МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Маркетинг и менеджмент»

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Методические рекомендации к практическим занятиям для студентов специальности 1-28 01 02 «Электронный маркетинг» очной и заочной форм обучения

Могилев 2022

УДК 519.6
ББК 22.17
Д48

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Маркетинг и менеджмент» «09» декабря 2021 г., протокол № 5

Составитель канд. пед. наук, доц. Т. С. Старовойтова

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доц. И. И. Маковецкий

В методических рекомендациях представлены материалы для практических занятий по дисциплине «Дискретная математика». Основные теоретические положения проиллюстрированы примерами решения задач. Выделены задания для самостоятельной работы.

Учебно-методическое издание

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Ответственный за выпуск	А. В. Александров
Корректор	Т. А. Рыжикова
Компьютерная верстка	Н. П. Полевничая

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 56 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.

Содержание

1 Основы теории конечных множеств

Понятие множества является одним из основных в математике. Под множеством понимают любое собрание определённых и отличных друг от друга объектов, мыслимых как единое целое.

Объекты, составляющие множество, называются его элементами. Если M – множество, а a – его элемент, то пишут $a \in M$ (a принадлежит множеству M). Если M – множество, а b не является его элементом, то пишут $b \notin M$ (b не принадлежит множеству M).

Множества бывают конечными и бесконечными. Конечное множество – это множество, для которого существует натуральное число, являющееся числом его элементов. Например, множество первых пяти неотрицательных целых нечётных чисел $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ является конечным множеством. Множество, не являющееся конечным, называется бесконечным. Например, множество всех натуральных чисел является бесконечным множеством.

Существуют два основных способа задания множеств: перечисление и описание. Перечислением можно задать только конечное множество (можно сделать это и описанием). Бесконечные множества можно задать только описанием через указание характеристического свойства элементов множества.

Если $p(x)$ – некоторое высказывание, которое описывает свойства переменной x, областью значений которых является множество M, тогда через $M = \{x | p(x)\}$ обозначается множество, состоящее из всех тех, и только тех элементов, для которых высказывание $p(x)$ истинно.

Например, запись $M = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}$ означает множество корней квадратного уравнения $x^2 - 3x + 2 = 0$, т. е. множество $\{1,2\}$ (конечное множество). Запись $M = \{x \in Z | x > 7\}$ задает описанием множество всех целых чисел больше 7. Это множество является бесконечным.

Множество может быть задано также порождающей процедурой $M = \{x | x = f\}$, которая описывает способ получения элементов множества из уже полученных элементов либо других элементов. В таком случае элементами множества являются все объекты, которые могут быть построены с помощью такой процедуры.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется пустым и обозначается знаком $\varnothing$.

Пусть A – конечное множество, тогда число его элементов обозначается $|A|$ и называется мощностью множества.

Множество A включено во множество B (символическая запись $A \subseteq B$), если любой элемент множества A принадлежит множеству B. В этом случае множество А является подмножеством множества B.

Если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$ $(A \neq B)$, то пишут $A \subset B$ и говорят, что множество A

строго включено во множество B или что A есть собственное подмножество множества B. Так, если $A=\{3,6,9\}$ и $B=\{3,6,9,12,15,18,21\}$, то A – собственное подмножество B.

Два множества называются равными, если они состоят из одних и тех же элементов. Равны любые два конечных множества, отличающиеся друг от друга только лишь порядком следования их элементов, например, $\{a,b,c\}=\{c,a,b\}$. Критерий равенства множеств $A=B \Leftrightarrow A\subseteq B, B\subseteq A$.

Пустое множество есть подмножество любого множества, т. е. для любого множества A $\varnothing\subseteq A$.

Если множество содержит, по крайней мере, два элемента, то оно имеет всевозможные подмножества, среди них есть и собственные подмножества. Например, всевозможными подмножествами множества $A=\{a,b\}$ являются $\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}$, из которых $\{a\}$ и $\{b\}$ – собственные подмножества множества $A=\{a,b\}$.

Множество всех подмножеств множества A называется множеством-степенью множества A, или булеаном, и обозначается $P(A)$. Если $|A|=n$, то $P(A)=2^n$.

Объединением множеств A и B называется множество, обозначаемое $A\cup B$, состоящее из всех тех, и только тех элементов, которые принадлежат A или B, т. е. $A\cup B=\{x|(x\in A)\vee(x\in B)\}$.

Например, если $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{1,3,5\}$, $C=\{5,6\}$, то $A\cup B=\{1,2,3,4,5\}$, $A\cup C=\{1,2,3,4,5,6\}$, $B\cup C=\{1,3,5,6\}$.

Пересечением множеств A и B называется множество, обозначаемое $A\cap B$, и состоящее из всех тех, и только тех элементов, которые принадлежат каждому из множеств A и B, т. е. $A\cap B=\{x|(x\in A)\wedge(x\in B)\}$.

Например, если $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{1,3,5\}$, $C=\{5,6\}$, то $A\cap B=\{1,3\}$, $A\cap C=\varnothing$, $B\cap C=\{5\}$.

Операция пересечения считается более сильной, чем другие. Это означает, что при отсутствии скобок она выполняется первой.

Разностью множеств A и B называется множество, обозначаемое $A-B$ и состоящее из всех тех, и только тех элементов множества A, которые не являются элементами множества B, т. е. $A-B=\{x|(x\in A)\wedge(x\notin B)\}$.

Например, если $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{1,3,5\}$, $C=\{5,6\}$, то $A-B=\{2,4\}$, $A-C=A$, $B-C=\{1,3\}$, $C-B=\{6\}$, $B-A=\{5\}$.

Симметрической разностью множеств A и B называется множество $A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$.

Если множество A является подмножеством некоторого фиксированного множества U, то множество U является универсальным (для данного случая), или универсумом. $U - A = \overline{A}$ – *дополнение* множества A.

Для произвольных множеств A, B, C таких, что $A, B, C \subset U$, имеют место следующие *свойства операций*:

1) коммутативность: $A \cup B = B \cup A,\quad A \cap B = B \cap A;$.

2) ассоциативность: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C,\quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C;$

3) дистрибутивность: $\begin{array}{l} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C); \end{array}$.

4) законы идемпотентности: $A \cup A = A,\ A \cap A = A;$

5) законы поглощения: $A \cup (A \cap B) = A,\ A \cap (A \cup B) = A;$.

6) законы об универсуме и пустом множестве: $A \cap U = A,\ A \cup U = U,$ $A \cup \overline{A} = U,\ A \cup \varnothing = A,\ A \cap \overline{A} = \varnothing,\ \overline{U} = \varnothing;$.

7) законы де Моргана: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B};$

8) закон двойного отрицания: $\overline{\overline{A}} = A;$

9) определение разности через пересечение: $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

Для иллюстрации операций над множествами часто используются *диаграммы Эйлера – Венна*. Построение диаграммы заключается в изображении большого прямоугольника, представляющего универсальное множество U, а внутри его – кругов, представляющих множества (рисунок 1).

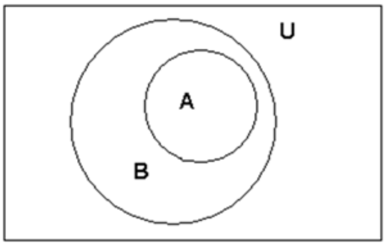
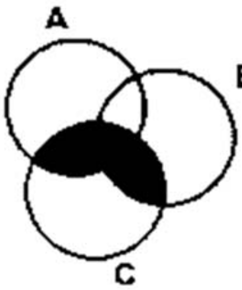


Рисунок 1 – Диаграмма Эйлера – Венна

Пример 1 **–** Доказать тождество $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$, используя диаграммы Эйлера – Венна.

Решение

Построим диаграммы Эйлера – Венна для левой и правой части проверяемого тождества (рисунок 2). На первой диаграмме черным цветом выделено множество $(A \cup B) \cap C$, на второй – множество $(A \cap C) \cup (B \cap C)$. Сравнивая эти диаграммы, видим, что полученные множества равны, значит, тождество доказано.



и

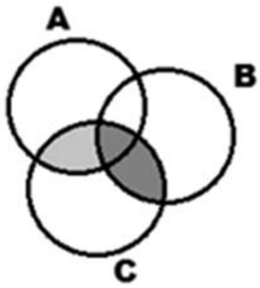


Рисунок 2 – Диаграммы Эйлера – Венна для тождества $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$

Пример 2 – Доказать, что $(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})=A$ аналитически, используя равносильности алгебры множеств.

Решение

$$(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})=\big(A\cup(A\cap\overline{B})\big)\cap\big(B\cup(A\cap\overline{B})\big)=$$

$$=A\cap\big((B\cup A)\cap(B\cap\overline{B})\big)=A\cap\big((B\cup A)\cap U\big)=A\cap(B\cup A)=A.$$

Задания для самостоятельной работы

1 Даны множества $A=\{1;3;4;5;9\}$, $B=\{2;4;5;10\}$. Найти: $A\cap B$, $A\cup B$, $A\setminus B$, $B\setminus A$.

2 Используя диаграмму Эйлера – Венна, изобразить множества:

а) $A\setminus(B\cap C)$;
б) $\left(\overline{A\cap\overline{B}}\right)\cap C$;
в) $A\setminus(B\cup C)$;
г) $(A\Delta B)\setminus C$;
д) $(\overline{A}\setminus B)\setminus C$.

3 Пусть A – множество натуральных чисел, кратных 7, B – множество натуральных чисел, кратных 3, C – множество четных натуральных чисел. Найти множества $(A\cap B)$, $(A\cap B)\setminus C$, $(A\cup B)\setminus C$ и записать их с использованием характеристического свойства.

4 Пусть множество $U=\{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$ является универсальным для данного рассмотрения, а его подмножества – $A=\{x\mid 0\le x\le 6\}$, $B=\{x\mid x-\text{четно}\}$, $C=\{x\mid x\ge 5\}$, $D=\{x\mid x-\text{кратно } 4\}$. Найти множества $A\cup B$, $B\cap C$, $C\Delta D$, $(A\setminus B)\cap(C\setminus D)$, $\overline{\overline{B}\cap\overline{D}}$.

5 Используя определения операций над множествами, доказать с помощью диаграмм Эйлера – Венна тождества:

а) $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$;

б) $A\cap\left(B\cup C\right)=\left(A\cap B\right)\cup\left(A\cap C\right)$;

в) $\left(A\cup B\right)\backslash C=\left(A\backslash C\right)\cup\left(B\backslash C\right)$;

г) $\left(A\backslash B\right)\cup\left(\overline{A}\backslash \overline{B}\right)=\left(A\cup B\right)\backslash\left(A\cap B\right)$;

д) $\left(A\backslash B\right)\backslash C=\left(A\backslash B\right)\cup\left(A\cap C\right)$.

6 Упростить теоретико-множественные выражения путем алгебраических преобразований:

а) $A\cap\left(\overline{A}\cup B\right)$; в) $\left(A\cap B\right)\cup\left(\overline{A\cup B}\right)$;

б) $\left(A\cap B\right)\cup\left(A\cap\overline{B}\right)$; г) $\left(A\Delta B\right)\cup\left(A\cap B\right)$.

2 Основы теории отношений

Пусть A и B два конечных множества. Из элементов a множества A и элементов b множества B можно образовать пару $\left(a,b\right)$, которая определяется не только элементами (компонентами) по их принадлежности к указанным множествам, но и порядком их записи. Такая пара называется *упорядоченной парой*.

Упорядоченным n-набором, или *кортежем*, на множествах $A_1,\ldots,A_n$ называют n-ку элементов $\left(a_1,\ldots,a_n\right)$, которая определяется не только элементами $a_1\in A_1,\ldots,a_n\in A_n$, но и порядком их записи. Элемент a_1 называется первым элементом набора, а элемент a_n – n-м элементом набора.

Прямым (*декартовым*) *произведением* множеств A и B называют множество $A\times B$, состоящее из всех упорядоченных пар $\left(a,b\right)$, первые компоненты которых принадлежат множеству A, а вторые – множеству B: $A\times B=\left\{\left(a,b\right):\ a\in A,\ b\in B\right\}$.

Прямым (*декартовым*) *произведением множеств* $A_1,A_2,\ldots,A_n$ называется множество, обозначаемое $A_1\times A_2\times\ldots\times A_n$ и состоящее из всех тех, и только тех наборов $\left(a_1,\ldots,a_n\right)$ длины n, i-я компонента которых принадлежит множеству $A_i\ \left(i=1,2,\ldots,n\right)$.

Таким образом, $A_1\times\ldots\times A_n=\left\{\left(a_1,\ldots,a_n\right):\ a_1\in A_1,\ldots,a_n\in A_n\right\}$.

Пример 1 – Найти декартово произведение $A_1\times A_2$, $A_2\times A_1$, $A_1\times A_2\times A_3$, если $A_1=\left\{0,1\right\}$, $A_2=\left\{1,2\right\}$, $A_3=\left\{3\right\}$.

Решение

Используя определение декартова произведения, получим

$$A_1 \times A_2 = \{\{0,1\},\{0,2\},\{1,1\},\{1,2\}\};$$

$$A_2 \times A_1 = \{\{1,0\},\{1,1\},\{2,0\},\{2,1\}\};$$

$$A_1 \times A_2 \times A_3 = \{\{0,1,3\},\{0,2,3\},\{1,1,3\},\{1,2,3\}\}.$$

На рисунке 3 точками (узлами) дерева обозначены элементы множеств $A=\{x_1,x_2\}$, $B=\{y_1,y_2\}$, $C=\{z_1,z_2\}$. Для получения каждой упорядоченной тройки (так как перемножаем три множества) нужно пройти каждый полный маршрут от корня дерева (start) к конечным точкам и записать все пройденные точки.

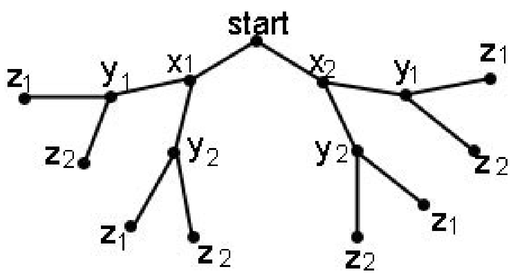


Рисунок 3 – Дерево элементов множеств

Получаем декартово произведение множеств $A \times B \times C$. Его элементы $\{x_1, y_1, z_1\}$, $\{x_1, y_1, z_2\}$, $\{x_1, y_2, z_1\}$, $\{x_1, y_2, z_2\}$, $\{x_2, y_1, z_1\}$, $\{x_2, y_1, z_2\}$, $\{x_2, y_2, z_1\}$, $\{x_2, y_2, z_2\}$.

Бинарным отношением между элементами множеств A и B называется любое подмножество R множества $A \times B$, т. е. $R \subset A \times B$. Если два элемента находятся в отношении R, то записывают $(a,b) \in R$ или aRb.

Примерами бинарных отношений на множестве целых чисел Z являются отношения «делится», «делит», «равно», «больше», «меньше», «взаимно просты».

Областью определения $D(R)$ бинарного отношения R называется множество, состоящее из всех таких элементов a, для которых $(a,b) \in R$, т. е. $D(R) = \{a : (a,b) \in R\}$.

Областью значений $E(R)$ бинарного отношения R называется множество, состоящее из всех таких элементов b, для которых $(a,b) \in R$, т. е. $E(R) = \{b : (a,b) \in R\}$.

Если $R \in A \times A, (a,b) \in R$, то множество $R^{-1} = \{(a,b) : (b,a) \in R\}$ называется *обратным отношением* (инверсией).

Композицией (суперпозицией) бинарных отношений R и S называется множество $\{(a,b) : \exists c\,(aSc) \wedge (cRb)\}$ и обозначается $R \circ S$.

Отношение можно задать перечислением всех элементов, т. е. формированием списков, формулой, графически, матрицей. При матричном описании бинарного отношения $R \subset A \times B$ $\left(A = \{a_1, \ldots, a_n\}, B = \{b_1, \ldots, b_m\}\right)$ удобно воспользоваться квадратной матрицей $\|R\| = r_{ij}$, элементы которой определяются следующим образом: на пересечении i-й строки и j-го столбца ставят знак «1», если $\left(a_i, b_i\right) \in R$, и знак «0», если $\left(a_i, b_i\right) \notin R$.

Пример 2 – Задать перечислением (списком) и матрицей отношение $R \in A \times A$ на множестве $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, если R означает «удвоенное значение первого элемента не меньше утроенного значения второго элемента».

Решение

Запишем все пары элементов $a, b \in A$ таких, что $2a \geq 3b$ для заданного отношения R: $R = \{(a, b) : a, b \in A,\ 2a \geq 3b\}$. Получим задание отношения R в виде списка $R = \{(2,1),(3,1),(4,1),(5,1),(3,2),(4,2),(5,2),(5,3)\}$.

Матрица отношения имеет вид:

$$\|R\| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Определим свойства бинарных отношений.

Бинарное отношение R называется *рефлексивным*, если для любого элемента $a \in D(R)$ имеет место aRa. При этом главная диагональ матрицы отношения r_{ij} содержит только единицы.

Бинарное отношение R называется *антирефлексивным*, если для любого элемента $a \in D(R)$ имеет место $a\overline{R}a$. При этом главная диагональ матрицы отношения r_{ij} содержит только нули.

Бинарное отношение R называется *симметричным*, если из aRb следует bRa. При этом для матриц $\|R\|$ и транспонированной $\|R\|^T$ имеет место равенство $\|R\|^T = \|R\|$. При этом матрица симметрична относительно главной диагонали.

Бинарное отношение R называется *антисимметричным*, если из aRb и bRa следует, что $a = b$. При этом для матриц справедливо равенство $\|R \cap R^{-1}\| = \|R\| * \|R\|^T$, где $\|R \cap R^{-1}\|$ – матрица, у которой все элементы, стоящие вне главной диагонали, равны нулю. Знак $*$ означает перемножение элементов одной матрицы на соответствующие элементы второй матрицы.

Бинарное отношение R называется *транзитивным*, если из aRb и bRc следует aRc. При этом $R \circ R \subset R$.

Пример 3 – Какими свойствами обладает отношение, заданное на множестве натуральных чисел N, если $R-$ «быть строго больше», т. е. $R = \{(a,b) : a > b\}$?

Решение

1 Заданное отношение нерефлексивно, антирефлексивно, т. к. ни для какого $a \in N$ не выполняется условие $a > a$, например, не выполняется $2 > 2$.

2 Данное отношение несимметрично, т. к. $a > b$ не влечет за собой $b > a$, например, $3 > 2$, но не выполняется $2 > 3$.

3 Это отношение не антисимметрично, т. к. не выполняется aRb и bRa, если $a = b$, например, не выполняется $2 > 2$, но $2 = 2$.

4 Отношение R транзитивно, так как если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$, например, если $5 > 3$ и $3 > 2$, то $5 > 2$.

Пример 4 – Исследовать, какими свойствами обладает отношение $R \subseteq A \times A$, заданное матрицей $\|R\| = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, если $A = \{1;\, 2;\, 3\}$.

Решение

Так как в матрице данного отношения на главной диагонали имеются нулевые элементы, то отношение R нерефлексивно.

Несимметричность матрицы отношения означает, что отношение несимметрично.

Для проверки антисимметричности вычислим матрицу

$$\|R \cap R^{-1}\| = \|R\| \cdot \|R\|^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как в полученной матрице все элементы, стоящие на главной диагонали, нулевые, то отношение R антисимметрично.

Данное отношение является транзитивным отношением, т. к.

$$\left\| R\circ R \right\| = \left\| R \right\| \cdot \left\| R \right\| = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\| R \right\|.$$

Виды отношений на множестве

Отношение R на A называется *отношением эквивалентности*, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно. Например, отношения «равенство», «параллельность прямых», «подобие фигур». Отношение эквивалентности допускает разбиение множества A на непересекающиеся подмножества, называемые классами эквивалентности.

Разбиение множества – это представление его в виде объединения произвольного количества попарно непересекающихся непустых подмножеств.

Отношение R на A называется *отношением порядка*, если оно антисимметрично и транзитивно. Если при этом отношение антирефлексивно, то оно называется *отношением строгого порядка.* В противном случае отношение является *отношением нестрогого порядка*. Для отношения порядка используется обозначение $\le$. Элементы a и b множества A, такие, что $a \le b$, называются сравнимыми (по отношению $\le$).

Множество, которое обладает отношением порядка, называется упорядоченным.

Отношение порядка $\le$ на множестве A называется *отношением линейного порядка*, если для любых элементов a и b множества A выполняется условие $a \le b$ или $b \le a$.

Отношение на множестве A называется *отношением частичного порядка*, если оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно.

Пример 5 – Из 50 студентов курса 42 изучают английский, 31 – немецкий язык, а 25 – английский и немецкий языки. Сколько студентов курса не изучает ни английский, ни немецкий языки?

Решение

Пусть A – множество студентов курса, изучающих английский язык, B – множество студентов курса, изучающих немецкий язык, C – множество всех студентов курса. По условию задачи $m(A)=42$, $m(H)=31$, $m(A\cap H)=25$, $m(C)=50$. Требуется найти число студентов курса, не изучающих ни английского, ни немецкого языка.

1 способ. Найдем число элементов в объединении данных множеств. Для этого воспользуемся *формулой включений и исключений*:

$$m(A\cup H)=m(A)+m(H)-m(A\cap H),$$

где $m(A), m(H), m(A \cup H), m(A \cap H)$ – мощность (количество элементов) указанных множеств. Получим $m(A \cup H) = 42 + 31 - 25 = 48.$

Найдем число студентов курса, которые не изучают ни английский, ни немецкий языки: $50 - 48 = 2.$

2 способ. Изобразим данные множества кругами Эйлера (рисунок 4)

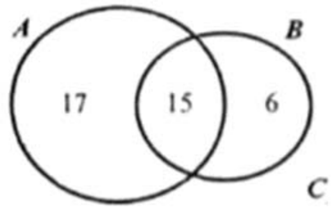


Рисунок 4 – Изображение множеств

Определим число элементов в каждом из непересекающихся подмножеств. Так как $m(A \cap H) = 25$, то количество студентов, изучающих только английский язык, равно $42 - 25 = 17$. Соответственно, число студентов, изучающих только немецкий, равно $31 - 25 = 6,$ тогда $m(A \cup H) = 17 + 25 + 6 = 48.$ Значит, число студентов курса, которые не изучают ни английский, ни немецкий языки, будет равно $50 - 48 = 2.$

Задания для самостоятельной работы

1 Найти декартово произведение $A_1 \times A_2$, $A_2 \times A_1$, $A_1 \times A_2 \times A_3$, если $A_1 = \{1, 2,3\}$, $A_2 = \{6, 7\}$, $A_3 = \{-3\}$.

2 Изобразить на декартовой плоскости множества $X \times Y$ и $Y \times X$, если:

а) $X = [1;4], Y = [2;5]$;
б) $X = [0;1], Y = [-\infty;5]$;
в) $X = [0;+\infty], Y = [2;5]$;
г) $X = (0;1] \cup \{3\}, Y = [-1;2) \cup \{4\}$;
д) $X = [1;4) \cup (5;8], Y = [3;6] \cup \{2;5\}$.

3 Проверить справедливость равенства $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$ для множеств $A = \{3;\ 5;\ 7\}, B = \{6;\ 8;\ 9\}, C = \{0;\ 1\}$.

4 Доказать равенство $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$.

5 Доказать, что если $X \subset Y$, то $X \times Z \subset Y \times Z$.

6 Задать перечислением (списком) и матрицей отношение $R \in A \times A$ на множестве $A = \{1, 2,3, 4, 5,6,7\}$, если R означает «сумма a и b равна 9».

7 Определить, какими свойствами обладают отношения, заданные на множестве натуральных чисел: R_1 – «быть строго меньше»; R_2 – «иметь общий делитель»; R_3 – «быть не меньше».

8 Исследовать свойства отношений, заданных матрицей:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3 Комбинаторика

Многие классические задачи теории вероятностей решаются с использованием комбинаторики. Это раздел математики, в котором изучаются различные соединения (комбинации) элементов конечных множеств. Они составляются из некоторого числа *различных* элементов, принадлежащих одному и тому же множеству. Результат выбора k элементов из множества, содержащего n элементов, называется *выборкой* k элементов из n .

Правило суммы. Если элемент A можно выбрать m способами, а элемент B можно выбрать n способами, то выбор элемента A или B можно осуществить $m+n$ способами.

Правило произведения. Если элемент A можно выбрать m способами, а элемент B можно выбрать n способами, то выбор пары элементов A и B можно осуществить $m \cdot n$ способами.

Перестановками называются комбинации, состоящие из одних и тех же n различных элементов и отличающиеся только порядком их следования. Число всех возможных перестановок из n элементов вычисляется по формуле $P_n = n!$

Размещениями называются комбинации, составленные из n различных элементов по k элементов, отличающиеся либо порядком следования элементов, либо их составом.

Число всех возможных размещений из n элементов по k вычисляется по формуле

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-(k-1)).$$

Символ $n!$ читается «эн факториал», при этом полагается, что $0!=1$ и $1!=1$.

Сочетаниями называются комбинации, составленные из n различных элементов по k элементов, отличающиеся хотя бы одним элементом.

Число всех возможных сочетаний из n элементов по k вычисляется по формуле $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$. Используют также формулу $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Если при выборе k элементов из n элементов некоторые элементы возвращаются обратно (повторяются) и упорядочиваются, то такие соединения называются *размещениями с повторениями*: $\overline{A}_n^k = n^k$.

Если при выборе k элементов из n элементов некоторые элементы повторяются без последующего упорядочивания, то такие соединения называются *сочетаниями с повторениями*: $\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \dfrac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$.

Если множество из n элементов содержит k различных элементов, при этом первый элемент повторяется n_1 раз, второй – n_2 раз, ..., k-й – n_k раз, причем $n_1+n_2+\ldots+n_k=n$, то перестановки элементов этого множества называются *перестановками с повторениями.* Их подсчет проводится по формуле $P_n(n_1,n_2,\ldots,n_k) = \dfrac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_k!}$.

Пример 1 – Сколькими способами можно выбрать старосту и его заместителя в группе из 26 человек?

Решение

Так как выбор старосты и его заместителя проводится по определенным критериям, то в этой комбинации важен состав (порядок). Найдем число размещений из 26 элементов по 2: $A_{26}^2 = \dfrac{26!}{(26-2)!} = \dfrac{26!}{24!} = 25\cdot 26 = 650$.

Пример 2 – Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр 1, 3, 5, 8, если цифры в числе не повторяются?

Решение

Так как при записи числа будут использоваться все цифры, найдем число перестановок из четырех элементов: $P_4 = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 4! = 24$.

Пример 3 – Сколькими способами можно взять 7 книг из 12 находящихся на полке?

Решение

Так как порядок выбора книг не важен, то число сочетаний из 12 по 7 равно $C_{12}^{7}=\dfrac{12!}{7!(12-7)!}=\dfrac{12!}{7!\cdot 5!}=\dfrac{8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}=792.$

Пример 4 – Из 100 студентов английский язык знают 28 человек, 30 – немецкий, французский – 42, английский и немецкий – 8, английский и французский – 10, немецкий и французский – 5, все три языка знают три человека. Сколько студентов не знают ни одного иностранного языка?

Решение

Обозначим через m_A число студентов, знающих английский язык, через m_N – число студентов, знающих немецкий язык, через m_F – число студентов, знающих французский язык. Тогда $m_A=28,\ m_N=30,\ m_F=42.$

Согласно условию задачи, число студентов, знающих два языка – английский и немецкий, равно $m_{A\cap N}=8;$ число студентов, знающих два языка – английский и французский, равно $m_{A\cap F}=10;$ число студентов, знающих два языка – немецкий и французский, равно $m_{N\cap F}=5;$ число студентов, знающих все три языка, равно $m_{A\cap N\cap F}=3.$

По правилу суммы получим, что число студентов, знающих хотя бы один иностранный язык, равно $m_{A\cup N\cup F}=28+30+42-8-10-5+3=80.$ Тогда ни одного иностранного языка не знают 20 студентов.

Пример 5 – Сколькими способами можно рассадить за столом пять гостей, если стол накрыт на семь персон?

Решение

Пять гостей из семи можно выбрать C_7^5 способами. Однако при рассаживании гостей за столом необходимо принимать во внимание также число перестановок пяти гостей, которое равно P_5, т. к. занявших те или иные пять стульев можно поменять местами.

Таким образом, пять гостей можно рассадить за столом, накрытым на семь персон, числом способов, равным $C_7^5\cdot P_5=\dfrac{7!}{5!(7-5)!}\cdot 5!=\dfrac{7!}{2!}=3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7=2520.$

Пример 6 – На конкурс представлено 10 студенческих работ. Денежные премии будут присуждаться по следующим номинациям: оригинальная научная идея; использование современного экономико-математического аппарата; применение компьютерного обеспечения; презентация результатов на научной конференции. Сколько существует вариантов распределения премий, если по каждой комбинации установлены: а) различные денежные премии; б) одинаковые премии.

Решение

Каждый из вариантов распределения премий представляет собой комбинацию четырех работ из 10, отличающуюся от других комбинаций как самими работами, так и их порядком расположения по номинациям; причем одни и те же работы могут повторяться несколько раз, т. к. любая научная работа может получить премии как по одной, так и по нескольким (даже всем четырем) номинациям.

Число возможных вариантов распределения денежных премий представляет собой число размещений с повторениями из 10 элементов по четыре и определяется по формуле $\overline{A}_{10}^4 = 10^4 = 10000$.

Если по каждой номинации установлены одинаковые премии, то порядок следования работ в комбинации четырех премиальных работ значения не имеет. Тогда число вариантов распределения премий представляет собой число сочетаний с повторениями из 10 элементов по четыре, определяемое по формуле $\overline{C}_{10}^4 = C_{10+4-1}^4 = C_{13}^4 = \dfrac{13\cdot12\cdot11\cdot10}{1\cdot2\cdot3\cdot4} = 715.$

***Пример** 7* – Сколько четырехзначных чисел можно получить, используя только цифры $3, 7, 8, 9$, если повторения возможны?

Решение

По правилу произведения на первом месте может находиться любая из четырех цифр, следовательно, имеем четыре случая. Так как повторы разрешены, то на втором месте может находиться любая из четырех заданных цифр, т. е. снова имеем четыре случая. Для всех остальных разрядов также получаем по четыре случая. Таким образом, количество четырехзначных чисел при указанных в задаче условиях определяется как $\overline{A}_4^4 = 4^4 = 256$.

Пример 8 – Вычислить $\dfrac{A_{20}^6 + A_{20}^5}{A_{20}^1}$.

Решение

$$A_{20}^6 = \frac{20!}{(20-6)!} = \frac{20!}{14!} = 15\cdot16\cdot17\cdot18\cdot19\cdot20;$$

$$A_{20}^5 = \frac{20!}{(20-5)!} = \frac{20!}{15!} = 16\cdot17\cdot18\cdot19\cdot20;$$

$$A_{20}^{4} = \frac{20!}{(20-4)!} = \frac{20!}{16!} = 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20;$$

$$\frac{A_{20}^{6} + A_{20}^{5}}{A_{20}^{4}} = \frac{16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20 \cdot (15+1)}{17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20} = 16 \cdot 16 = 256.$$

Числа C_n^r представляют собой коэффициенты многочлена, получающегося при раскрытии скобок в биноме Ньютона $(a+b)^n$.

Бином Ньютона – формула для разложения на отдельные слагаемые целой неотрицательной степени суммы двух переменных:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^n b^n,$$

где $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ – биномиальные коэффициенты, $n \in Z$ и $n > 0$.

Сумма показателей степеней для a и b в каждом члене разложения постоянна и равна n.

Число членов, содержащих k множителей b и $(n-k)$ множителей a, равно числу способов выбора k элементов из n возможных C_n^k.

Если $a = b = 1$, то получается, что $2^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n$.

Некоторые свойства бинома Ньютона:

$$C_n^m = C_n^{n-m};$$
$$C_n^n = C_n^0 = 1;$$
$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n;$$
$$C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m.$$

Значения C_n^m могут быть найдены с помощью треугольника Паскаля, представляющего собой бесконечную таблицу биномиальных коэффициентов (первая строка содержит число сочетаний из $n=1$ ($C_1^0 = C_1^1 = 1$) элементов, вторая – числа сочетаний из $n=2$ (C_2^0, C_2^1, C_2^2) элементов и т. д.), имеющую треугольную форму (рисунок 5).

Числа в треугольнике Паскаля располагаются по правилу: сумма двух рядом стоящих чисел дает число, стоящее между ними на строку ниже.

Назван в честь Блеза Паскаля (французский математик, 1623–1662).

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots \end{array}$$

Рисунок 5 – Треугольник Паскаля

Пример 9 – Найти коэффициент бинома Ньютона для шестого члена разложения выражения $(a+b)^{10}$.

Решение

Для указанного разложения $n=10,\ k=6-1=5$. Искомый биномиальный коэффициент $C_n^k = C_{10}^5 = \dfrac{10!}{5!(10-5)!} = \dfrac{10!}{5!\cdot 5!} = \dfrac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 252.$

Задания для самостоятельной работы

1 Сколькими способами можно рассадить пять человек за столом?

2 Сколько различных буквосочетаний можно получить перестановкой карточек с буквами М, И, С, С, И, С, И, П, И?

3 Сколькими способами можно расставить 15 томов на книжной полке, если выбирать их из 30, имеющихся в наличии?

4 Имеется по одному билету в театр, в цирк и на концерт. Сколькими способами их можно распределить между четырьмя студентами (если каждый студент может получить сколько угодно билетов)?

5 В олимпиаде по программированию может участвовать команда из трех студентов группы. Сколько возможностей составить команду, если в группе двадцать студентов?

6 Имеется пять видов календарей с цветами. Сколькими способами из них можно выбрать семь календарей?

7 Сколькими способами можно составить трехцветный флаг из полос разной ширины, если имеются материи из восьми тканей?

8 В кондитерской имеются пирожные трех видов. Сколькими способами можно заказать набор, состоящий из пяти пирожных?

9 На световом табло в один ряд располагаются шесть лампочек. Сколько различных сигналов можно получить, имея две зеленые и четыре красные лампочки? Все лампочки должны гореть.

10 В лифт восьмиэтажного дома вошли пять пассажиров. Сколькими способами могут выйти пассажиры на каждом этаже, начиная со второго?

11 Вычислить: а) $\dfrac{P_6\left(C_7^5+C_7^4\right)}{A_{10}^7}$; б) $\dfrac{A_n^k\left(n-k\right)!}{\left(n-1\right)!}$ $\left(k\le n\right)$.

12 Найти n, если:

а) $12\cdot C_{n+3}^{n-1}=55\cdot A_{n+1}^2$; б) $C_{n+4}^{n+1}-C_{n+3}^{n}=15\cdot\left(n+2\right)$.

13 Найти область определения функции и множество ее значений:

а) $f\left(x\right)=A_{7-x}^{x-3}$; б) $f\left(x\right)=A_{7-x}^{x-3}$.

14 Построить треугольник Паскаля для нахождения коэффициентов разложения бинома Ньютона $\left(a+b\right)^9$.

15 Найти тринадцатый член разложения бинома $\left(\sqrt[3]{3}+\sqrt{2}\right)^{15}$.

16 Найти номер члена разложения бинома $\left(\sqrt[3]{x}+\dfrac{1}{x}\right)^{16}$, не содержащего x.

17 Найти два средних члена разложения $\left(a^3-ab\right)^{23}$.

4 Математическая логика: логические операции, формулы, функции

Алгебра логики (булева алгебра) – это раздел математики, изучающий высказывания, рассматриваемые со стороны их логических значений (истинности или ложности) и логических операций над ними. Алгебра логики позволяет закодировать любые утверждения, истинность или ложность которых нужно доказать, а затем манипулировать ими подобно обычным числам в математике.

Элементами алгебры логики являются:

– логические (булевы) константы, обозначаемые 0 и 1;

– логические переменные, принимающие значения из множества $\{0;1\}$;

– логические операции над логическими константами и переменными: отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, дизъюнкция с исключением, эквиваленция и импликация.

Отрицание (*инверсия*) переменной a обозначается как $\neg a$ (или $\overline{a}$) и равна 1 тогда, и только тогда, когда переменная a имеет значение 0. Отрицание является одноместной операцией.

Конъюнкция переменных a и b обозначается $a\wedge b$ (или $a\&b$, или ab) и равна 1 тогда, и только тогда, когда обе переменные имеют значение 1.

Дизъюнкция переменных a и b обозначается $a\vee b$ (иногда $a+b$) и равна 1, когда хотя бы одна из переменных имеет значение 1.

Дизъюнкция с исключением переменных a и b обозначается $a\oplus b$ и равна 1, если только одна из переменные имеет значение 1, и равна 0, если обе переменные имеют одно и то же значение.

Эквиваленция переменных a и b обозначается $a\sim b$ и равна 1 тогда, и только тогда, когда обе переменные имеют одно и то же значение.

Импликация переменных a и b обозначается $a \to b$ и равна 0 только в том случае, когда переменная a имеет значение 1, а b значение 0, во всех остальных случаях она равна 1.

Отрицание является одноместной операцией, остальные – двухместными.

Операции $\neg, \wedge, \vee, \oplus, \sim$ и $\to$, определенные над булевыми константами и переменными, составляют *алгебру логики*.

Результаты действия этих операций как функции логических переменных a и b представлены в таблице 1.

Таблица 1 – Результаты выполнения логических операций

$a\ b$	$\neg\ a$	$a \wedge b$	$a \vee b$	$a \oplus b$	$a \sim b$	$a \to b$
0 0	1	0	0	0	1	1
0 1	1	0	1	1	0	1
1 0	0	0	1	1	0	0
1 1	0	1	1	0	1	1

Любая часть таблицы 1, которая задает отдельную логическую операцию, называется *таблицей истинности*.

В левой части таблицы истинности перечислены всевозможные комбинации значений логических переменных a и b – *наборы значений* этих переменных. В правой части таблицы истинности приведены результаты выполнения соответствующих логических операций.

Если $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – некоторые булевы переменные, т. е. переменные, принимающие значение из двухэлементного множества $E = \{0, 1\}$, тогда упорядоченную совокупность таких переменных $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ можно рассматривать как n-компонентный *булев вектор* $\vec{x}$. Число компонент такого вектора определяет его *длину*, или *размерность*.

Совокупность различных n-компонентных булевых векторов $\vec{x}$ образует множество E^n (n-ю степень множества E), которое называется *булевым пространством* размерности n, и его мощность $\left|E^n\right|$ равна 2^n.

Функция n аргументов называется *булевой функцией*, обозначаемой $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, если ее аргументы и сама функция являются булевыми переменными.

Областью определения булевой функции $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ является булево пространство E^n, а *областью значений* – E.

Таблица истинности (см. таблицу 1) является простейшим способом задания булевой функции. Наборы, на которых значение функции f равно 1, называются *единичными* наборами функции, а наборы, на которых значение функции f равно 0, называются *нулевыми*.

Композиции логических операций и булевых переменных, создаваемые при использовании операций алгебры логики, называются *формулами.*

Индуктивное определение формулы:

1) символы $a, b, c, \ldots$ булевых переменных или констант являются формулами;

2) если A и B – формулы, то формулами являются $\overline{A}$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \oplus B$, $A \sim B$, $A \to B$;

3) других формул нет.

Формулы, состоящие из единственной переменной или константы, называются *простыми*. Формулы, которые образуются путем связывания простых формул разными операциями, называются *составными* или сложными.

В алгебре логики действуют *правила приоритета операций*, позволяющие опускать некоторые скобки, сохраняя при этом порядок выполнения операций: первой выполняется операция «$\neg$», обладающая первым приоритетом, затем – «$\wedge$», обладающая вторым приоритетом, далее – операции «$\vee$» и «$\oplus$», имеющие третий приоритет и, наконец, операции «$\sim$» и «$\to$», имеющие четвертый (последний) приоритет.

Пользуясь этими правилами, можно оставлять скобки только там, где это может изменить установленный порядок выполнения операций, имеющий существенное значение при вычислении значений формулы.

Составную формулу можно рассматривать как суперпозицию элементарных функций, соответствующих операциям, входящим в формулу. Под суперпозицией функций понимается использование символов одних функций в качестве аргументов некоторых других функций.

Таким образом, функция $f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ называется *суперпозицией функций* $f_0\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$, $f_1\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$, $f_2\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$, … , $f_m\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$, если $f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = f_0\left(f_1\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right), f_2\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right), \ldots, f_m\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)\right)$.

Пример 1 – Составить таблицы истинности для формул:

1) $\left(x \wedge y\right) \vee x$;

2) $\left(x \to \overline{y}\right) \to \left(\overline{x \vee y} \wedge z\right)$.

Решение

1 Таблица истинности для данной формулы представлена в таблице 2.

2 Таблица истинности для формулы $\left(x \to \overline{y}\right) \to \left(\overline{x \vee y} \wedge z\right)$ имеет следующий вид (таблица 3).

Важнейшими отношениями между формулами являются отношения равносильности и формальной импликации.

Формулы A и B *равносильны* или логически эквивалентны, если они представляют одну и ту же функцию, иначе, принимают одинаковые значения при любых значениях входящих в них переменных. Равносильность формул A и B обозначается как $A \equiv B$ или $A \Leftrightarrow B$.

Таблица 2 – Таблица истинности для формулы $(x \wedge y) \vee x$

x	y	$x \wedge y$	$(x \wedge y) \vee x$
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	1
1	1	1	1

Таблица 3 – Таблица истинности для формулы $(x \to \overline{y}) \to \left(\overline{x \vee y} \wedge z\right)$

x	x	z	$\overline{y}$	$x \to \overline{y}$	$x \vee y$	$\overline{x \vee y}$	$\overline{x \vee y} \wedge z$	$(x \to \overline{y}) \to \left(\overline{x \vee y} \wedge z\right)$
0	0	0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	0	1	1	1
0	1	0	0	1	1	0	0	0
0	1	1	0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	1	1	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0	0	0
1	1	0	0	0	1	0	0	1
1	1	1	0	0	1	0	0	1

Доказать равносильность формул можно путем вычисления значений каждой из них по их табличным представлениям и сравнения результатов.

Пример 2 – Доказать равносильность формул $F_1 = \left(a \wedge \overline{b} \vee c\right) \wedge b$ и $F_2 = b \wedge c$.

Решение

Решение задачи представлено в таблице 4.

Так как в двух последних столбцах таблицы значения для F_1 и F_2 одинаковы, то $F_1 \equiv F_2$.

Формулы A и B находятся в отношении формальной импликации, если формула B принимает значение 1 на всех наборах значений переменных, на которых значение 1 принимает формула A. В таких случаях говорят еще, что формула B *логически следует* из формулы A и обозначается как $A \Rightarrow B$.

Доказать, что $A \Rightarrow B$ можно путем вычисления значений каждой из формул по их табличным представлениям и сравнения результатов в таблице истинности.

Таблица 4 – Доказательство равносильности формул F_1 и F_2

a	b	c	$\overline{b}$	$a \wedge \overline{b}$	$a \wedge \overline{b} \vee c$	$F_1 = \left(a \wedge \overline{b} \vee c\right) \wedge b$	$F_2 = b \wedge c$
0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	1	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1	0	0
1	0	1	1	1	1	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	1	1	1

Например, с помощью таблицы истинности можно доказать, что из формулы $a \sim b \Rightarrow a \to b$ (таблица 5).

Таблица 5 – Таблица истинности для доказательства $a \sim b \Rightarrow a \to b$

a	b	$a \sim b$	$a \to b$
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	0	0
1	1	1	1

Если формулы A и B следуют друг из друга, т. е. $A \Rightarrow B$ и $B \Rightarrow A$, то они *равносильны*: $A \Leftrightarrow B$.

Формула, принимающая значение 1 хотя бы на одном наборе значений ее переменных, называется *выполнимой*.

Выполнимая формула, которая не принимает значение 0 ни при каких значениях переменных, называется *тавтологией*.

Формула, принимающая значение 0 на всех наборах значений ее переменных, называется *невыполнимой или противоречием*.

Пример 3 – Определить, является ли формула $a \wedge b \to a \vee b$ тавтологией.

Решение

Вычислим значения формулы по табличному представлению (таблица 6).
Формула $a \wedge b \to a \vee b$ является тавтологией (по определению тавтологии).

Таблица 6 – Значения формул

a	b	$a \wedge b$	$a \vee b$	$a \wedge b \to a \vee b$
0	0	0	0	1
0	1	0	1	1
1	0	0	1	1
1	1	1	1	1

Алгебра логики с операциями отрицания, конъюнкции и дизъюнкции называется *булевой* алгеброй, если для нее выполняются следующие **законы**.

1 *Идемпотентность*: $x \vee x = x$; $x \wedge x = x$.

2 *Коммутативность*: $x \vee y = y \vee x$; $x \wedge y = y \wedge x$.

3 *Ассоциативность*: $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$; $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$.

4 *Дистрибутивность*: $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) z$; $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) z$.

5 *Законы де Моргана*: $\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y}$; $\overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}$.

6 *Двойное отрицание* (инволюция): $\overline{\overline{x}} = x$.

7 *Законы операций с константами*:

$$x \wedge 1 = x;\ x \vee 1 = 1;$$
$$x \wedge 0 = 0;\ x \vee 0 = x;$$
$$x \wedge \overline{x} = 0;\ x \vee \overline{x} = 1.$$

Формулы, включающие только указанные операции, называются булевыми формулами.

Для булевой алгебры выполняется *принцип двойственности*: любая формула из пары равносильных формул (в том числе и представляющих некоторый закон этой алгебры) получается из другой путем следующих замен:

– символ конъюнкции на символ дизъюнкции и наоборот;

– константу 1 на константу 0 и наоборот.

В булевой алгебре выделяются следующие *равносильные формулы* (законы).

1 *Закон поглощения*: $x \vee x \wedge y = x$; $x \wedge (x \vee y) x \vee y = x$.

2 *Закон простого склеивания*: $x \wedge y \vee x \wedge \overline{y} = x$; $(x \vee y) \wedge (x \vee \overline{y}) = x$.

3 *Закон обобщенного склеивания*: $x \wedge y \vee (\overline{x} \wedge z) = x \wedge y \vee \overline{x} \wedge z \vee y \wedge z$; $(x \vee y) \wedge (\overline{x} \vee z) = (x \vee y) \wedge (\overline{x} \vee z) \wedge (y \vee z)$.

4 *Закон упрощения*: $x \vee \overline{x} \wedge y = x \vee y$; $x \wedge (\overline{x} \vee y) = x \wedge y$.

5 *Контрапозиция*: $x \to y = \overline{y} \to \overline{x}$.

6 *Экспортация*: $x \wedge y \to z = x \to (y \to z)$.

Приведенные равносильности доказываются через построение и сравнение таблиц истинности.

В булевой алгебре рассматриваются специальные виды формул, которые называются *нормальными формами*.

Дизъюнктивной нормальной формой (*ДНФ*) называется формула, представляющая дизъюнкцию элементарных конъюнкций.

Конъюнктивной нормальной формой (*КНФ*) называется формула, представляющая конъюнкцию элементарных дизъюнкций.

Для преобразования булевой формулы к виду ДНФ выполняются следующие действия:

1) с помощью правил двойного отрицания и законов де Моргана все отрицания «спускаются» до переменных;

2) скобки раскрываются по закону дистрибутивности конъюнкции относительно дизъюнкции.

Пример 4 – Упростить следующую булеву формулу: $\overline{x} \vee \overline{x \wedge y} \wedge \overline{x \vee y} \vee x \wedge y \wedge (x \vee y) \vee \overline{z}$.

Решение

$$\overline{x} \vee \overline{x \wedge y} \wedge \overline{x \vee y} \vee x \wedge y \wedge (x \vee y) \vee \overline{z} =$$

$$= \overline{x} \vee (\overline{x} \vee \overline{y}) \wedge (\overline{x} \wedge \overline{y}) \vee x \wedge y \wedge x \vee x \wedge y \wedge y \vee \overline{z} =$$

$$= \overline{x} \vee \overline{x} \wedge \overline{y} \vee x \wedge y \vee \overline{z} = \overline{x}\,(1 \wedge \overline{y}) \vee x \wedge y \vee \overline{z} = \overline{x} \vee x \wedge y \vee \overline{z} = x \vee y \vee \overline{z}.$$

Пример 5 – Преобразовать формулу $\overline{x \wedge y} \wedge \overline{\overline{x} \vee z} \vee x \wedge y \wedge (x \vee \overline{y}) \vee \overline{z}$ к конъюнктивной нормальной форме.

Решение

$$\overline{x \wedge y} \wedge \overline{\overline{x} \vee z} \vee x \wedge y \wedge (x \vee \overline{y}) \vee \overline{z} = (\overline{x} \vee \overline{y}) \wedge x \vee \overline{z} \vee x \wedge y \vee \overline{z} =$$

$$= x \wedge \overline{y} \wedge \overline{z} \vee x \wedge y \vee \overline{z} = x \wedge y \vee \overline{z} = (x \vee \overline{z}) \wedge (y \vee \overline{z}).$$

Задания для самостоятельной работы

1 Определить, является ли указанная последовательность формулой:

а) $(A_0 \wedge A_1)A_2\overline{A}_3$; б) $((A_3 \rightarrow A_0) \wedge \overline{A}_0)$; в) $(\overline{A}_0 \rightarrow A_1) \rightarrow \overline{A_1 \vee A_3}$.

2 Переписать формулы, удалив лишние скобки:

а) $(((A \rightarrow B) \vee C) \wedge (A \rightarrow (B \vee C)))$;

б) $((A \wedge B) \rightarrow ((C \vee D) \rightarrow (B \wedge C)))$;

в) $((\neg A) \rightarrow (((B \wedge C) \wedge (\neg A)) \vee (B \vee C)))$;

г) $\left(\left(\neg(\neg A)\right)\wedge\left((B\to C)\sim\left(B\to\left(A\vee(\neg C)\right)\right)\right)\right)$.

3 Построить таблицы истинности для формул:

а) $(A\to B)\wedge(\neg A)\to\neg B$; в) $(A\wedge B)\wedge\left((A\to B)\to C\right)$;

б) $(A\vee B)\to(A\to B\wedge C)$; г) $(\neg A\vee C)\wedge\left(B\to(D\to A)\right)$.

4 Доказать равносильности формул F_1 и F_2:

а) $\overline{A\to B}\equiv A\wedge\bar{B}$; в) $A\wedge(A\vee C)\wedge(B\vee C)\equiv(A\wedge B)\vee(A\vee C)$;

б) $A\vee(B\wedge A)\equiv A$; г) $(A\wedge B)\vee\left((A\vee B)\wedge(\bar{A}\vee\bar{B})\right)\equiv(A\vee B)$.

5 Определить, является ли формула тавтологией, противоречием или ни тем, ни другим:

а) $a\wedge\left(\overline{a\vee b}\right)$; г) $(a\to b)\to a$;

б) $a\to(a\wedge b)$; д) $a\to(a\to b)$.

в) $\left((a\to b)\wedge b\right)\to a$;

5 Основные понятия теории графов

Отобразить отношения на множествах можно с помощью графов. Совокупность объектов произвольной природы и отношений между каждой парой этих объектов может быть изображена на плоскости в виде множества точек, являющихся образом множества объектов, и множества отрезков линий, соединяющих пары точек, что является образом множества отношений. Такой образ объектов и отношений принято называть *графом*. Множество точек, которые являются образом множества объектов, называют *вершинами* графа. Множество отрезков линий, являющихся образом множества отношений, называют *ребрами* или *дугами* графа.

Пусть $A=\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ – множество людей, на котором задано отношение «быть знакомыми». Каждый элемент множества A может быть изображен точкой. Множество связок (прямых, дуг, отрезков), соединяющих эти точки при заданном отношении, являются элементами множества $B=\{b_1, b_2, \dots, b_m\}$. Граф из точек и связок в этом случае может быть представлен рисунком 6.

Для определения отношения принадлежности вершин графа ребру или дуге и, наоборот, ребер или дуг вершине, вводится понятие *инциденция*.

Вершина x_i инцидентна ребру (дуге) (x_i, x_j), если она является концевой вершиной данного отрезка линии, а ребро или дуга (x_i, x_j) инцидентна вершине x_i, если отрезок линии ограничен концевой вершиной x_i.

Число вершин, инцидентных ребру или дуге, всегда равно двум, т. к. они являются концевыми вершинами отрезка линии. Число ребер или дуг, инцидентных некоторой вершине x_i, может быть произвольным. Его называют *сте-*

пенью или *валентностью* вершины x_i и обозначают $d(v)$. Вершина графа, для которой $d(v)=0$, является *изолированной*, для которой $d(v)=1$ – *висячей*.

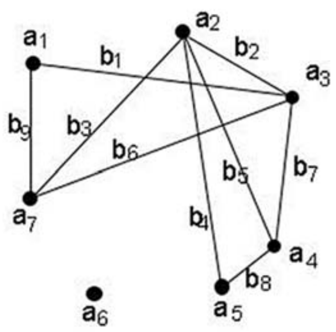


Рисунок 6 – Граф отношения «быть знакомыми»

Вершина называется *нечётной*, если $d(v)$ – нечётное число. Вершина называется *чётной*, если $d(v)$ – чётное число. Степень каждой вершины полного графа на единицу меньше числа его вершин.

Если в графе с n вершинами $(n \geq 2)$ в точности две вершины имеют одинаковую степень, то в этом графе всегда найдётся либо в точности одна вершина степени 0, либо в точности одна вершина степени $n-1$.

Число дуг, исходящих из вершины x_i, называют *полустепенью* вершины графа. Вершину, инцидентную исходящей дуге (x_i, x_j), называют *истоком* (символ «+» говорит о направлении дуги от вершины). Число дуг, заходящих в вершину x_i, также называют *полустепенью* вершины графа. Вершину x_i, инцидентную заходящей дуге (x_i, x_j), называют *стоком* (символ «–» говорит о направлении дуги к вершине).

Ребро u, соединяющее вершину a с вершиной b $(a \neq b)$, называют *звеном*, если для него имеют место две инциденции: (a, u, b) и (b, u, a), т. е. порядок двух концов ребра графа не существенен.

В том случае, когда порядок, в котором указаны вершины в инциденции, существенен, соответствующее ребро называется *дугой*.

Ребра u, для которых имеются инциденции вида (a, u, a), т. е. вершина соединена сама с собой, называются *петлями*.

Вершина, не инцидентная ни одному ребру графа, называется *голой*.

Вершина графа, которая инцидентна одной или нескольким петлям, называется *изолированной*.

Две вершины a и b графа называются *смежными*, если существует, по крайней мере, одно соединяющее их ребро. Вершина смежна сама с собой в том, и только в том случае, когда при ней имеется хотя бы одна петля.

Ребра, соединяющие одну и туже пару вершин, называются *кратными*.

Пример 1 – Охарактеризовать вершины и ребра графа, представленного на рисунке 7.

Решение

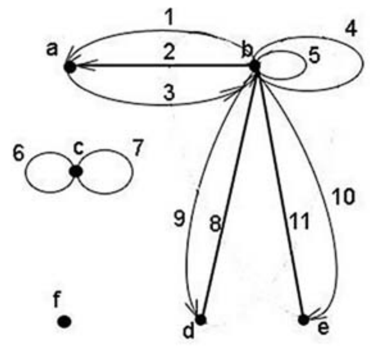


Рисунок 7 – Вершины и ребра графа

Звенья данного графа изображены линиями 8 и 11 без указания направления. Дуги данного графа представлены направленными линиями (стрелками), соединяющими первую из инцидентных вершин со второй. Вершины 1, 2, 9 и 10 – дуги, первая из них соединяет вершину b с вершиной a, но не наоборот. Это касается и других дуг. Петли начинаются и заканчиваются на одной и той же вершине, значит, линии 4 и 5 – петли.

Ребра 1, 2, 3 кратные; кратными являются также ребра 4 и 5, ребра 8 и 9, ребра 6 и 7, а также 10 и 11.

В данном графе голой является вершина f, вершина c изолированная, вершины a и b смежные, а вершины a и d несмежные, вершина b смежна сама с собой.

Маршрутом в графе называется последовательность вершин и рёбер $(v_0, e_1, \ldots, e_n, v_n)$ такая, что любые две соседние вершины v_i и v_{i+1} соединены ребром e_{i+1}. Если в маршруте $v_0 = v_n$, т. е. начальная вершина совпадает с конечной, то маршрут называется *замкнутым* или *циклическим*, в противном случае маршрут называется *открытым*. Число рёбер в маршруте называется *длиной маршрута.*

Маршрут, в котором все рёбра различны, называется *цепью*. Цепь, в которой все вершины, кроме, возможно, первой и последней, различны, называется *простой цепью*.

Граф называется *связным*, если существует цепь между любыми двумя его вершинами.

Пример 2 – Найти примеры маршрута и указать его длину; любой цепи; простой цепи; цепи, не являющейся простой; любого цикла (указать длину); простого цикла (указать длину) в графе, представленном на рисунке 8.

Решение

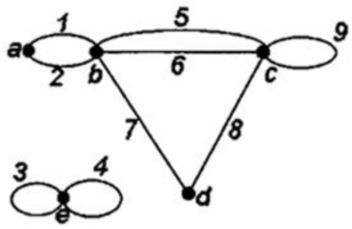


Рисунок 8 – Маршруты, цепи и циклы в графах

Выделим в данном графе маршрут из вершины a в вершину d, например, $a1b2a1b7d8c9c8d$ длины 7.

Цепью является, например, маршрут $b5c6b7d$; простая цепь – $a1b5c8d$; цепь $e3e4e$ – непростая; $b5c9c8d7b$ – цикл длины 4 при вершине b; $b5c8d7b$ – простой цикл длины 1 при вершине b.

Граф называется *связным*, если существует цепь между любыми двумя его вершинами.

Основные виды графов

Графы, в которых все ребра являются звеньями (порядок двух концов ребра графа несущественен), называются *неориентированными*, или *неорграфами*.

Графы, в которых все ребра являются дугами (порядок двух концов ребра графа существенен), называются *ориентированными* графами, или *орграфами*.

Неориентированный граф может быть представлен в виде ориентированного графа, если каждое его звено заменить на две дуги, имеющие противоположные направления.

На рисунке 9 приведены примеры *ориентированного графа* $G_1 = (V_1, E_1)$ и *неориентированного графа* $G_2 = (V_2, E_2)$.

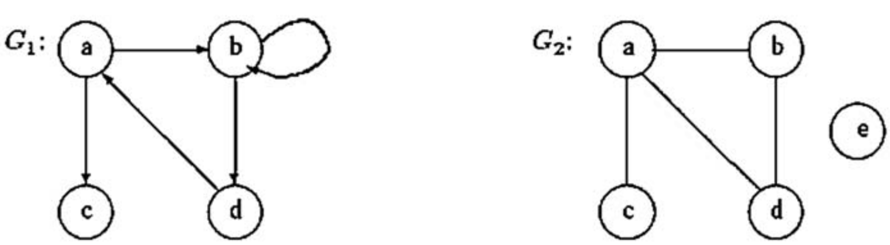


Рисунок 9 – Ориентированный G_1 и неориентированный G_2 графы

Для графа G_1 множество вершин $V_1 = \{a, b, c, d\}$, множество ребер $E_1 = \{(a,b), (a,c), (b,b), (b,d), (d,a)\}$, для графа G_2 соответственно множество вершин $V_2 = \{a, b, c, d\}$, множество ребер $E_2 = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, d)\}$.

В графе G_1 ребро (b, b) является петлей, полустепень исхода вершины a равна 2, а полустепень захода для нее равна 1. В графе G_2 степень вершины a равна 3, вершин b и d – 2, вершины c – 1, вершины e – 0, т. е. вершина e является изолированной.

Графы с петлями, смешанные графы, пустые графы, мультиграфы, обыкновенные графы, полные графы

Если граф содержит *петли*, то к основной характеристике графа добавляют указание «с петлями», например, «орграф с петлями». Если граф не содержит петель, то добавляют слова «без петель».

Смешанным называют граф, в котором имеются рёбра хотя бы двух из трёх разновидностей: звенья, дуги, петли.

Граф, состоящий только из *голых вершин*, называется *пустым*.

Мультиграфом называется граф, в котором пары вершин могут быть соединены более чем одним ребром, т. е. содержащий кратные рёбра, но не содержащий петель.

Граф без дуг (то есть неориентированный граф) без петель и кратных рёбер называется *обыкновенным*.

Граф заданного типа называют *полным*, если он содержит все возможные для этого типа рёбра (при неизменном множестве вершин). Так, в полном обыкновенном графе каждая пара различных вершин соединена ровно одним звеном.

Граф называется *двудольным*, если множество его вершин можно разбить на два подмножества так, чтобы никакое ребро не соединяло вершины одного и того же подмножества. *Полный двудольный граф* состоит из двух множеств вершин и из всевозможных звеньев, соединяющих вершины одного множества с вершинами другого множества.

На рисунке 10 представлены полный и полный двудольный графы.

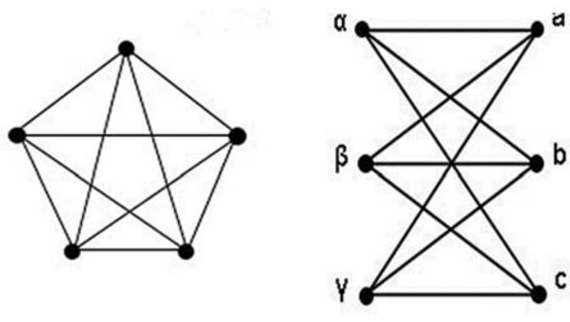


Рисунок 10 – Полный и полный двудольный графы

Эйлеровым графом называется граф, в котором можно обойти все вершины и при этом пройти одно ребро только один раз. В нём каждая вершина должна иметь только чётное число рёбер. Полный граф на рисунке 10 является эйлеровым.

Регулярным графом называется связный граф, все вершины которого имеют одинаковую степень k. Число вершин регулярного графа k-й степени не может быть меньше $k+1$. У регулярного графа нечётной степени может быть лишь чётное число вершин.

Гамильтоновым графом называется граф, содержащий гамильтонов цикл, т. е. простой цикл, проходящий через все вершины рассматриваемого графа. Таким образом, гамильтонов граф – это такой граф, в котором можно обойти все вершины, и каждая вершина при обходе повторяется лишь один раз.

Взвешенным графом называется граф, вершинам и (или) рёбрам которого присвоены «весы» – обычно некоторые числа. Пример взвешенного графа – транспортная сеть, в которой рёбрам присвоены весы, означающие стоимость перевозки груза по ребру и пропускные способности дуг.

Деревом называется связный граф без циклов. Любые две вершины дерева соединены лишь одним маршрутом. Число q рёбер графа находится из соотношения $q = n - 1$, где n – число вершин дерева. Приведённое соотношение выражает критическое значение числа рёбер дерева, т. к. если присоединить к дереву ещё одно ребро, то будет создан цикл, а если убрать одно ребро, то граф-дерево разделится на две компоненты. Граф, состоящий из компонент дерева, называется *лесом*.

На рисунке 11 представлены в порядке следования следующие виды графов: регулярный, взвешенный, дерево.

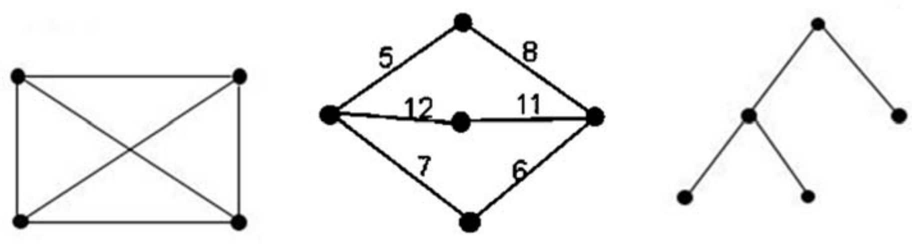


Рисунок 11 – Виды графов

6 Способы задания графов

Граф может быть задан аналитически (указанием множества вершин и множества ребер (дуг)), геометрически (посредством графического изображения) или матричным способом. Наиболее часто для задания графа используется аналитический и матричный способы, а геометрический способ служит для иллюстрации полученных результатов.

Матрицей смежности неориентированного графа, содержащего n вершин, называется квадратная матрица, каждый элемент которой a_{ij} определяется следующим образом:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если вершины } i \text{ и } j \text{ соединены ребром;} \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Матрицей смежности ориентированного графа, содержащего n вершин, называется квадратная матрица, каждый элемент которой a_{ij} определяется следующим образом:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если дуга выходит из вершины } i \text{ и входит в вершину } j; \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Матрицей инцидентности неориентированного графа, содержащего n вершин и m ребер, называется матрица с n строками и m столбцами, элемент которой b_{ij} определяется следующим образом:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если вершина } i \text{ инцидентна ребру } j; \\ 2, \text{ если вершина } i \text{ инцидентна петле } j; \\ 0, \text{ если вершина и ребро неинцидентны.} \end{cases}$$

Матрицей инцидентности ориентированного графа, содержащего n вершин и m ребер, называется матрица с n строками и m столбцами, элемент которой b_{ij} определяется следующим образом:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если вершина } i \text{ является началом ребра } j; \\ -1, \text{ если вершина } i \text{ является концом ребра } j; \\ 2, \text{если вершина } i \text{ инцидентна петле } j; \\ 0, \text{ если вершина и ребро } j \text{ неинцидентны.} \end{cases}$$

Пример 3 – Дан неориентированный граф (рисунок 12). Пронумеровать его вершины и ребра, записать матрицу смежности и матрицу инцидентности.

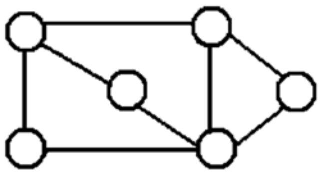


Рисунок 12 – Неориентированный граф

Решение

Пронумеруем вершины и ребра данного графа следующим образом (рисунок 13).

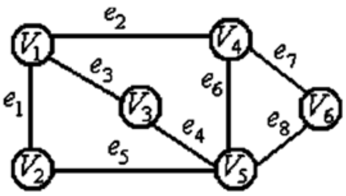


Рисунок 13 – Граф с пронумерованными вершинами и ребрами

Матрица смежности Q и матрица инцидентности R имеют вид:

$$Q=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad R=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 4 – Дана симметричная матрица смежности неориентированного мультиграфа $Q=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Нарисовать на плоскости мультиграф $G=(V,E)$. Найти матрицу инцидентности R графа G.

Решение

Данной матрице будет соответствовать граф, изображенный на рисунке 14.

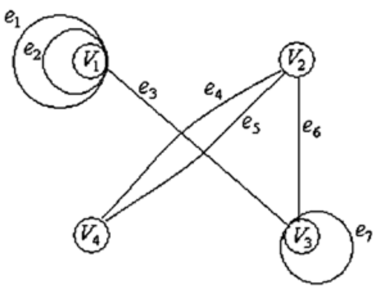


Рисунок 14 – Граф матрицы Q

Если пронумеровать ребра, как на рисунке 14, то матрица инцидентности примет вид:

$$R=\begin{pmatrix}2&2&2&0&0&0&0\\0&0&0&1&1&1&0\\0&0&1&0&0&1&2\\0&0&0&1&1&0&0\end{pmatrix}.$$

Пример 5 **–** Дан ориентированный граф (рисунок 15). Записать матрицу смежности, матрицу инцидентности. Найти кратчайшие расстояния от первой вершины. Проверить, является ли он эйлеровым и гамильтоновым.

Решение

Пронумеруем рёбра (рисунок 16).

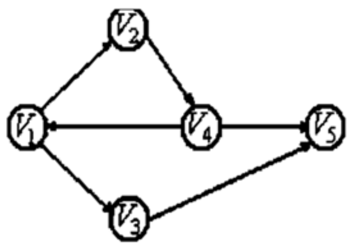


Рисунок 15 – Ориентированный граф

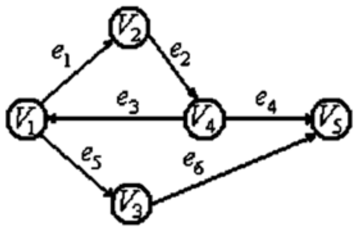


Рисунок 16 – Нумерация ребер

Запишем матрицу смежности Q и инцидентности R.

$$Q=\begin{pmatrix}0&1&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix};\qquad R=\begin{pmatrix}+1&0&-1&0&+1&0\\-1&+1&0&0&0&0\\0&0&0&0&-1&+1\\0&-1&+1&+1&0&0\\0&0&0&-1&0&-1\end{pmatrix}.$$

Найдем кратчайшее расстояние от первой вершины. Так как граф невзвешенный, то расстояние равно числу дуг, соединяющих вершины. Получим $d(V_1,V_2)=1,\ d(V_1,V_3)=1,\ d(V_1,V_4)=2,\ d(V_1,V_5)=2.$

Данный граф не является эйлеровым, т. к. он не является сильносвязанным, например, из вершины V_5 нельзя попасть ни в одну вершину. Кроме того, если посчитаем полустепени исхода и захода всех вершин: $\rho^-(V_1)=2$, $\rho^+(V_1)=2$, $\rho^-(V_2)=1$, $\rho^+(V_1)=2$, $\rho^-(V_3)=1$, $\rho^+(V_3)=1$, $\rho^-(V_4)=2$, $\rho^+(V_4)=1$,

$\rho^{-}(V_5)=0,\ \rho^{+}(V_5)=2$, то заметим, что у вершин V_1, V_4, V_5 полустепени исхода и захода не равны.

Данный граф не является гамильтоновым, потому что из вершины V_5 не выходит ни одного ребра.

Задания для самостоятельной работы

1 Дана симметричная матрица смежности неориентированного мультиграфа G. Нарисовать на плоскости мультиграф $G=(V,E)$.

Найти матрицу инцидентности R графа $G=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2 Дан ориентированный граф (рисунок 17). Записать матрицу смежности, матрицу инцидентности. Найти кратчайшие расстояния от первой вершины. Проверить, является ли он эйлеровым и гамильтоновым.

3 Для заданных графов найти матрицы смежности вершин, ребер и инцидентности (рисунок 18).

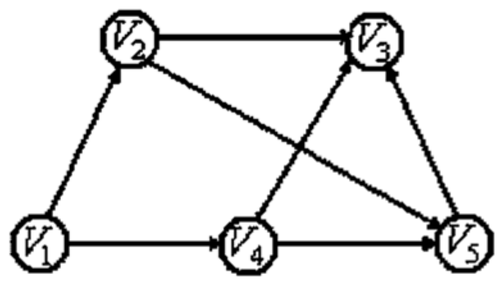


Рисунок 17 – Ориентированный граф

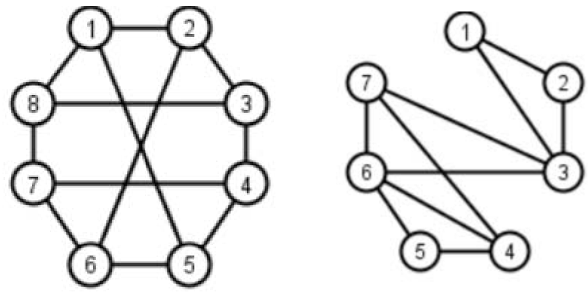


Рисунок 18 – Заданные графы

4 Представить неориентированный граф (рисунок 19) в виде матриц смежности вершин и ребер и матрицы инцидентности.

5 Построить граф отношения $x+y\le 7$ на множестве $M=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Определить его свойства.

6 Ориентированный граф задан графическим способом (рисунок 20). Задать этот граф:

а) с помощью матрицы смежности;

б) с помощью матрицы инцидентности.

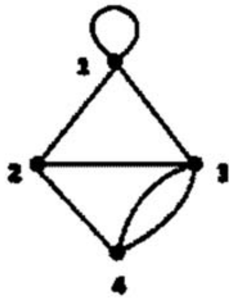


Рисунок 19 – Неориентированный граф

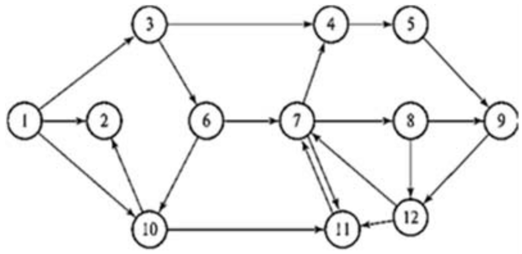


Рисунок 20 – Ориентированный граф

7 Задан граф $G=(A,B)$ такой, что множество $A=\{1,2,3,4,5,6\}$, а множество $B=\{(1,2),(1,3),(1,4),(3,2),(3,5),(3,6),(4,6)\}$. Сколько у него вершин, ребер и как он выглядит графически?

8 Дан граф с множеством вершин $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$, смежные с ними вершины представлены в таблице 7.

Таблица 7 – Смежные вершины для вершин графа A

Вершина	Вершины, смежные с данной
1	4, 5, 7
2	3, 6
3	2, 4, 5, 7
4	1, 3
5	1, 3, 6
6	5, 2, 7
7	1, 3, 6

Привести пример:

а) пути в этом графе, не являющегося цепью;

б) цепи в этом графе, не являющейся простой цепью;

в) замкнутого пути в этом графе, не являющегося циклом;

г) цикла в этом графе, не являющегося простым циклом;

д) простого цикла в этом графе.

9 Установить, какие из представленных матриц являются матрицами смежностей, какие – матрицами инцидентности и какие не являются ни теми, ни другими:

$$а)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad в)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$б)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

10 Составить матрицу смежности Q и матрицу инцидентности R для графа G (рисунок 21).

11 Составить матрицу смежности Q и матрицу инцидентности R для графа G (рисунок 22).

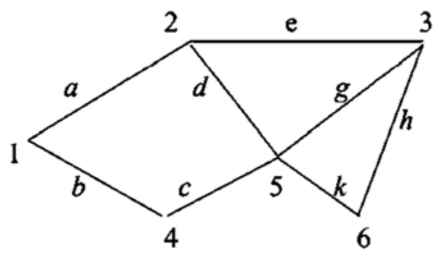


Рисунок 21 – Граф G

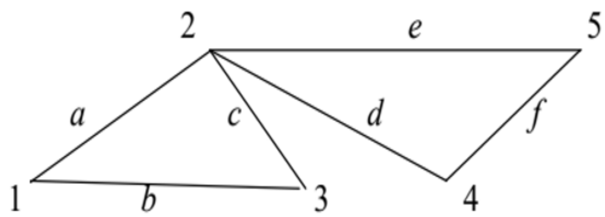


Рисунок 22 – Граф G

12 Дан ориентированный граф G (рисунок 23). Составить матрицу смежности Q, матрицу инцидентности R, матрицу достижимости S.

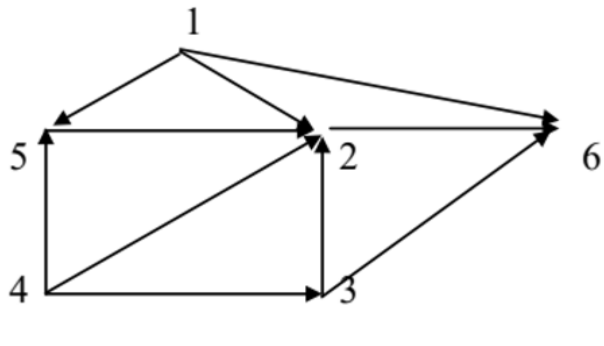


Рисунок 23 – Ориентированный граф G

13 Изобразить граф, заданный матрицей смежности Q и матрицей инцидентности R:

$$Q=\begin{pmatrix}0&1&1&1&0\\1&0&1&0&1\\1&1&0&0&1\\1&0&0&0&0\\0&1&1&0&0\end{pmatrix};\quad R=\begin{pmatrix}1&0&1&1&0&0\\1&1&0&0&1&0\\0&1&1&0&0&1\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&1\end{pmatrix}.$$

14 Найти степени вершин графов G_1 и G_2, представленных на рисунке 24.

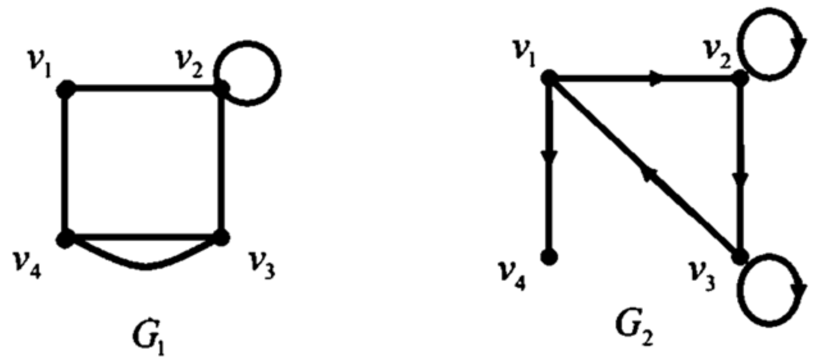


Рисунок 24 – Графы G_1 и G_2

15 Записать списки ребер и смежности для графов на рисунке 25.

а) *б*)

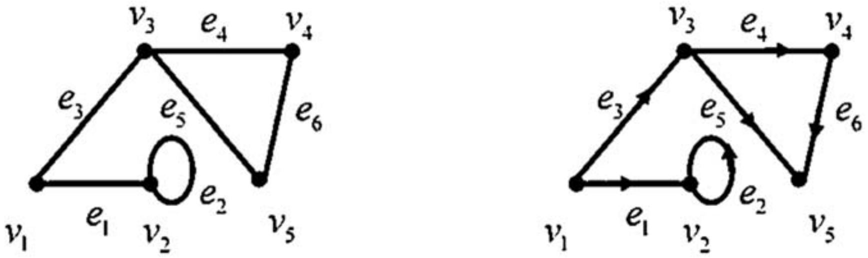


Рисунок 25 – Графы

Список литературы

1 **Алексеев, В. Е.** Сборник задач по дискретной математике: электронное учебно-методическое пособие / В. Е. Алексеев, Л. Г. Киселева, Т. Г. Смирнова. – Нижний Новгород : Нижегородский госуниверситет, 2012. – 80 с.

2 **Белоусов, А. И.** Дискретная математика: учебник для вузов / А. И. Белоусов, С. Б. Ткачев; под ред. В. С. Зарубина, А. П. Крищенко. – 5-е изд. – Москва: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2015. – 743 с.

3 **Булгакова, И. Н.** Дискретная математика. Элементы теории, задачи и упражнения: учебное пособие для вузов: в 2 ч. / И. Н. Булгакова. – 2-е изд. – Воронеж : ВГУ, 2008. – Ч. 1. – 64 с.

4 **Мальцев, Ю. Н**. Введение в дискретную математику (элементы комбинаторики, теории графов и теории кодирования): учебное пособие / Ю. Н. Мальцев, Е. П. Петров. – Барнаул : Алтайский ун-т, 1997. – 135 с.

5 **Москинова, Г. И.** Дискретная математика. Математика для менеджера в примерах и упражнениях: учебное пособие / Г. И. Москинова. – Москва : Логос, 2003. – 240 с.

6 **Новиков, Ф. А.** Дискретная математика для программистов / Ф. А. Новиков. – Санкт-Петербург : Питер, 2000. – 304 с.

7 **Тишин, В. В.** Дискретная математика в примерах и задачах / В. В. Тишин. – Санкт-Петербург : БХВ- Петербург, 2008. – 352 с.

8 **Шапорев, С. Д.** Дискретная математика. Курс лекций и практических занятий / С. Д. Шапорев. – Санкт-Петербург : БХБ-Петербург, 2006. – 400 с.

9 **Шевелев, Ю. П.** Дискретная математика: учебное пособие / Ю. П. Шевелев. – Санкт-Петербург : Лань, 2016. – 592 с.

10 **Эвин, А. Ю.** Задачник по дискретной математике / А. Ю. Эвин. – 2-е изд., перераб. и доп. – Челябинск : ЮУрГУ, 2002. – 164 с.