}{\partial y}=2e^{2x}\cos 2y.$$

Условия Коши – Римана выполняются во всей плоскости, значит, функция $f(z)=e^{2z}$ является аналитической.

$$f'(z)=\left(e^{2z}\right)'=2e^{2x}\cos 2y+i\,2e^{2x}\sin 2y=2e^{2x}\left(\cos 2y+i\,\sin 2y\right)=2e^{2z}.$$

Пример 2 – Исследовать функцию $f(z)=z^2+z-1$ на дифференцируемость.

Решение

Так как $z=x+iy$, то $f(z)=(x+iy)^2+x+iy-1$, значит, $u=x^2-y^2+x-1$, $v=2xy+y$. Тогда $\frac{\partial u}{\partial x}=2x+1$, $\frac{\partial v}{\partial x}=2y$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-2y$, $\frac{\partial v}{\partial y}=2x+1$. Очевидно, что $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=2x+1$, $\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=-(-2y)$, значит, функция $f(z)$ дифференцируема в любой точке $z_0\in C$ и $f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=2x+1+i\,2y=2(x+iy)+1=2z+1$.

Пример 3 – Исследовать функцию $f(z)=\dfrac{1}{z}$ на дифференцируемость.

Решение

$f(z)=\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{x+iy}=\dfrac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)}=\dfrac{x}{x^2+y^2}-i\dfrac{y}{x^2+y^2}$. Тогда $u(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$, $v(x,y)=-\dfrac{y}{x^2+y^2}$. Так как $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$, то условия Коши – Римана выполнены во всех точках комплексной плоскости, кроме точки $x=y=0$, т. е. $z=0$, где частные производные не существуют.

Значит, данная функция неаналитична только в точке $z=0$. Тогда

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{y^2-x^2+i2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{-(x-iy)^2-x^2+i2xy}{\left((x+iy)(x-iy)\right)^2}=\frac{-1}{(x+iy)^2}=-\frac{1}{z^2}.$$

Действительная и мнимая части аналитической функции. Функция $\varphi(x,y)$, удовлетворяющая уравнению Лапласа $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0$, называется *гармонической.* Для функции $w=u+iv$, аналитической в области D, ее действительная и мнимая части являются гармоническими функциями. Это свойство аналитических функций позволяет *восстанавливать* аналитическую функцию, если известна одна из ее частей.

Пусть $u(x;y)$ является действительной частью некоторой аналитической функции $f(z)$ в области D. Запишем полный дифференциал для мнимой части $v(x;y)$ функции: $dv=v'_x\,dx+v'_y\,dy$. Используя условия Коши – Римана, получаем $dv=-u'_y\,dx+u'_x\,dy$.

Тогда

$$v(x,y)=\operatorname{Im}f(z)=\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}dv=\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}-u'_y\,dx+u'_x\,dy.$$

Если известна $v(x;y)$ – мнимая часть аналитической функции $f(z)$ в области D, то, поступая аналогично, получаем

$$u(x,y)=\operatorname{Re}f(z)=\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}du=\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}v'_y\,dx-v'_x\,dy.$$

Точка (x_0, y_0) – произвольная фиксированная точка области D, рассматриваемой как область определения действительных функций двух переменных $u(x;y)$ или $v(x;y)$, а путь интегрирования целиком лежит в области D.

Пример 4 – Восстановить аналитическую функцию $f(z)$, если известна ее мнимая часть $v(x,y) = 2x^2 - 2y^2 + x$.

Решение

Найдем частные производные: $\dfrac{\partial v}{\partial x} = 4x + 1$, $\dfrac{\partial v}{\partial y} = -4y$, $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 4$, $\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -4$.

Так как $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 4 - 4 = 0$, то функция $v(x,y)$ является гармонической на всей плоскости.

Так как $u(x,y) = \int\limits_{x_0,\, y_0}^{x\, y} du = \int\limits_{x_0,\, y_0}^{x\, y} v'_y\, dx - v'_x\, dy = \int\limits_{x_0,\, y_0}^{x\, y} (-4y)dx - (4x+1)dy$, то определим путь интегрирования – возьмем ломаную линию, звенья которой параллельны координатным осям. Тогда

$$u(x,y) = \int\limits_{x_0,\, y_0}^{x,\, y} (-4y)dx - (4x+1)dy = \int\limits_{x_0}^{x} (-4y_0)dx - \int\limits_{y_0}^{y} (4x+1)dy =$$

$$= (-4y_0)(x - x_0) - (4x+1)(y - y_0) = -4xy - y + y_0 - 4x_0 y_0.$$

Пусть $C = y_0 - 4x_0 y_0$, тогда $u(x,y) = -4xy - y + C$. Искомая аналитическая функция $f(z)$ запишется в виде $f(z) = -4xy - y + C + i\left(2x^2 - 2y^2 + x\right) =$ $= 2i\left(x^2 + 2ixy - y^2\right) + i(x + iy) + C = 2iz^2 + iz + C$.

При выполнении преобразований учтено, что $x = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$, $y = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$.

Задания для самостоятельной работы

1 Проверить выполнимость условий Коши – Римана и в случае их выполнения найти $f'(z)$:

а) $f(z) = e^{3z}$; в) $f(z) = sh\, z$; д) $f(z) = z^n$;

б) $f(z) = \cos z$; г) $f(z) = \ln\left(z^2\right)$; е) $f(z) = \sin \dfrac{z}{3}$.

2 Восстановить, если это возможно, аналитические функции $f(z)$ по их заданной действительной или мнимой части:

а) $u(x,y)=x^2-y^2-1$;

б) $v(x,y)=x^3-2xy^2+2$;

в) $u(x,y)=xe^x\cos y-ye^x\sin y$;

г) $v(x,y)=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$;

д) $u(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}-2y$;

е) $v(x,y)=2ex\sin y$;

ж) $u(x,y)=-y(4x+1)$;

з) $v(x,y)=y-e^{2x}\sin 2y$.

8 Интегрирование функций комплексной переменной

Пусть на комплексной плоскости C задана ориентированная кусочно-гладкая кривая L, на которой определена непрерывная функция $f(z)$. Разобьем эту кривую на n частей (z_{k-1},z_k) точками $z_k\in L$, $k=0,1,2,\ldots,n$, пронумерованными в направлении от z_0 – начальная точка кривой L до z_n – конечная точка этой кривой, и на каждой части выберем какую-нибудь точку C_k, $k=1,\ldots,n$, и в них вычисляется значение функции $f(C_k)$. Составим интегральную сумму $\sum\limits_{k=1}^{n}f(C_k)\Delta z_k$, где $\Delta z_k=z_k-z_{k-1}$.

Если существует конечный предел интегральной суммы при стремлении наибольшей из длин элементарных дуг к нулю при $n\to\infty$, независящий ни от способа разбиения дуги L на частичные дуги, ни от выбора точек C_k в них, то его называют *интегралом по кривой* (по контуру) L от функции $f(z)$ и обозначают $\int\limits_L f(z)dz$, т. е.

$$\int\limits_L f(z)dz=\lim_{\max|\Delta z_k|\to 0}\sum_{k=1}^{n}f(C_k)\Delta z_k.$$

Если $z=x+iy$ и $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, а $dz=dx+idy$, то, выделяя действительную $\operatorname{Re}\int\limits_L f(z)dz$ и мнимую $\operatorname{Im}\int\limits_L f(z)dz$ части, можно записать

$$\int\limits_L f(z)dz=\int\limits_L\big(u(x,y)+iv(x,y)\big)d(x+iy)=\int\limits_L\big(u(x,y)+iv(x,y)\big)(dx+idy)=$$
$$=\int\limits_L u(x,y)dx-v(x,y)dy+i\int\limits_L v(x,y)dx+u(x,y)dy.$$

Таким образом, интеграл $\int\limits_L f(z)dz$ может быть записан в виде суммы двух криволинейных интегралов 2-го рода.

Если кривая L задана уравнением $y = y(x)$ или парой параметрических уравнений $y = y(t)$, $x = x(t)$, причем начальная и конечная точки дуги кривой L соответствуют значениям параметра $t = t_0$ и $t = t_1$ соответственно, то

$$\int_L f(z)\,dz = \int_{t_0}^{t_1} f(z(t))\, z'(t)\, dt.$$

Интеграл $\int_L f(z)dz$ *существует*, если существуют соответствующие криволинейные интегралы $\int_L u(x,y)dx$ и $\int_L v(x,y)dx$. Свойства и методы вычисления интегралов по кривой аналогичны свойствам и методам вычисления криволинейных интегралов 2-го рода.

Пример 1 – Вычислить интеграл $\int_L \overline{z}\,dz$, где L – отрезок прямой, соединяющий точки $z_1 = 0$ и $z_2 = 1 + i$.

Решение

$\overline{z} = x - iy$, $dz = dx + i\,dy$. Уравнение линии L имеет вид $\dfrac{x-0}{1-0} = \dfrac{y-0}{1-0}$, т. е. $y = x$, $0 \le x \le 1$, $dy = dx$. Тогда

$$\int_L \overline{z}\,dz = \int_L (x - iy)(dx + i\,dy) = \int_L xdx + ydy + i\int_L xdy - ydx = \int_0^1 2x\,dx = 1.$$

Пример 2 – Вычислить интеграл $\int_L \overline{z}\,\mathrm{Re}\,zdz$, где L – отрезок прямой, соединяющий точки $z_1 = -2 - i$ и $z_2 = 1 + 2i$.

Решение

$\overline{z}\,\mathrm{Re}\,z = (x - iy)R(x + iy) = x^2 - ixy$. Тогда $u = x^2$, $v = -2xy$. Уравнение линии L (отрезок прямой, проходящей через точки $z_1 = -2 - i$ и $z_2 = 1 + 2i$) имеет вид $\dfrac{x-1}{-2-1} = \dfrac{y-2}{-1-2}$, т. е. $y = x + 1$, $dy = dx$, $x_1 = -2, x_2 = 1$. Тогда

$$\int_L \overline{z}\,\mathrm{Re}\,z\,dz = \int_L x^2\,dx + xydy + i\int_L (-xy)dx + x^2\,dy = \int_{-2}^{1} \left(x^2 + x(x+1)\right)dx +$$

$$+\, i\int_{-2}^{1} \left(-x(x+1) + (x+1)^2\right)dx = \frac{9}{2} + i\,\frac{3}{2}.$$

Интегралы по переменной z *можно вычислять непосредственно*, не выделяя действительную и мнимую части.

Теорема. Пусть функция $f(z)$ аналитическая в односвязной области D, а L – некоторая кривая (с начальной точкой z_1 и конечной точкой z_2), целиком лежащая в D. Тогда:

1) существует первообразная $F(z)$ для функции $f(z)$ в области D, и для интеграла $\int\limits_L f(z)dz$ верна формула *Ньютона – Лейбница*

$$\int\limits_L f(z)dz = F(z_2) - F(z_1),$$

т. е. этот интеграл не зависит от вида кривой L, а зависит от начальной и конечной точек z_1 и z_2;

2) если L – замкнутая кривая, то верна *теорема Коши*

$$\oint\limits_L f(z)dz = 0$$

(знаком $\oint\limits_L$ обозначается интеграл по замкнутой кривой L или контурный интеграл);

3) если точка z_0 лежит внутри замкнутой кривой L, то верна *интегральная формула Коши*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_L \frac{f(z)}{z - z_0}dz$$

и

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint\limits_L \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}dz, \ n = 1, 2, \ldots$$

(обход кривой L совершается против часовой стрелки).

Интегральные формулы Коши для функции и ее производных позволяют находить интегралы вида

$$\oint\limits_L \frac{f(z)}{z - z_0}dz = \begin{cases} 2\pi i f(z_0), & z_0 - \textit{внутри } L, \\ 0, & z_0 - \textit{вне } L; \end{cases}$$

$$\oint_L \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz = \begin{cases} \dfrac{2\pi i\, f^{(n)}(z_0)}{n!}, & z_0 - \textit{внутри } L, \\ 0, & z_0 - \textit{вне } L, \end{cases}$$

не находя первообразных, а преобразуя подынтегральную функцию, выделяя в ней конструкции, как в указанных формулах.

Пример 3 – Вычислить интеграл $\oint\limits_L \frac{z^2}{z^2+i}dz$ по замкнутой кривой L:

1) $|z| = \frac{1}{2}$; 2) $|z+i| = 1$.

Решение

1 Так как функция $\frac{z^2}{z^2+i}$ аналитична во всей комплексной плоскости C, кроме точки $-i$, которая не лежит внутри окружности $|z| = \frac{1}{2}$, то по теореме Коши получим, что $\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{z^2}{z^2+i}dz = 0$.

2 Так как функция $f(z) = z^2$ аналитична во всей комплексной плоскости C, а точка $z_0 = -i$ лежит внутри окружности $|z+i| = 1$, то по интегральной формуле Коши получим

$$f(z_0 = -i) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z+i|=1} \frac{z^2}{z^2+i}dz,$$

откуда

$$\oint\limits_{|z+i|=1} \frac{z^2}{z^2+i}dz = 2\pi i \cdot f(z_0 = -i) = 2\pi i \cdot (-i)^2 = 2\pi i \cdot (-1) = -2\pi i.$$

Пример 4 – Вычислить интеграл $\oint\limits_L \frac{1}{(z+2)^3 z}dz$ для указанного контура L:

1) $|z-2| = 1$; 2) $|z| = 1$; 3) $|z+2| = 1$.

Решение

1 Так как подынтегральная функция $\dfrac{1}{(z+2)^3 z}$ аналитическая во всей комплексной плоскости C, за исключением точек $z=-2$ и $z=0$, которые не лежат внутри окружности $|z-2|=1$ и на этой окружности, то по теореме Коши получим $\oint\limits_{|z-2=1|} \dfrac{1}{(z+2)^3 z} dz = 0$.

2 Так как функция $f(z)=\dfrac{1}{(z+2)^3 z}$ аналитическая на всей комплексной плоскости C, за исключением точки $z=-2$, которая не лежит внутри окружности $|z|=1$ и на этой окружности, а точка $z_0=0$ лежит внутри этой окружности, то по интегральной формуле Коши получим

$$f(z_0=0)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z|=1}\frac{\frac{1}{(z+2)^3}}{z-0}dz,$$

откуда

$$\oint\limits_{|z|=1}\frac{dz}{(z+2)^3}=2\pi i\cdot f(z_0=0)=2\pi i\cdot\frac{1}{(0+2)^3}=2\pi i\cdot\frac{1}{8}=\frac{\pi i}{4}.$$

3 Так как функция $f(z)=\dfrac{1}{z}$ аналитическая на всей комплексной плоскости C, за исключением точки $z=0$, которая не лежит внутри окружности $|z+2|=1$ и на этой окружности, а точка $z_0=-2$ лежит внутри этой окружности, то по интегральной формуле Коши получим

$$f''(z_0=-2)=\frac{2!}{2\pi i}\oint\limits_{|z+2|=1}\frac{\frac{1}{z}}{(z+2)^3}dz,$$

откуда

$$\oint\limits_{|z+2|=1}\frac{dz}{(z+2)^3}=\frac{2\pi i}{2!}\cdot f''(z_0=-2)=\pi i\cdot\left(\frac{1}{z}\right)''\Bigg|_{z_0=-2}=\pi i\cdot\left(-\frac{1}{z^2}\right)'\Bigg|_{z_0=-2}=\pi i\cdot\frac{2}{z^3}\Bigg|_{z_0=-2}=-\frac{\pi i}{4}.$$

Задачи для самостоятельной работы

1 Найти интеграл $\int\limits_L \overline{z}\, e^z\, dz$, L – отрезок прямой от точки $z_1 = 1$ до точки $z_2 = i$. Ответ: $(2\sin 1 - e) + i(1 - 2\cos 1)$.

2 Найти интеграл $\int\limits_L e^{\overline{z}}\, dz$, L – отрезок прямой от точки $z_1 = \pi$ до точки $z_2 = -i\pi$. Ответ: $-i\left(1 + e^{\pi}\right)$.

3 Найти интеграл $\int\limits_L (z-1)\cos z\, dz$, L – отрезок прямой от точки $z_1 = -\dfrac{\pi}{2}$ до точки $z_2 = \dfrac{\pi}{2}$. Ответ: -2.

4 Найти интеграл $\int\limits_L \left(2z + 3\overline{z}\right) dz$, L – верхняя полуокружность $|z-2| = 3$ от точки $z_1 = 5$ до точки $z_2 = -1$. Ответ: $-60 + 27\pi i$.

5 Найти интеграл $\int\limits_L \left(z^2 - 3z + 2\right) dz$, L – дуга параболы от точки $z_1 = 0$ до точки $z_2 = 4 + 2i$. Ответ: $\dfrac{14}{3}(-1 + 2i)$.

6 Найти интеграл $\int\limits_L \operatorname{Re} z\, dz$, L – дуга параболы от точки $z_1 = 0$ до точки $z_2 = 1 + 2i$. Ответ: $\dfrac{1}{2} + \dfrac{4}{3} i$.

7 Найти интеграл $\oint\limits_{|z-i|=1} \dfrac{1}{\left(25z^2+1\right)^4} dz$. Ответ: $\dfrac{\pi}{16}$.

8 Найти интеграл $\oint\limits_{|z|=1} \dfrac{1-\cos 2z}{z^3}\, dz$. Ответ: $4\pi i$.

9 Ряды в комплексной области

Пусть в комплексной области задан степенной ряд

$$c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \ldots + c_n(z - z_0)^n \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

который называется также *рядом по степеням* $(z - z_0)$. Этот ряд всегда сходится в точке $z = z_0$.

При $z_0=0$ получается ряд $c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, который называется рядом по степеням z. Этот ряд всегда сходится в точке $z_0=0$.

Точки $z=z_0$ и $z_0=0$ называют центрами сходимости указанных рядов.

Величины c_n являются числами и их называют *коэффициентами* ряда; они могут быть как действительными, так и комплексными.

Теорема Абеля. Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ сходится при $z=z_1$, то он *сходится абсолютно* при всех z, удовлетворяющих неравенству $|z|<|z_1|$, т. е в открытом круге радиусом $|z_1|$ с центром в точке $z_0=0$. Если же ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ расходится в точке $z=z_2$, то он *расходится* при всех z, для которых $|z|>|z_2|$, т. е. вне круга радиусом $|z_2|$.

Из теоремы следует, что существует такое число z_3 $(z_1 = z_2 = z_3)$, $|z_3| = R > 0$, что ряд сходится в открытом круге $|z|< R$ и расходится вне круга $|z|> R$. Число R называют *радиусом сходимости* ряда, а круг $|z|< R -$ *кругом сходимости.* Ряд может сходиться в единственной точке, в центре сходимости $z_0=0$ $(R=0)$, или на всей комплексной плоскости $R=\infty$.

В окружности $|z|= R$ ряд может сходиться или расходиться на всей окружности или в некоторых ее точках сходиться, а в некоторых – расходиться.

Радиус круга сходимости степенного ряда определяется по формулам

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|},\, c_n \neq 0; \;\; R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}},\, c_n \neq 0.$$

Формулы для радиуса сходимости получены для полных рядов, в которых содержатся все степени z или $(z-z_0)$, аналогично степенным действительным рядам с применением известных признаков Даламбера и радикального признака Коши.

Если ряд неполный, т. е. не содержит все степени z или $(z-z_0)$ (например, ряды вида $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{2n}$ или $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{2n+1}$), или имеется ряд по отрицательным степеням z, например, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}$, то в этих случаях область сходимости находят без определения радиуса сходимости, а непосредственно применяют признаки Даламбера или радикальный признак Коши:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}(z)|}{|u_n(z)|} < 1; \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n(z)|} < 1.$$

Пример 1 – Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.

Решение

Для данного ряда $c_n = \frac{1}{n!}$, $c_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$. Тогда радиус сходимости

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)!}{n!} \right) = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty,$$

т. е. $R = \infty$. Следовательно, областью сходимости является вся плоскость z.

Пример 2 – Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{(n+1)^{2^n}}$.

Решение

Так как для данного ряда $c_n = \frac{1}{(n+1)^{2^n}}$, $c_{n+1} = \frac{1}{(n+2)^{2^{n+1}}}$, то радиус сходимости

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{2^{n+1}(n+2)}{(n+1)2^n} \right| = 2.$$

Таким образом, данный ряд сходится в области $|z-i| < 2$.

Пример 3 – Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{5^n}$.

Решение

Данный ряд неполный, поэтому применим радикальный признак Коши:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n(z)|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|z^{2n}|}{5^n}} = \frac{|z|^2}{5} < 1.$$

Так как $\frac{|z|^2}{5} < 1$, то $|z| < \sqrt{5}$. Тогда ряд сходится в круге радиусом $R = \sqrt{5}$ с центром в точке $z = 0$.

При исследовании ряда на границе $|z|=\sqrt{5}$ получаем, что $z=\sqrt{5}\,e^{i\varphi}$. Числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{5}\,e^{i\varphi}\right)^{2n}}{5^n}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(e^{i\varphi}\right)^{2n}$ расходится по достаточному признаку расходимости ряда. Поэтому область сходимости данного ряда есть открытый круг $|z|<\sqrt{5}$.

Ряд Тейлора. Ряд Лорана. Однозначная и аналитическая функция $f(z)$ в точке z_0 разлагается в окрестности этой точки в *ряд Тейлора*:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\left(z-z_0\right)^n,$$

при этом коэффициенты c_n ряда определяются по формуле

$$c_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_L\frac{f(z)}{\left(z-z_0\right)^{n+1}}dz,\;\; n=0,1,2,\ldots.$$

При вычислении интеграла обход по контуру осуществляется в положительном направлении.

Радиусом сходимости R ряда Тейлора является расстояние до ближайшей особой точки функции $f(z)$, а контуром интегрирования L в формуле для вычисления c_n – контур любой формы, расположенный в круге сходимости радиусом R.

При $z_0=0$ ряд Тейлора называется рядом Маклорена.

Ряды основных элементарных функций комплексной переменной в области однозначности и аналитичности имеют вид рядов функций действительной переменной.

Если функция $f(z)$ является аналитической в некоторой кольцевой области, ограниченной концентрическими окружностями $R_1<|z-z_0|<R_2$, а точка z_0 – точкой, в которой функция $f(z)$ неаналитическая, то она разлагается в этой области в ряд общего вида по положительным и отрицательным степеням $(z-z_0)$ или в **ряд Лорана**:

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{\left(z-z_0\right)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n\left(z-z_0\right)^n=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}c_n\left(z-z_0\right)^n,$$

при этом коэффициенты ряда определяются по формуле

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

Контуром L является любой замкнутый контур, лежащий в кольце $R_1 < |z - z_0| < R_2$, например, окружность радиусом r внутри области кольца $R_1 < r < R_2$.

Часть ряда Лорана, а именно ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, называют ***правильной или регулярной*** частью ряда Лорана. Правильная часть есть степенной ряд, сходящийся в круге $|z - z_0| < R_2$.

Часть ряда Лорана, а именно ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}$, называют его ***главной или сингулярной*** частью. Главная часть представляет собой ряд, сходящийся вне круга $|z - z_0| > R_1$.

Так как область сходимости суммы рядов есть их общая область сходимости, то для ряда Лорана такой областью сходимости будет кольцевая область.

При разложении функций в ряды Тейлора – Маклорена и Лорана необязательно находить коэффициенты по указанным формулам. Можно применять приемы замены переменной, дифференцирования и интегрирования, сложения и вычитания рядов, а также их различные комбинации, как и в случае рядов для функций действительного аргумента.

Пример 4 – Разложить в ряд Лорана функцию $f(z) = \frac{\sin z}{z^2}$ в окрестности точки $z_0 = 0$. Указать главную и правильную части ряда и его область сходимости.

Решение

Используем известное разложение функции

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$$

в ряд (Тейлора) в области $0 \le |z| < +\infty$, т. е. во всей комплексной плоскости C:

$$\frac{\sin z}{z^2} = \frac{1}{z^2}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots\right) = \frac{1}{z} - \frac{z}{3!} + \frac{z^3}{5!} - \frac{z^5}{7!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n-1}.$$

Область сходимости ряда – вся комплексная плоскость C, за исключением точки $z=0$, т. е. кольцо $0<|z|<+\infty$. Главная часть ряда Лорана – выражение $\frac{1}{z}$, $-\frac{z}{3!}+\frac{z^3}{5!}-\frac{z^5}{7!}+\ldots$ – правильная часть.

Пример 5 – Найти разложение функции $f(z)=\frac{1}{3-z}$ в ряд Лорана по степеням $(z-1)$ в окрестности точки $z_0=1$. Указать главную и правильную части ряда и его область сходимости.

Решение

Выделим сначала выражение $(z-1)$ в знаменателе дроби $\frac{1}{3-z}$:

$$\frac{1}{3-z}=\frac{1}{2-(z-1)}=\frac{1}{2\left(1-\frac{z-1}{2}\right)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-1}{2}}.$$

Далее используем разложение дроби $\frac{1}{1-z}=\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ в бесконечно убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем $q=z$ в той области, где z – «мало» (т. е. в открытом круге $q=|z|<1$).

Тогда дробь $\frac{1}{1-\frac{z-1}{2}}$ представима в виде ряда Лорана, сходящегося в области, где $|q|=\left|\frac{z-1}{2}\right|$ «мало», т. е. в открытом круге $\left|\frac{z-1}{2}\right|<1,$ или $|z-1|<2.$

Тогда

$$\frac{1}{3-z}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-1}{2}}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{z-1}{2}+\ldots+\left(\frac{z-1}{2}\right)^n+\ldots\right)=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{z-1}{2\cdot 2}+\ldots+\frac{(z-1)^n}{2^{n+1}}+\ldots=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z-1)^n}{2^{n+1}}.$$

Область сходимости – открытый круг $|z-1|<2$. Правильная часть ряда $\frac{1}{2}+\frac{z-1}{2\cdot 2}+\ldots+\frac{(z-1)^n}{2^{n+1}}+\ldots$. Ряд не имеет главной части.

Задания для самостоятельной работы

1 Найти область сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-2i}{6}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3+4i)^n}{(z-2i)^n}$.

Ответ: $5<|z-i|<6$.

2 Найти область сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+i)^n}{(3-2i)^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin in}{(z+i)^n}$.

Ответ: $e<|z+i|<\sqrt{13}$.

3 Найти область сходимости ряда $\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\frac{(z+2i)^n}{n^2+1}$.

Ответ: расходится.

4 Найти область сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-2i)^n}{5^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{(z-2i)^n}$.

Ответ: $1<|z-2i|<5$.

5 Разложить функцию $f(z)=\frac{1}{4z+3}$ в ряд Тейлора по степеням $(z+1)$ и указать область сходимости полученного ряда.

6 Разложить функцию $f(z)=\frac{1}{3-2z}$ в ряд Тейлора по степеням $(z-3)$ и указать область сходимости полученного ряда.

7 Разложить функцию $f(z)=\ln(2-5z)$ в ряд Тейлора по степеням $(z+3)$ и указать область сходимости полученного ряда.

8 Разложить функции в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=0$:

а) $f(z)=\frac{\cos z}{z^3}$; б) $f(z)=z^2e^{\frac{1}{z}}$; в) $f(z)=\frac{1-\cos z}{z^3}$; г) $f(z)=\frac{\sin^2 z}{z}$.

9 Разложить функции в ряд Лорана в указанных кольцах по степеням z:

а) $f(z)=\frac{1}{z^2+z}$, $0<|z|<1$; $1<|z|<+\infty$;

б) $f(z)=\frac{1}{z^2-5z+6}$, $2<|z|<3$; $3<|z|<+\infty$;

в) $f(z)=\frac{1}{z^2+2z-8}$, $2<|z+2|<4$.

Список литературы

1 Высшая математика для экономистов: практикум для студентов вузов, обучающихся по экономическим специальностям / Под ред. Н. Ш. Кремера. – 2-е изд., перераб. и доп. – Москва: ЮНИТИ-ДАНА, 2007. – 479 с.

2 **Гурский, Е. И.** Руководство к решению задач по высшей математике: в 3 т. / Е. И. Гурский; под ред. Е. И. Гурского. – Минск: Вышэйшая школа, 1990. – Т. 3. – 350 с.

3 **Гусак, А. А.** Теория функций комплексной переменной и операционное исчисление / А. А. Гусак, Е. А. Бричикова, Г. М. Гусак. – Минск: ТетраСистемс, 2002. – 208 с.

4 **Данко, П. Е.** Высшая математика в упражнениях и задачах: в 2 ч. / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – Москва: ОНИКС 21 век, 2003. – Ч. 1. – 304 с.

5 **Пантелеев, А. В.** Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление в примерах и задачах: учебное пособие для вузов / А. В. Пантелеев, А. С. Якимова. – 2-е изд., стер. – Москва: Высшая школа, 2007. – 445 с.

6 **Письменный, Д. Т.** Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д. Т. Письменный. – Москва: Айрис-пресс, 2009. – 608 с.

7 Сборник задач по высшей математике. 2 курс / К. Н. Лунгу [и др.]; под ред. С. Н. Федина. – 6-е изд. – Москва: Айрис-пресс, 2007. – 592 с.