МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Маркетинг и менеджмент»

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Методические рекомендации к самостоятельной работе для студентов специальности 1-28 01 02 «Электронный маркетинг» заочной формы обучения

Могилев 2022

УДК 512.8
ББК 22.143
Л59

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Маркетинг и менеджмент» «9» декабря 2021 г., протокол № 5

Составитель канд. пед. наук, доц. Т. С. Старовойтова

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доц. В. А. Ливинская

В методических рекомендациях представлены материалы для самостоятельной работы студентов заочной формы обучения по дисциплине «Линейная алгебра и аналитическая геометрия». Основные теоретические положения проиллюстрированы примерами решения задач, составляющих основу аудиторной контрольной работы.

Учебно-методическое издание

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Ответственный за выпуск	А. В. Александров
Корректор	Т. А. Рыжикова
Компьютерная верстка	Н. П. Полевничая

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 31 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.

Содержание

1 Линейная алгебра

Матрицей размера $n\times m$, где $n-$ число строк, $m-$ число столбцов, называется таблица элементов, расположенных в определенном порядке. Числа являются элементами числовых матриц. Место каждого элемента однозначно определяется номером строки и столбца, на пересечении которых он находится. Элементы матрицы обозначаются a_{ij}, где $i-$ номер строки, а $j-$ номер столбца. Сами матрицы обозначаются заглавными латинскими буквами A, B, C.

Основными операциями над матрицами являются следующие: сложение и вычитание матриц, умножение матрицы на число, произведение матриц, транспонирование матриц, нахождение обратной матрицы.

Пример 1 **–** Найти матрицу $-5B+AB$, если $A=\begin{pmatrix}5 & 8 & -4\\ 6 & 9 & -5\\ 4 & 7 & -3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 2 & 5\\ 4 & -1 & 3\\ 9 & 6 & 5\end{pmatrix}$.

Решение

Для того чтобы получить элемент c_{ij} матрицы произведения $C=A\cdot B$, следует элементы i-й строки матрицы A умножить на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B и полученные произведения сложить.

Получим

$$AB=\begin{pmatrix}5 & 8 & -4\\ 6 & 9 & -5\\ 4 & 7 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 2 & 5\\ 4 & -1 & 3\\ 9 & 6 & 5\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}5\cdot3+8\cdot4-4\cdot9 & 5\cdot2+8\cdot(-1)-4\cdot6 & 5\cdot5+8\cdot3-4\cdot5\\ 6\cdot3+9\cdot4-5\cdot9 & 6\cdot2+9\cdot(-1)-5\cdot6 & 6\cdot5+9\cdot3-5\cdot5\\ 4\cdot3+7\cdot4-3\cdot9 & 4\cdot2+7\cdot(-1)-3\cdot6 & 4\cdot5+7\cdot3-3\cdot5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11 & -22 & 29\\ 9 & -27 & 32\\ 13 & -17 & 26\end{pmatrix}.$$

При умножении матрицы на число получаем матрицу тех же размеров, что и данная, причем все элементы матрицы умножаются на это число.

Следовательно,

$$5B=5\cdot\begin{pmatrix}3 & 2 & 5\\ 4 & -1 & 3\\ 9 & 6 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15 & 10 & 25\\ 20 & -5 & 15\\ 45 & 30 & 25\end{pmatrix}.$$

При сложении (вычитании) матриц нужно сложить (вычесть) соответствующие элементы этих матриц.

Получим

$$-5B+AB=AB-5B=\begin{pmatrix}11 & -22 & 29\\ 9 & -27 & 32\\ 13 & -17 & 26\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}15 & 10 & 25\\ 20 & -5 & 15\\ 45 & 30 & 25\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & -32 & 4\\ -11 & -22 & 17\\ -32 & -47 & 1\end{pmatrix}.$$

Матрицу A^T называют транспонированной для матрицы A, а переход от A к A^T транспонированием, если элементы каждой строки матрицы A записать в том же порядке в столбцы матрицы A^T. Таким образом, если в матрице A поменять местами столбцы и строки, сохранив порядок их следования, то получится транспонированная матрица A^T.

Например,

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm}\end{pmatrix} \text{ и } A^T=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1}\\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{nm}\end{pmatrix}.$$

Основные свойства операции транспонирования.

1 $\left(A^T\right)^T=A.$

2 Если определено произведение матриц AB, то определено произведение $B^T A^T$ и выполняется равенство $\left(AB\right)^T=B^T A^T$.

3 Если определена сумма матриц $A+B$, то определена и сумма A^T+B^T и выполняется равенство $\left(A+B\right)^T=A^T+B^T$.

4 $\left(\alpha A\right)^T=\alpha A^T$.

Пример 2 – Для матриц A и B найти матрицу $A+\left(2B\right)^T$, если $A=\begin{pmatrix}4 & -2 & -7\\ 1 & 5 & 3\\ -2 & 0 & 6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 2 & 4 & 1\\ 1 & -4 & 2\end{pmatrix}$.

Решение

По свойству 4 операции транспонирования получим

$$\left(2B\right)^T = 2B^T = 2\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 2 & 4 & 1\\ 1 & -4 & 2\end{pmatrix}^T = 2\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 4 & -4\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 4 & 2\\ 0 & 8 & -8\\ 6 & 2 & 4\end{pmatrix}.$$

Тогда

$$A+\left(2B\right)^T = \begin{pmatrix}4 & -2 & -7\\ 1 & 5 & 3\\ -2 & 0 & 6\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2 & 4 & 2\\ 0 & 8 & -8\\ 6 & 2 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6 & 2 & -5\\ 1 & 13 & -5\\ 4 & 2 & 10\end{pmatrix}.$$

Операция нахождения обратной матрицы использует понятие определителя (детерминанта) матрицы.

Определитель – это числовая характеристика квадратной матрицы A, обозначается $\det A$, $|A|$ или ΔA.

$$A = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}, \qquad \Delta A = \begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}.$$

Пример 3 – Вычислить определитель третьего порядка $\begin{vmatrix}-1 & 2 & 4\\ 2 & 5 & -1\\ 1 & 2 & 2\end{vmatrix}$.

Решение

Определитель третьего порядка можно вычислять по правилу треугольников (по правилу Саррюса)

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Тогда для данного определителя получим

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 5\cdot 2 + 2\cdot(-1)\cdot 1 + 2\cdot 2\cdot 4 -$$

$$-4\cdot 5\cdot 1 - (-1)\cdot(-1)\cdot 2 - 2\cdot 2\cdot 2 = -26.$$

Минором M_{ij} к элементу a_{ij} определителя n-го порядка называется определитель $(n-1)$-го порядка, полученный из исходного определителя вычеркиванием i-й строки и j-го столбца.

Пример 4 – Найти минор M_{23} к элементу a_{23} определителя $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 7 & 8 & 4 \end{vmatrix}$.

Решение

Вычеркивая в заданном определителе вторую строку и третий столбец, получим $\begin{vmatrix} 1 & 2 & \cancel{-1} \\ \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{3} \\ 7 & 8 & \cancel{4} \end{vmatrix}$, тогда $M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$.

Алгебраическим дополнением A_{ij} к элементу a_{ij} называется выражение вида $A_{ij} = (-1)^{i+j}\cdot M_{ij}$, где M_{ij} – миноры, соответствующие элементам a_{ij}. матрицы A.

Пример 5 – Найти алгебраическое дополнение A_{23} к элементу a_{23} определителя $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 7 & 8 & 4 \end{vmatrix}$.

Решение

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\cdot M_{23} = (-1)^5\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}.$$

Пример 6 – Вычислить определитель четвертого порядка $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \end{vmatrix}$.

Решение

При вычислении определителя будем использовать теорему Лапласа: определитель равен сумме произведений элементов какой-либо строки на их алгебраические дополнения.

При вычислении определителя используется его разложение:

– по элементам i-й строки $\Delta = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + a_{i3} \cdot A_{i3} + a_{i4} \cdot A_{i4}$;

– по элементам j-го столбца $\Delta = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + a_{3j} \cdot A_{3j} + a_{4j} \cdot A_{4j}$.

Разложим данный определитель по элементам первой строки.

Получим

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} +$$

$$+(-1) \cdot (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot (-8 + 3 - 1 + 6 + 2 - 2) - (4 + 5 + 1 + 2 - 1 + 10) -$$

$$-(-2 + 2 - 15 - 1 + 3 + 20) - 2 \cdot (-1 + 15 + 4 + 1 + 6 + 10) = -98.$$

Матрица A^{-1} называется обратной матрице A, если

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E,$$

где $E-$ единичная матрица.

Для того чтобы матрица A имела обратную матрицу, необходимо и достаточно, чтобы она была невырожденной, т. е. чтобы ее определитель $|A| \neq 0$.

Обратная матрица определяется по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Элементы обратной матрицы $A_{11},\ A_{12},\ ...,A_{nn}$ являются алгебраическими дополнениями к соответствующим элементам $a_{11},\ a_{12},\ ...,a_{nn}$ данной матрицы. В общем виде они записываются как $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$.

***Пример** 7* **–** Найти матрицу, обратную матрице A, и выполнить проверку, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Решение

Проверим, является ли данная матрица A невырожденной. Для этого вычислим ее определитель:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 0 + 12 + 2 - 0 - 3 = 12 \neq 0.$$

Так как определитель матрицы A не равен нулю, то обратная матрица существует.

Найдем алгебраические дополнения элементов матрицы:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 3 = -2;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(-2 - 1) = 3;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 1 = 7;$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}0 & 2\\ 3 & -1\end{vmatrix}=-(0-6)=6;$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-1-2=-3;$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-(3-0)=-3;$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}0 & 2\\ -1 & 1\end{vmatrix}=0+2=2;$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-(1-4)=3;$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-1-0=-1.$$

Обратная матрица имеет вид:

$$A^{-1}=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}-2 & 6 & 2\\ 3 & -3 & 3\\ 7 & -3 & -1\end{pmatrix}.$$

Проверку обратной матрицы выполним, используя условие $A^{-1}A=E$. Получим

$$A^{-1}A=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}-2 & 6 & 2\\ 3 & -3 & 3\\ 7 & -3 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 3 & -1\end{pmatrix}=$$

$$\frac{1}{12}\begin{pmatrix}-2+12+2 & 0-6+6 & -4+6-2\\ 3-6+3 & 0+3+9 & 6-3-3\\ 7-6-1 & 0+3-3 & 14-3+1\end{pmatrix}=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}12 & 0 & 0\\ 0 & 12 & 0\\ 0 & 0 & 12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E.$$

Элементарными преобразованиями матрицы называются такие преобразования, в результате выполнения которых сохраняется эквивалентность матриц.

Элементарными преобразованиями матриц являются:

– перестановка строк и столбцов матрицы;

– умножение строк и столбцов на число, отличное от нуля;

– прибавление к какой-либо строке (столбцу) другой строки (столбца), умноженной на ненулевое число.

Элементарные преобразования матрицы не изменяют ее ранг.

Рангом матрицы называется ранг ее системы строк или столбцов. Обозначается $\operatorname{rang} A$ или $r(A)$. На практике для нахождения ранга матрицы используют следующее утверждение: ранг матрицы равен количеству ненулевых строк после приведения матрицы к ступенчатому виду.

Пример 8 – Найти ранг матрицы $A=\begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение

С помощью элементарных преобразований над строками приведем матрицу к ступенчатому виду. Для этого вначале от третьей строки отнимем удвоенную вторую строку. Получим матрицу, эквивалентную данной матрице A. Запишем это следующим образом:

$$A \sim \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}.$$

От второй строки отнимем четвертую строку, умноженную на 4, а от третьей – удвоенную четвертую. Получим

$$A \sim \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & -20 & -50 & -5 \\ 0 & -12 & -30 & -3 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ко второй строке прибавим первую строку, умноженную на 5, к третьей – первую, умноженную на 3. Получим матрицу, эквивалентную матрице A:

$$A \sim \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}.$$

Меняя местами первую и вторую строки последней матрицы, получим

$$A \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}.$$

Меняем местами четвертую и первую строки и получаем матрицу

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 7 & 17 & 3 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как в последней матрице получили две ненулевые строки, то ранг матрицы равен 2, т. е. $r(A) = 2$.

Пример 9 **–** Найти ранг матрицы A методом элементарных преобразований: $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение

Выполняя элементарные преобразования над строками матрицы, приведем ее к ступенчатому виду. При этом ранг матрицы будет равен числу ненулевых строк полученной матрицы. Решение запишем в свернутом виде.

Преобразуем данную матрицу:

$$A=\begin{pmatrix}5&3&1&3\\3&-1&1&2\\1&2&4&8\\3&-1&1&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&4&8\\3&-1&1&2\\5&3&1&3\\3&-1&1&2\end{pmatrix}\begin{matrix}\\I\cdot(-3)+II\\I\cdot(-5)+III\\I\cdot(-3)+IV\end{matrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&2&4&8\\0&-7&-11&-22\\0&-7&-19&-37\\0&-7&-11&-22\end{pmatrix}\begin{matrix}\\\\II\cdot(-1)+III\\II\cdot(-1)+IV\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&4&8\\0&-7&-11&-22\\0&0&-8&-15\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Получена ступенчатая матрица, число ненулевых строк равно 3, значит, ранг данной матрицы $r(A)=3$.

Пример 10 **–** Решить по формулам Крамера систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases}3x_1-2x_2+4x_3=11;\\2x_1-x_2-x_3=4;\\3x_1+4x_2-2x_3=11.\end{cases}$$

Решение

Формулы Крамера записываются следующим образом:

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta};\ x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta};\ x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta},$$

где $\Delta-$ главный определитель системы, составленный из коэффициентов при неизвестных; $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ – определители системы, полученные путем замены соответственно первого, второго и третьего столбцов главного определителя системы столбцом свободных членов.

Вычислим указанные определители. Получим

$$\Delta=\begin{vmatrix}3&-2&4\\2&-1&-1\\3&4&-2\end{vmatrix}=6+32+6+12-8+12=60;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 11 & -2 & 4 \\ 4 & -1 & -1 \\ 11 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 22 + 64 + 22 + 44 - 16 + 44 = 180;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 11 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ 3 & 11 & -2 \end{vmatrix} = -24 + 88 - 33 - 48 + 33 + 44 = 60;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 11 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 11 \end{vmatrix} = -33 + 88 - 24 + 33 + 44 - 48 = 60;$$

Следовательно,

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{180}{60} = 3,\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{60}{60} = 1,\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{60}{60} = 1.$$

Решение системы $x_1 = 3, x_2 = 1, x_3 = 1$.

Пример 11 **–** Решить методом Гаусса систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 8x_4 = 1; \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0; \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + 4x_4 = 0; \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 3. \end{cases}$$

Решение

Запишем расширенную матрицу для данной системы:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -3 & 2 & -8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

С помощью элементарных преобразований сведем расширенную матрицу к треугольному виду. Для этого выполним следующее.

1 Поменяем местами первую и вторую строки.

2 Прибавим к элементам второй, третьей и четвертой строки элементы первой строки, умноженные соответственно на $-5, -3, -4$.

3 Поменяем местами вторую и третью строки. Прибавим к элементам третьей и четвертой строк элементы второй строки, умноженные соответственно на $4; 1$.

4 К элементам четвертой строки, умноженной на 11, прибавим третью строку, умноженную на -3.

Получим матрицу, эквивалентную расширенной матрице $\tilde{A}$.

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -3 & 2 & -8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right) \overset{(1)}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & 2 & -8 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right) \overset{(2)}{\sim}$$

$$\overset{(2)}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & -3 & -13 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -3 & 3 \end{array}\right) \overset{(3)}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -11 & -9 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & 3 \end{array}\right) \overset{(4)}{\sim}$$

$$\overset{(4)}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -11 & -9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 30 \end{array}\right).$$

Такой расширенной матрице соответствует следующая система уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0; \\ \quad 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0; \\ \quad\quad -11x_3 - 9x_4 = 1; \\ \quad\quad\quad 5x_4 = 30. \end{cases}$$

С четвертого уравнения находим $x_4 = \dfrac{30}{5} = 6$ и подставляем в третье уравнение $-11x_3 = 1 + 9x_4 = 1 + 9 \cdot 6 = 55$, тогда $x_3 = \dfrac{-55}{11} = -5$.

Найденные значения подставляем во второе уравнение $2x_2 = 2x_3 - x_4 = -16$, тогда $x_2 = \dfrac{-16}{2} = -8.$

Из первого уравнения находим $x_1 = -x_2 - x_3 - x_4 = 8 + 5 - 6 = 7.$

Решение исходной системы: $x_1 = 7, x_2 = -8, x_3 = -5, x_4 = 6.$

Пример 12 – Решить методом Гаусса систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1; \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 6; \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = -1. \end{cases}$$

Решение

Составим расширенную матрицу системы $\widetilde{A}$ и с помощью элементарных преобразований строк приведем ее к виду

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 5 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ I\cdot(-2)+II \\ I\cdot(-1)+III \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ II\cdot(-1) \\ III \leftrightarrow II \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 5 & 4 & -4 \end{array}\right) II\cdot 5 + III \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 14 & -14 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ II\cdot(-1) \\ III:14 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Так как ранг основной матрицы $r(A)$ равен рангу расширенной матрицы $r(\widetilde{A})$, т. е. $r(A) = r(\widetilde{A}) = 3$, то система совместна и имеет решение. Полученной матрице соответствует система, эквивалентная исходной,

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1; \\ \quad x_2 - 2x_3 = 2; \\ \qquad x_3 = -1. \end{cases}$$

Ее решение (обратный ход в методе Гаусса) находится подстановкой найденных значений неизвестных в уравнения последней системы.

Получаем $x_3 = -1, x_2 = 2 + 2x_3 = 0,\ x_1 = 1 - 3x_3 - 2x_2 = 4.$

Ответ: $x_1 = 4, x_2 = 0, x_3 = -1.$

Пример 13 – Решить матричным способом, записав систему в матричной форме, систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1; \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 6; \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение

Введем следующие обозначения:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}; \; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Запишем систему уравнений в виде матричного уравнения $AX = B$. Его решение имеет вид $X = A^{-1}B,$ где A^{-1} – обратная матрица по отношению к матрице A.

Найдем A^{-1} по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix},$$

где $A_{11},\ A_{12},\ ...,A_{33}$ – алгебраические дополнения к соответствующим элементам $a_{11},\ a_{12},\ ...,a_{33}$ матрицы A.

$$|A| = \Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Найдем алгебраические дополнения к элементам матрицы:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 3 = 3;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -(9+2) = -11;$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}3 & 2\\ 2 & -3\end{vmatrix}=-9-4=-13;$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-1 & 1\\ -3 & 3\end{vmatrix}=-\left(-3+3\right)=0;$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix}=3-2=1;$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & -3\end{vmatrix}=-\left(-3+2\right)=1;$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=1-2=-1;$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & -1\end{vmatrix}=-\left(-1-3\right)=4;$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 3 & 2\end{vmatrix}=2+3=5.$$

Обратная матрица имеет вид:

$$A^{-1}=\frac{1}{1}\begin{pmatrix}3 & 0 & -1\\ -11 & 1 & 4\\ -13 & 1 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 0 & -1\\ -11 & 1 & 4\\ -13 & 1 & 5\end{pmatrix}.$$

Тогда

$$X=\begin{pmatrix}3 & 0 & -1\\ -11 & 1 & 4\\ -13 & 1 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 6\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot 1+0\cdot 6-1\cdot 0\\ -11\cdot 1+1\cdot 6+4\cdot 0\\ -13\cdot 1+1\cdot 6+5\cdot 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ -5\\ -7\end{pmatrix}.$$

Таким образом, решение системы $x_1=3,\ x_2=-5,\ x_3=-7.$

2 Векторная алгебра

Вектором называется направленный отрезок. Вектор с началом в точке A и концом в точке B обозначается символом $\overrightarrow{AB}$ или $\vec{a}$. Длина отрезка $\overrightarrow{AB}$ называется длиной или модулем вектора и обозначается $\left|\overrightarrow{AB}\right|$.

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются коллинеарными, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. Векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называются компланарными, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются равными, если они коллинеарны, одинаково направлены и равны по длине. Записывают $\vec{a} = \vec{b}$.

Ортом данного вектора называется вектор, который направлен одинаково с данным вектором и имеет модуль, равный единице.

Суммой векторов $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ называется вектор, обозначаемый $\vec{a} + \vec{b}$ и равный $\overrightarrow{AC}$. Таким образом, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (*правило треугольника*). Если векторы имеют общее начало, то они складываются по *правилу параллелограмма* (рисунок 1).

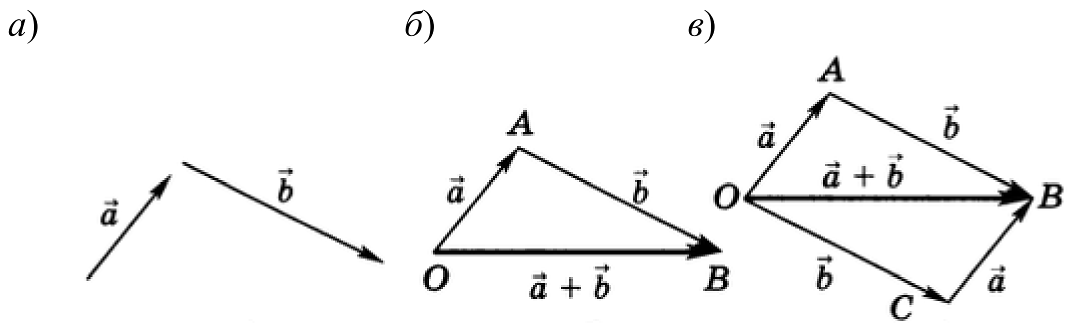

Рисунок 1

Произведением вектора $\vec{a} \neq 0$ на число $\lambda \neq 0$ называется вектор $\lambda\vec{a}$, имеющий длину $|\lambda| \cdot |\vec{a}|$ и направление вектора $\vec{a}$ при $\lambda > 0$ и противоположное направление при $\lambda < 0$.

Проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ на вектор $\vec{e}$ называется положительное число $\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|$, если вектор $\overrightarrow{AB}$ и вектор $\vec{e}$ одинаково направлены, и отрицательное число $-\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|$, если вектор $\overrightarrow{AB}$ и вектор $\vec{e}$ противоположно направлены. Обозначается $\text{пр}_{\vec{e}}\overrightarrow{AB}$ и вычисляется по формуле $\text{пр}_{\vec{e}}\overrightarrow{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right|\cos\varphi$, где $\varphi -$ угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\vec{e}$ или между вектором $\overrightarrow{AB}$ и его проекцией на $\vec{e}$.

Если $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k} -$ орты координатных осей прямоугольной системы координат $Oxyz$, то любой вектор $\vec{a}$ единственным образом можно представить в виде их суммы (линейной комбинации) с коэффициентами a_x, a_y, a_z: $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$. Коэффициенты a_x, a_y, a_z линейной комбинации называются координатами вектора $\vec{a}$ в базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Записывают $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$. Длина вектора, заданного своими координатами, определяется по формуле $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

Направление вектора $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$ определяется углами α, β, γ, образованными вектором $\vec{a}$ с положительными направлениями осей Ox, Oy, Oz соответственно. Косинусы этих углов называются направляющими косинусами вектора (рисунок 2).

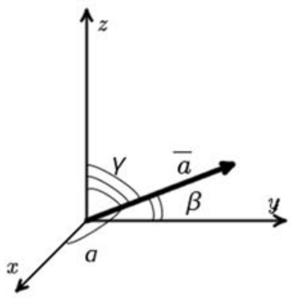

Рисунок 2

Направляющие косинусы определяются по формулам:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}; \quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}; \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}.$$

Пример 1 **–** Даны векторы $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}, \vec{b} = \vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}$.

Найти:

1) координаты вектора $5\vec{a} - 7\vec{b}$;

2) разложение вектора $\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{4}{5}\vec{b}$ по базису $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$;

3) направляющие косинусы вектора $\vec{a}$.

Решение

1 Пусть $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$. Тогда $\lambda\vec{a} = (\lambda x_1; \lambda y_1; \lambda z_1)$, $\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2)$. По условию векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеют координаты $\vec{a} = (3; 2_1; -1)$, $\vec{b} = (1; -4; 2)$. Найдем координаты вектора $5\vec{a} - 7\vec{b} = (5\cdot 3 - 7\cdot 1; 5\cdot 2 - 7\cdot 4; 5\cdot(-1) - 7\cdot 2) = (8; -18; -19)$.

Таким образом, $5\vec{a} - 7\vec{b} = (8; -18; -19)$.

2 Разложение вектора $\vec{a}=(x_1;y_1;z_1)$ по базису $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ имеет вид $\vec{a}=(x_1\vec{i};y_1\vec{j};z_1\vec{k})$. Разложим вектор $\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{4}{5}\vec{b}$ по базису $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$. Получим

$$\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{4}{5}\vec{b}=\frac{1}{3}\left(3\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}\right)+\frac{4}{5}\left(\vec{i}-4\vec{j}+2\vec{k}\right)=$$

$$=\vec{i}+\frac{2}{3}\vec{j}-\frac{1}{3}\vec{k}+\frac{4}{5}\vec{i}-\frac{16}{5}\vec{j}+\frac{8}{5}\vec{k}=\frac{9}{5}\vec{i}-\frac{38}{15}\vec{j}+\frac{19}{15}\vec{k}.$$

Следовательно, $\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{4}{5}\vec{b}=\frac{9}{5}\vec{i}-\frac{38}{15}\vec{j}+\frac{19}{15}\vec{k}$.

3 Так как направление вектора $\vec{a}=(a_x;a_y;a_z)$ определяется углами α,β,γ, образованными вектором $\vec{a}$ с положительными направлениями координатных осей Ox, Oy, Oz соответственно, а косинусы этих углов (направляющие косинусы) определяются по формулам $\cos\alpha=\frac{a_x}{|\vec{a}|}$, $\cos\beta=\frac{a_y}{|\vec{a}|}$, $\cos\gamma=\frac{a_z}{|\vec{a}|}$, где $|\vec{a}|=\sqrt{a_x^{\,2}+a_y^{\,2}+a_z^{\,2}}$ и $|\vec{a}|=\sqrt{3^2+2^2+(-1)^2}=\sqrt{14}$, то получим $\cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{14}}=\frac{3\sqrt{14}}{14}$; $\cos\beta=\frac{2}{\sqrt{14}}=\frac{\sqrt{14}}{7}$; $\cos\gamma=\frac{-1}{\sqrt{14}}=-\frac{\sqrt{14}}{14}$.

Скалярным произведением двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, которое равно произведению длин этих векторов на косинус угла φ между ними. Обозначение: $\vec{a}\cdot\vec{b}$. Таким образом, $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi$.

Векторным произведением неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, определяемый условиями:

1) вектор $\vec{c}$ перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т. е. $\vec{c}\perp\vec{a}, \vec{c}\perp\vec{b}$;

2) длина вектора $\vec{c}$ равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ как на сторонах, т. е. $|\vec{c}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\varphi$, где $\varphi-$ угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

3) векторы $\vec{a},\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют правую тройку.

Векторное произведение обозначается $\vec{a}\times\vec{b}$ или $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$.

Смешанным произведением трех векторов $\vec{a},\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число, равное скалярному произведению вектора $\vec{a}\times\vec{b}$ на вектор $\vec{c}$. Обозначение: $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$. Таким образом, $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$.

Пример 2 – Даны векторы $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$.
Найти:
1) длину вектора $\vec{a} + 2\vec{c}$;
2) скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
3) угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
4) векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{c}$;
5) смешанное произведение векторов $\vec{a}, \vec{b}$ и с.

Решение

1 Длина вектора $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ находится по формуле $|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$. Сумма векторов $\vec{a} + 2\vec{c} = (3 + 2 \cdot 1; 2 + 2 \cdot 3; (-1) + 2 \cdot 2) = (5; 8; 3)$.

Тогда $|\vec{a} + 2\vec{c}| = \sqrt{5^2 + 8^2 + 3^2} = \sqrt{25 + 64 + 9} = \sqrt{98}$.

2 Скалярное произведение векторов $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$ найдем по формуле $(\vec{a}; \vec{b}) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$.

Так как из условия следует, что $\vec{a} = (3; 2; -1), \vec{b} = (1; -4; 2)$, то $(\vec{a}; \vec{b}) = 3 \cdot 1 + 2 \cdot (-4) + (-1) \cdot 2 = -7$.

Таким образом, $(\vec{a}; \vec{b}) = -7$.

3 Из определения скалярного произведения $(\vec{a}; \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi$ получаем, что угол φ между векторами находится по формуле

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{a}; \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Тогда $(\vec{a}; \vec{b}) = -7$, $|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{14}$, $|\vec{b}| = \sqrt{1^2 + (-4)^2 + 2^2} = \sqrt{21}$,

$$\cos\varphi = \frac{-7}{\sqrt{14}\sqrt{21}} = -\frac{7}{\sqrt{294}}; \qquad \varphi = \arccos\left(-\frac{7}{\sqrt{294}}\right) = \pi - \arccos\frac{7}{\sqrt{294}}.$$

4 Векторное произведение векторов $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$ найдем по формуле

$$[\vec{a}; \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Для векторов $\vec{a} = (3;\, 2;\, -1), \vec{c} = (1;\, 3;\ \ 2)$ получим $[\vec{a}\,;\vec{c}\,] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$.

Вычислим определитель разложением по элементам первой строки:

$$[\vec{a}\,;\vec{c}\,] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \vec{k} = 7\vec{i} - 7\vec{j} + 7\vec{k}\,.$$

Таким образом, $[\vec{a}\,;\vec{c}\,] = 7\vec{i} - 7\vec{j} + 7\vec{k}\,.$

5 Смешанное произведение векторов $(x_1\,;y_1\,;z_1),\ \vec{b} = (x_2\,;y_2\,;z_2)$ и $\vec{c} = (x_3\,;y_3\,;z_3)$ вычислим по формуле

$$\left(\vec{a}\,;\vec{b}\,;\vec{c}\,\right) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Для данных векторов $\vec{a} = (3;\, 2;\, -1), \vec{b} = (1;\, -4;\, 2),\ \vec{c} = (1;\, 3;\, 2)$ получим

$$\left(\vec{a}\,;\vec{b}\,;\vec{c}\,\right) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -24 + (-3) + 4 - (4 + 18 + 4) = -49\,.$$

Таким образом, $\left(\vec{a}\,;\vec{b}\,;\vec{c}\,\right) = -49.$

Векторы $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}\,,\quad \vec{b} = \vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}\,, \vec{c} = \vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$ образуют левую тройку векторов (смешанное произведение $\left(\vec{a}\,;\vec{b}\,;\vec{c}\,\right) < 0$).

Пример 3 **–** Найти скалярное произведение векторов $\left(\vec{a} + 2\vec{b}\,\right)$ и $\left(3\vec{a} - \vec{b}\,\right)$, если $|\vec{a}| = 10\,, \left|\vec{b}\right| = 2$, $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi = \dfrac{2\pi}{3}$.

Решение

Используя свойства скалярного произведения векторов, получим

$$\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)\left(3\vec{a}-\vec{b}\right)=3\vec{a}^2+5\vec{a}\vec{b}-2\vec{b}^2=3\left|\vec{a}\right|^2+5\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cos\varphi-2\vec{b}^2=$$

$$=3\cdot100+5\cdot10\cdot2\cos\frac{2\pi}{3}-2\cdot4=242.$$

Пример 4 – Даны три вектора $\vec{p}=\left(3;2;4\right)$, $\vec{q}=\left(4;3;-5\right)$, $\vec{r}=\left(7;5;-2\right)$. Найти разложение вектора $\vec{a}=\left(4;3;2\right)$ по базису $\vec{p},\vec{q},\vec{r}$.

Решение

Вектор $\vec{a}$ можно представить и притом единственным образом в виде линейной комбинации векторов базиса $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$, а именно $\vec{a}=\alpha\vec{p}+\beta\vec{q}+\gamma\vec{r}$.

Так как векторы $\vec{a},\vec{p},\vec{q},\vec{r}$ заданы в некотором базисе $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$, то, применив к разложению вектора $\vec{a}$ правило линейных действий над векторами, получим

$$4\vec{e}_1+3\vec{e}_2+2\vec{e}_3=\alpha\left(3\vec{e}_1+2\vec{e}_2+4\vec{e}_3\right)+\beta\left(4\vec{e}_1+3\vec{e}_2-5\vec{e}_3\right)+\gamma\left(7\vec{e}_1+5\vec{e}_2-2\vec{e}_3\right)=$$

$$=\left(3\alpha+4\beta+7\gamma\right)e_1+\left(2\alpha+3\beta+5\gamma\right)e_2+\left(4\alpha-5\beta-2\gamma\right)e_3.$$

Для определения коэффициентов линейного разложения вектора $\vec{a}$ по базису $\vec{p},\vec{q},\vec{r}$ используем условие равенства двух векторов и получим систему линейных уравнений

$$\begin{cases}3\alpha+4\beta+7\gamma=4;\\2\alpha+3\beta+5\gamma=3;\\4\alpha-5\beta-2\gamma=2.\end{cases}$$

Ее решением являются следующие значения: $\alpha=7$; $\beta=8$; $\gamma=-7$. Значит, искомое разложение вектора $\vec{a}$ по базису $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ имеет вид $\vec{a}=7\vec{p}+8\vec{q}-7\vec{r}$.

Пример 5 – Даны вершины треугольника $A\left(2;3;-1\right)$, $B\left(4;1;-2\right)$, $C\left(1;0;2\right)$.

Найти:

1) внутренний угол треугольника ABC при вершине C;

2) проекцию вектора $\overrightarrow{CB}$ на вектор $\overrightarrow{CA}$.

Решение

1 Угол φ при вершине C есть угол между векторами $\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{CA}$. Определим координаты этих векторов: $\overrightarrow{CB}=(4-1;1-0;-2-2)=(3;1;-4)$; $\overrightarrow{CA}=(2-1;3-0;-1-2)=(1;3;-3)$.

Найдем скалярное произведение: $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}=3\cdot1+1\cdot3+(-4)\cdot(-3)=18$. Найдем модули этих векторов: $\left|\overrightarrow{CB}\right|=\sqrt{9+1+16}=\sqrt{26}$; $\left|\overrightarrow{CA}\right|=\sqrt{1+9+9}=\sqrt{19}$.

Тогда

$$\cos\varphi=\frac{\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}}{\left|\overrightarrow{CB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CA}\right|}=\frac{18}{\sqrt{26}\cdot\sqrt{19}}=\frac{18}{\sqrt{494}};\quad \varphi=\arccos\frac{18}{\sqrt{494}}.$$

2 Формулу для скалярного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ с углом φ между ними $(\vec{a};\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi$ можно записать иначе:

$$(\vec{a};\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot\text{пр}_{\vec{a}}\,\vec{b}\quad\text{или}\quad(\vec{a};\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{b}|\cdot\text{пр}_{\vec{b}}\,\vec{a}.$$

Тогда $\text{пр}_{\overrightarrow{CA}}\overrightarrow{CB}=\dfrac{\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}}{\left|\overrightarrow{CA}\right|}=\dfrac{18}{\sqrt{19}}$.

Пример 6 **–** Даны точки $A(5;1;-4)$, $B(1;2;-1)$, $C(3;3;-4)$, $S(2;2;2)$.
Требуется:
1) найти площадь треугольника ABC;
2) найти объем пирамиды $SABC$;
3) найти длину высоты, опущенной из вершины S на грань ABC;
4) доказать, что векторы $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SC}$, $\overrightarrow{SB}$ образуют базис в пространстве.

Решение

1 Площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}=(x_1;y_1;z_1)$ и $\vec{b}=(x_2;y_2;z_2)$, определяется через их векторное произведение по формуле

$$S_\Delta=\frac{1}{2}\left|[\vec{a};\vec{b}]\right|=\frac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|.$$

Найдем площадь треугольника ABC как площадь треугольника, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$: $S_{\Delta} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]\right|$.

Определим координаты векторов $\overrightarrow{AB} = (-4;1;3)$ и $\overrightarrow{AC} = (-2;2;0)$ и найдем их векторное произведение:

$$\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}\vec{k} = -6\vec{i} - 6\vec{j} - 6\vec{k}.$$

Длина (модуль) вектора $\left|\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]\right| = \sqrt{36+36+36} = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$.

Тогда

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]\right| = \frac{1}{2}\cdot 6\sqrt{3} = 3\sqrt{3}.$$

2 Объем треугольной пирамиды, построенной на векторах $\vec{a} = (x_1;y_1;z_1)$, $\vec{b} = (x_2;y_2;z_2)$, $\vec{c} = (x_3;y_3;z_3)$, находится по формуле

$$V = \frac{1}{6}\cdot\left|\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)\right|,$$

где $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$ – смешанное произведение векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$.

Найдем объем пирамиды, используя векторы $\overrightarrow{AS}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ с координатами $\overrightarrow{AS} = (-3;1;6)$, $\overrightarrow{AB} = (-4;1;3)$, $\overrightarrow{AC} = (-2;2;0)$.

Смешанное произведение этих векторов

$$\left(\overrightarrow{AS},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 6 \\ -4 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -48 - 6 + 12 + 18 = -24.$$

Значит, объем пирамиды $V_{SACB} = \frac{1}{6}\cdot\left|-24\right| = \frac{24}{6} = 4$.

3 Так как объем пирамиды $V = \frac{1}{3}S_{ABC}\cdot H$, то $H = \frac{3V}{S_{ABC}} = \frac{3\cdot 4}{3\cdot\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

4 Три вектора образуют базис в пространстве, если эти векторы некомпланарны, т. е. их смешанное произведение не равно нулю. Найдем смешанное

произведение векторов $\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SC}, \overrightarrow{SB}$, определив их координаты: $\overrightarrow{SA} = (2-5; 2-1; 2-(-4)) = (-3; 1; 6)$, $\overrightarrow{SC} = (2-3; 2-3; 2-(-4)) = (-1; -1; 6)$ и $\overrightarrow{SB} = (2-1; 2-2; 2-(-1)) = (1; 0; 3)$.

$$\left(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SC}, \overrightarrow{SB}\right) = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 6 \\ -1 & -1 & 6 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 9 + 0 + 6 - (-6) - 0 - (-3) = 9 + 6 + 6 + 3 = 24 \neq 0.$$

Значит, векторы $\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SC}, \overrightarrow{SB}$ некомпланарны, они образуют базис в пространстве.

3 Прямая на плоскости

Пример 1 – Даны вершины треугольника $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2), C(x_3; y_3)$.
Найти:
1) уравнение стороны AB треугольника, если $A(-2; 3), B(2; 8), C(10; 3)$;
2) уравнение высоты CH, если $A(-2; -2), B(1; 7), C(11; 3)$;
3) уравнение медианы AM и ее длину, если $A(-3; -1), B(3; 2), C(4; -7)$;
4) угол φ при вершине A, если $A(2; -2), B(6; 7), C(-4; 5)$;
5) уравнение прямой, проходящей через вершину C параллельно стороне AB, если $A(-2; -2), B(1; 7), C(11; 3)$.

Решение

1 Уравнение прямой, проходящей через две точки $M(x_1; y_1)$ и $N(x_2; y_2)$, имеет вид:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Тогда $\dfrac{x+2}{4} = \dfrac{y-3}{5}$; $5x - 4y + 22 = 0 -$ уравнение прямой (стороны) AB.

2 Уравнение высоты CH получим как уравнение прямой, проходящей через точку $M(x_0; y_0)$ параллельно вектору $\vec{s}(a_1; a_2)$, т. е.

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2}.$$

Так как $C(11;3) \in CH$, $CH \perp AB$, то нормальный вектор $\vec{n}_{AB} = (3;-1)$ является направляющим вектором прямой CH, т. е. имеет вид $\vec{s}_{CH} = (3;-1)$. Следовательно, получаем уравнение высоты $\dfrac{x-11}{3} = \dfrac{y-3}{-1}$.

Преобразовав его, получим уравнение высоты CH: $x + 3y - 20 = 0$.

3 Так как AM – медиана, то точка M делит отрезок BC пополам, т. е. является его серединой. Координаты середины отрезка находятся по формулам

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2};\; y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Тогда для точек B и C получим $x_M = \dfrac{3+4}{2}$; $y_M = \dfrac{-7+2}{2}$; $M\left(\dfrac{7}{2}; -\dfrac{5}{2}\right)$.

Длина медианы треугольника находится как расстояние между двумя точками, заданными своими координатами $A_1(x_1; y_1)$ и $A_2(x_2; y_2)$, по формуле $d(A_1; A_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

$$|AM| = d(A;M) = \sqrt{\left((-3) - \frac{7}{2}\right)^2 + \left((-1) - \left(-\frac{5}{2}\right)\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(-\frac{13}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{169}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{178}{4}} = \frac{\sqrt{178}}{2}.$$

4 Угол φ при вершине A есть угол между сторонами AB и AC. Запишем уравнения этих сторон как сторон, проходящих через точки $A_1(x_1; y_1)$ и $A_2(x_2; y_2)$, и учтем, что $k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ – угловой коэффициент прямой.

Получим

$$(AB)\; \frac{x-2}{6-2} = \frac{y+2}{7+2};\; \frac{x-2}{4} = \frac{y+2}{9}.$$

Значит, $\dfrac{y+2}{x-2} = \dfrac{9}{4}$, $k_1 = \dfrac{9}{4}$.

$$(AC)\; \frac{x-2}{-4-2} = \frac{y+2}{5+2};\; \frac{x-2}{-6} = \frac{y+2}{7}.$$

Значит, $\dfrac{y+2}{x-2}=\dfrac{7}{-6}$, $k_2=-\dfrac{7}{6}$.

Так как угол между прямыми находится по формуле $\operatorname{tg}\varphi=\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$, то

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{-\frac{7}{6}-\frac{9}{4}}{1+\left(-\frac{7}{6}\right)\cdot\frac{9}{4}}=\frac{-\frac{41}{12}}{-\frac{39}{24}}=\frac{41\cdot 24}{12\cdot 39}=\frac{82}{39};\quad \varphi=\operatorname{arctg}\frac{82}{39}.$$

5 Прямая CL, проходящая через точку $C(11;3)$ параллельно прямой AB, имеет тот же нормальный вектор, что и прямая AB, т. е. $\vec{n}_{AB}=\vec{n}_{CL}=(3;-1)$.

Уравнение прямой, проходящей через точку с координатами $(x_0;y_0)$ перпендикулярно нормальному вектору $\vec{n}=(A;B)$, имеет вид $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$.

Тогда $3(x-11)-1(y-3)=0$, или $3x-y-30=0-$ уравнение прямой CL.

Пример 2 – В треугольнике с вершинами $A(2;3), B(6;3), C(6;-5)$ найти уравнение биссектрисы BM и ее длину.

Решение

Найдем длины сторон BC и BA: $|BC|=\sqrt{(6-6)^2+(-5-3)^2}=8$; $|BA|=\sqrt{(2-6)^2+(3-3)^2}=4$.

Для составления уравнения биссектрисы BM необходимо знать координаты точки M.

По свойству биссектрисы внутреннего угла треугольника имеем $\dfrac{|CM|}{|MA|}=\dfrac{|BC|}{|BA|}=2$, т. е. точка M делит сторону AC в отношении $\lambda=2$.

Так как координаты $(x;y)$ точки M, делящей отрезок AB в заданном отношении λ, где $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$, находятся по формулам

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda};\qquad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},$$

то для точки M имеем $x_M=\dfrac{6+2\cdot 2}{1+2}=\dfrac{10}{3}$; $y_M=\dfrac{-5_1+2\cdot 3}{1+2}=\dfrac{1}{3}$, т. е. $M\left(\dfrac{10}{3};\dfrac{1}{3}\right)$.

Составим уравнение биссектрисы BM и найдем ее длину:

$$\frac{x-6}{\frac{10}{3}-6}=\frac{y-3}{\frac{1}{3}-3},$$

откуда $x-y-3=0$; $|BM|=\sqrt{\left(\frac{10}{3}-6\right)^2+\left(\frac{1}{3}-3\right)^2}=\frac{8\sqrt{2}}{3}$.

Пример 3 – Найти расстояние между параллельными прямыми $3x+4y-20=0$ и $6x+8y+5=0$.

Решение

Возьмем на одной из данных параллельных прямых, например, на первой, произвольную точку A. Пусть для этой точки $x=0$, тогда $y=5$, т. е. $A(0;5)$. Искомое расстояние между указанными параллельными прямыми равно расстоянию от точки $A(0;5)$ до второй прямой.

Так как расстояние d от некоторой точки $M(x_0;y_0)$ до прямой $Ax+By+C=0$ определяется по формуле

$$d=\left|\frac{Ax_0+By_0+C=0}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|,$$

то для параллельных прямых $3x+4y-20=0$ и $6x+8y+5=0$ оно определяется следующим образом:

$$d=\left|\frac{6\cdot 0+8\cdot 5+5=0}{\sqrt{6^2+8^2}}\right|=4{,}5.$$

Пример 4 – Найти точку M пересечения прямых $l_1: x-2y+2=0$ и $l_2: 5x+2y+4=0$.

Решение

Точка пересечения прямых является их общей точкой, значит, ее координаты удовлетворяют уравнению l_1 и уравнению l_2, т. е. они находятся как решение системы уравнений

$$\begin{cases} x-2y+2=0; \\ 5x+2y+4=0. \end{cases}$$

Решая ее способом подстановки или способом алгебраического сложения, получим, что $x=-1,\ y=\dfrac{1}{2}$. Таким образом, $M\left(-1;\dfrac{1}{2}\right)$.

4 Плоскость и прямая в пространстве

Пример 1 – Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2;3;-4)$ и параллельной векторам $\vec{a}=(-3;2;-1)$ и $\vec{b}=(0;3;1)$.

Решение

Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2;3;-4)$, записывается уравнением $A(x-2)+B(y-2)+C(z+4)=0$. Найдем коэффициенты A, B, C.

Так как искомая плоскость параллельна векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, то в качестве ее нормального вектора $\vec{n}=(A;B;C)$ можно взять вектор $\vec{n}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]$. Этот вектор находится по формуле

$$\vec{n}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}.$$

Подставим координаты векторов и раскроем определитель. Получим

$$\vec{n}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -3 & 2 & -1\\ 0 & 3 & 1\end{vmatrix}=2\vec{i}-9\vec{k}++2\vec{i}+3\vec{j}-9\vec{k}=5\vec{i}+3\vec{j}-9\vec{k}.$$

Таким образом, $A=5,\quad B=3,\quad C=-9$. Искомое уравнение плоскости есть $5(x-2)+3(y-2)-9(z+4)=0$, т. е. $5x+3y-9z-55=0$.

Пример 2 – Даны четыре точки $A(2;\,3;\,5)$, $B(5;\,3;\,-7)$, $C(1;\,2;\,7)$, $D(4;\,2;\,0)$. Найти:

1) уравнения прямых AD, BC, BD и указать их направляющие векторы;

2) величины углов, образованных прямой AD с координатными осями;

3) угол между прямыми AD и BC;

4) уравнение плоскости ABC и указать ее нормальный вектор;

5) уравнение прямой, проходящей через точку D перпендикулярно плоскости ABC;

6) уравнение плоскости, проходящей через точку C перпендикулярно прямой AD;

7) синус угла между прямой AD и плоскостью ABC;

8) косинус угла между координатной плоскостью xOy и плоскостью ABC;

9) уравнение плоскости α, параллельной прямой BD, и проходящей через точки A и C;

10) расстояние от точки D до плоскости ABC.

Решение

1 Канонические уравнения прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$, где $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$, $z_1 \neq z_2$, имеют вид:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Тогда $\frac{x-2}{4-2} = \frac{y-3}{2-3} = \frac{z-5}{0-5}$ или $\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-5}{-5}$ – уравнение прямой AD; $\vec{s}_1 = (2; -1; -5)$ – направляющий вектор прямой AD.

Аналогично получаем $\frac{x-5}{-4} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+7}{14}$ – уравнение прямой BC; $\vec{s}_2 = (-4; -1; 14)$ – направляющий вектор прямой BC; $\frac{x-5}{-1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+7}{7}$ – уравнение прямой BD; $\vec{s}_3 = (-1; -1; 7)$ – направляющий вектор прямой BD.

2 Направление прямой задает ее направляющий вектор. Углы α, β и γ, образованные эти вектором соответственно с координатными осями Ox, Oy и Oz, находятся по формулам

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}; \quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}; \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}.$$

Так как для направляющего вектора $\vec{s}_1 = (2; -1; -5)$ прямой AD его модуль $|\vec{s}_1| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-5)^2} = \sqrt{30}$, то косинусы углов

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{|30|}}; \ \cos\beta = \frac{-1}{\sqrt{|30|}}; \ \cos\gamma = \frac{-5}{\sqrt{|30|}}.$$

3 Косинус угла между прямыми находится по формуле

$$\cos\varphi = \frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}.$$

Значения $m_1; n_1; p_1$ и $m_2; n_2; p_2$ являются координатами направляющих векторов прямых: $\vec{s}_1 = (m_1; n_1; p_1)$ и $\vec{s}_2 = (m_2; n_2; p_2)$.

Для данных прямых AD и BC $\vec{s}_1 = \overrightarrow{AD} = (2; -1; -5)$ и $\vec{s}_2 = \overrightarrow{BC}\,(-4; -1; 14)$, тогда

$$\cos\varphi = \frac{-8+1-70}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-5)^2}\sqrt{(-4)^2+(-1)^2+14^2}} = \frac{-77}{\sqrt{30}\sqrt{213}} = \frac{-77}{3\sqrt{710}};$$

$$\varphi = \arccos\left(\frac{-77}{3\sqrt{710}}\right) = \pi - \arccos\frac{77}{3\sqrt{710}}.$$

4 Уравнение плоскости, проходящей через точки $P_1(x_{1;}; y_{1;}; z_1)$, $P_2(x_{2;}; y_{2;}; z_2)$ и $P_3(x_{3;}; y_{3;}; z_3)$, имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Тогда

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-5 \\ 5-2 & 3-3 & -7-5 \\ 1-2 & 2-3 & 7-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-5 \\ 3 & 0 & -12 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

или $-3(z-5)+12(y-3)-12(x-2)-6(y-3)=0$, $4x-2y+z-7=0$.

Таким образом, $4x-2y+z-7=0$ – общее уравнение плоскости ABC, а вектор $\vec{n} = (4; -2; 1)$ – нормальный вектор плоскости ABC.

5 Уравнение прямой, проходящей через точку D перпендикулярно плоскости ABC, имеет вид:

$$\frac{x-x_4}{A} = \frac{y-y_4}{B} = \frac{z-z_4}{C},$$

где $\vec{n} = (A; B; C) = (4; -2; 1)$. Следовательно, $A = 4, B = -2, C = 1$.

Тогда каноническое уравнение искомой прямой имеет вид:

$$\frac{x-4}{4}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z}{1}.$$

6 Так как искомая плоскость перпендикулярна прямой AD, то направляющий вектор этой прямой является нормальным вектором плоскости. Значит, $\vec{n}=\vec{s}_1=(2;-1;-5)$ – нормальный вектор плоскости.

Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0\left(x_0;\,y_0;\,z_0\right)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}=\left(A;\,B;\,C\right)$, имеет вид:

$$A\left(x-x_0\right)+B\left(y-y_0\right)+C\left(z-z_0\right)=0.$$

Следовательно, искомое уравнение $2(x-1)-1(y-2)-5(z-7)=0$ или $2x-y-5z+35=0$.

7 Синус угла между прямой и плоскостью находится по формуле

$$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Значения $A;B;C$ являются координатами нормального вектора $\vec{n}$ плоскости, $\vec{n}=(A;B;C)$; значения $m;n;p$ определяют направляющий вектор $\vec{s}$ прямой, $\vec{s}=(m;\,n;\,p)$.

Для плоскости ABC $\vec{n}=(A;\,B;\,C)=(4;\,-2;\,1)$; для прямой AD $\vec{s}=(m;\,n;\,p)=(2;\,-1;\,-5)$.

Тогда получим

$$\sin\varphi=\frac{|4\cdot2+(-2)\cdot(-1)+1\cdot(-5)|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-5)^2}\sqrt{4^2+(-2)^2+1^2}}=\frac{5}{\sqrt{30\cdot21}}=\frac{5}{3\sqrt{70}}.$$

8 Угол φ между плоскостями $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ с нормальными векторами $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ соответственно определяется по формуле

$$\cos\varphi=\frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

Нормальный вектор плоскости – это любой ненулевой вектор, лежащий на прямой, перпендикулярной к данной плоскости. На координатной прямой Oz, перпендикулярной плоскости xOy, лежит единичный вектор $\vec{k}$. Значит, для координатной плоскости xOy нормальным вектором является вектор $\vec{n}_1 = (0;0;1)$. Для плоскости ABC нормальный вектор имеет вид $\vec{n}_2 = (4;-2;1)$. Тогда

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{0 \cdot 4 + 0 \cdot (-2) + 1 \cdot 1}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}\sqrt{4^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{21}}.$$

9 Уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(x_1;\, y_1;\, z_1)$ и $M_2(x_2;\, y_2;\, z_2)$, и параллельной прямой $\vec{a} = (a_x;\, a_y;\, a_z)$ имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = 0.$$

Так как искомая плоскость проходит через точки $A(2;3;5)$, $C(1;2;7)$ и параллельна вектору $\overrightarrow{BD} = (-1;-1;7)$, то

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-5 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 7 \end{vmatrix} = 0.$$

Тогда $-7(x-2) + (z-5) - 2(y-3) - (z-5) + 7(y-3) + 2(x-2) = 0.$

Преобразовав последнее уравнение, получим $-5x + 5y - 5 = 0 -$ уравнение плоскости α. Его можно упростить: $x - y + 1 = 0$.

10 Расстояние от точки $M_0(x_0;\, y_0;\, z_0)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ находится по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Так как $D(4;2;0)$ и плоскость ABC $4x - 2y + z - 7 = 0$, то находим расстояние:

$$d = \frac{|4 \cdot 4 + (-2) \cdot 2 + 1 \cdot 0 - 7|}{\sqrt{4^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{|5|}{\sqrt{21}} = \frac{5}{\sqrt{21}}.$$

5 Кривые второго порядка на плоскости

Общее уравнение кривых второго порядка имеет вид:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \text{, где } A^2 + B^2 + C^2 \neq 0.$$

К кривым линиям второго порядка относятся окружность, эллипс, гипербола и парабола.

Окружностью называется множество точек плоскости, равноудаленных от одной и той же точки – центра окружности.

Каноническое уравнение окружности имеет вид $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$, где a и $b-$ координаты центра окружности, $R-$ радиус окружности.

Пример 1 – Доказать, что уравнение $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 4$ является уравнением окружности. Найти ее центр и радиус.

Решение

Заданное уравнение приведем к виду $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$. Сгруппируем слагаемые: $(x^2 - 4x) + (y^2 + 2y) - 4 = 0$. Дополним выражения в скобках до квадрата разности и суммы: $(x^2 - 4x + 4) - 4 + (y^2 + 2y + 1) - 1 - 4 = 0$, получим уравнение $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$. Кривая является окружностью с центром $O(2;-1)$ и радиусом $R = 3$.

Эллипсом называется множество точек плоскости, сумма расстояний каждой из которых от двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, равная $2a$ (рисунок 3).

Каноническое уравнение эллипса имеет вид $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, где a и b – полуоси эллипса. Число a называется большой полуосью эллипса, число b – малой полуосью эллипса. $F_1(-c;0), F_2(c;0)-$ фокусы. Между a, b и c существует соотношение $a^2 - b^2 = c^2$. Эксцентриситет эллипса есть отношение $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$.

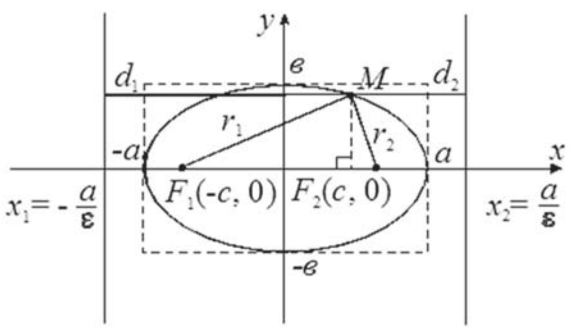

Рисунок 3

Пример 2 – Найти координаты фокусов эллипса и его эксцентриситет, если уравнение эллипса имеет вид $\frac{x^2}{7}+\frac{y^2}{2}=1$.

Решение

Уравнение имеет канонический вид, $a^2=7$, $b^2=2$, $c^2=a^2-b^2=5$. Тогда $c_{1,2}=\pm\sqrt{5}$, значит, $F_1\left(-\sqrt{5};0\right)$, $F_2\left(\sqrt{5};0\right)$. Эксцентриситет $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}=\sqrt{\frac{5}{7}}$.

Пример 3 – Доказать, что уравнение $2x^2+3y^2-60=0$ является уравнением эллипса. Найти оси, фокусы и эксцентриситет этого эллипса.

Решение

Приведем уравнение к каноническому виду:

$$2x^2+3y^2-60=0;$$

$$\frac{2x^2}{60}+\frac{3y^2}{60}=1;$$

$$\frac{x^2}{30}+\frac{y^2}{20}=1.$$

Тогда $a=\sqrt{30}$ – большая полуось, $b=\sqrt{20}$ – малая полуось.

Найдем координаты фокусов: $c^2=a^2-b^2$, $c=\sqrt{30-20}=\sqrt{10}$, $F_1\left(-\sqrt{10};0\right)$, $F_2\left(\sqrt{10};0\right)$. Эксцентриситет $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{30}}=\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Гиперболой называется множество всех точек плоскости, для которых модуль разности расстояний от двух точек, называемых фокусами, есть величина постоянная и меньшая, чем расстояние между фокусами (рисунок 4).

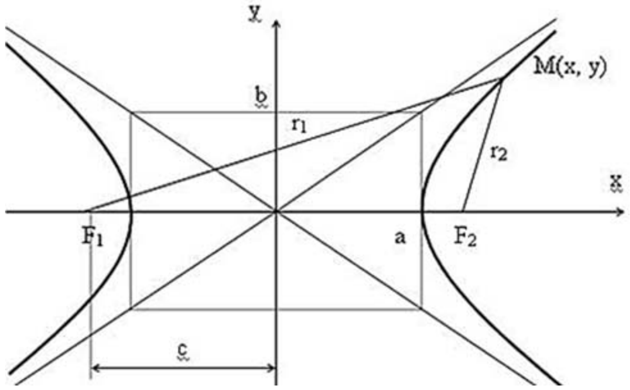

Рисунок 4

Каноническое уравнение гиперболы имеет вид $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. Число a называется действительной полуосью, число b – мнимой полуосью. Между a, b и c существует соотношение $c^2-a^2=b^2$. Эксцентриситетом гиперболы называется отношение $\varepsilon=\frac{c}{a}>1$. Эта величина характеризует форму гиперболы. Гипербола имеет две асимптоты $y=\pm\frac{b}{a}x$.

Пример 4 – Составить каноническое уравнение гиперболы, если $2a=14$.

Решение

Так как $2a=14$, то $a=7$. Из равенства $\varepsilon=\frac{c}{a}$ найдем $c=\varepsilon\cdot a=\frac{9}{7}\cdot 7=9$. Тогда $b^2=c^2-a^2=81-49=32$. Уравнение гиперболы имеет вид $\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{32}=1$.

Пример 5 – Доказать, что уравнение $2x^2-5y^2-10=0$ является уравнением гиперболы. Найти оси, фокусы, эксцентриситет и уравнения асимптот.

Решение

Приведем уравнение к каноническому виду:

$$2x^2-5y^2-10=0;$$

$$2x^2-5y^2=10;$$

$$\frac{2x^2}{10}-\frac{5y^2}{10}=1;$$

$$\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{2}=1.$$

Из канонического уравнения данной гиперболы $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{2}=1$ получаем, что $a=\sqrt{5}-$ действительная полуось, $b=\sqrt{2}-$ мнимая полуось.

Так как $c^2=b^2+a^2$, то $c=\sqrt{5+2}=\sqrt{7}$. Тогда $F_1\left(-\sqrt{7};0\right)$, $F_2\left(\sqrt{7};0\right)-$ фокусы гиперболы. Эксцентриситет гиперболы $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}=\sqrt{\frac{7}{5}}$.

Асимптоты имеют уравнения $y=\pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}x$.

Параболой называется множество точек плоскости, каждая из которых одинаково удалена от данной точки F, называемой фокусом, и от данной прямой, не проходящей через данную точку, называемой директрисой (рисунок 5).

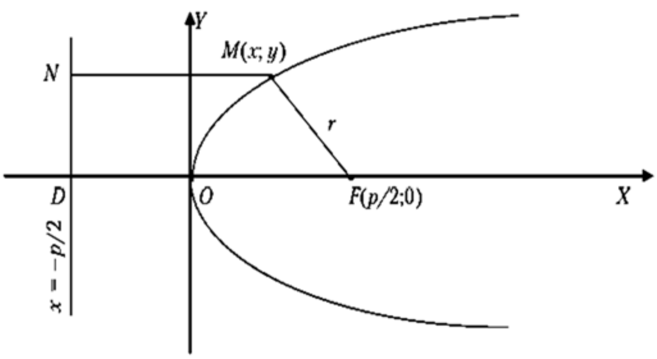

Рисунок 5

Каноническое уравнение параболы имеет вид $y^2=2px$, где $p-$ расстояние от фокуса до директрисы. Фокус параболы имеет координаты $F\left(\frac{p}{2};0\right)$. Директриса параболы определяется уравнением $x=-\frac{p}{2}$. Расстояние r от любой точки $M(x;y)$ параболы до фокуса определяется формулой $r=\frac{p}{2}+x$. Для каждой из точек параболы расстояние до фокуса равно расстоянию до директрисы.

Пример 6 – Найти координаты фокуса и уравнение директрисы параболы $y^2=5x$.

Решение

Так как уравнение параболы имеет вид $y^2=2px$, то запишем уравнение $y^2=5x$ в виде $y^2=2\cdot\left(\frac{5}{2}\right)x$, тогда $p=\frac{5}{2}$. Уравнение директрисы $x=-\frac{p}{2}=-\frac{5}{4}$.

Координаты фокуса $F\left(\frac{p}{2};0\right)=F\left(\frac{5}{4};0\right)$.

6 Линейные операторы

Если в линейном пространстве V каждому вектору $\vec{v}$ по некоторому правилу A поставлен в соответствие вектор $\vec{u}$ этого же пространства, то говорят, что в данном пространстве задана векторная функция векторного аргумента: $\vec{u}=A(\vec{v})$ или $\vec{u}=A\vec{v}$.

Эта функция называется линейным преобразованием, если для неё выполнены свойства линейности:

$$1\ A(\vec{v}+\vec{w})=A(\vec{v})+A(\vec{w});$$
$$2\ A(\lambda\vec{v})=\lambda A(\vec{v}),\ \lambda\in R.$$

Линейное преобразование также называют *линейным оператором*.

Пример 1 – Доказать, что функция векторного аргумента $A(\vec{v})=2\vec{v}$ является линейным преобразованием.

Решение

Доказательство состоит в проверке свойств линейности:

$$A(\vec{v}+\vec{w}) = 2(\vec{v}+\vec{w}) = 2\vec{v}+2\vec{w} = A(\vec{v})+A(\vec{w});$$

$$A(\lambda\vec{v}) = 2(\lambda\vec{v}) = (2\lambda)\vec{v} = (\lambda\cdot 2)\vec{v} = \lambda\cdot(2\vec{v}) = \lambda A(\vec{v}).$$

Таким образом, $A(\vec{v}) = 2\vec{v}$.

Если задан какой-либо базис, то линейное преобразование удобнее представить в матричном виде. Для записи оператора в виде матрицы применяется *общее правило*: чтобы записать матрицу линейного преобразования в n-мерном базисе $(\vec{e}_1;\vec{e}_2;\vec{e}_3;\ldots;\vec{e}_n)$, нужно *последовательно и строго по порядку* применять данный оператор к базисным векторам, а результаты заносить в *столбцы* матрицы (*слева направо*).

Применим линейное преобразование $A(\vec{v}) = 2\vec{v}$ к первому базисному вектору $\vec{i}$. $A(\vec{i}) = 2\cdot(1;0) = (2;0)$. Запишем результат в первый столбец: $A = \begin{pmatrix} 2 & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$.

Для второго базисного вектора $\vec{j}$ получим $A(\vec{j}) = 2\cdot(0;1) = (0;2)$ и запишем полученные координаты во второй столбец: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Матрица A является матрицей линейного преобразования $A(\vec{v}) = 2\vec{v}$ в базисе $(\vec{i};\vec{j})$.

Так как любая точка плоскости $M(x_0;y_0)$ однозначно определяется ее радиус-вектором $\overrightarrow{OM}(x_0;y_0)$, где O – начало координат, то матрица преобразования применима и к координатам точек.

Например, точка $M(1;-5)$ при применении линейного преобразования $A(\vec{v}) = 2\vec{v}$ переходит в точку $M'(2;-10)$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1+0\cdot(-5) \\ 0\cdot 1+2\cdot(-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -10 \end{pmatrix}.$$

Пример 2 – В аффинном базисе задано линейное преобразование $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Найти образ точки $M(-3;2)$ и, используя обратное преобразование, выполнить проверку.

Решение

Исходная точка $M\left(x_0;y_0\right)$ является прообразом точки $M'\left(x_0';y_0'\right)$, которая должна получиться. Ее называют образом. Найдем x_0' и y_0'.

$$\begin{pmatrix} x_0' \\ y_0' \end{pmatrix} = A\cdot\begin{pmatrix} x_0 \\ x_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, линейное преобразование перевело точку $M\left(-3;2\right)$ в точку $M'\left(-3;1\right)$.

Одно и то же линейное преобразование в разных базисах в общем случае имеет разные матрицы.

Пример 3 – В базисе $\left(\vec{e}_1;\vec{e}_2\right)$ задано линейное преобразование $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Найти матрицу данного преобразования в базисе $\left(e_1';e_2'\right)$, если $\begin{cases} \vec{e}_1' = -2\vec{e}_1' + 5\vec{e}_2; \\ \vec{e}_2' = -\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2. \end{cases}$

Решение

Составим матрицу T перехода от базиса $\left(\vec{e}_1;\vec{e}_2\right)$ к базису $\left(e_1';e_2'\right)$. Коэффициенты разложения вектора $\vec{e}_1$ записываем в первый столбец, а коэффициенты разложения вектора $\vec{e}_2$ – во второй. Получаем матрицу $T = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

Для нахождения матрицы данного преобразования в новом базисе используем формулу $A' = T^{-1}\cdot A\cdot T$.

Находим обратную матрицу для матрицы T: $T^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$.

Находим произведение матриц $T^{-1}A$. Получим

$$T^{-1}A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}.$$

Находим матрицу рассматриваемого линейного преобразования в новом базисе:

$$A' = T^{-1}\cdot A\cdot T = \left(T^{-1}\cdot A\right)\cdot T = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -10 & -3 \end{pmatrix}.$$

7 Задания для самостоятельной работы

1 Найти матрицу $AB-3B,$ если $A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 3\\ 2 & 1 & 5\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}5 & 2 & 1\\ 4 & 3 & 2\\ 2 & 1 & 5\end{pmatrix}.$

Ответ: $\begin{pmatrix}12 & 11 & 21\\ 12 & 3 & 23\\ 19 & 10 & -3\end{pmatrix}.$

2 Вычислить определитель третьего порядка $\begin{vmatrix}4 & -5 & 7\\ 1 & -4 & 9\\ -4 & 1 & 5\end{vmatrix}.$

3 Вычислить определитель четвертого порядка $\begin{vmatrix}3 & -3 & -5 & 8\\ -3 & 2 & 4 & -6\\ 2 & -5 & -7 & 5\\ -4 & 3 & 5 & -6\end{vmatrix}.$

4 Найти матрицу, обратную матрице $A=\begin{pmatrix}4 & -5 & 7\\ 1 & -4 & 9\\ -4 & 0 & 5\end{pmatrix}.$ Сделать проверку.

Ответ: $A^{-1}=\dfrac{1}{13}\begin{pmatrix}-20 & 25 & -17\\ -41 & 48 & -29\\ -16 & 20 & -11\end{pmatrix}.$

5 Найти ранг матрицы $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3 & 0\\ 1 & 4 & 2 & 1\\ 3 & 2 & 2 & 6\\ 8 & 5 & 7 & 12\end{pmatrix}$ методом элементарных преобразований.

6 Решить по формулам Крамера системы линейных алгебраических уравнений:

а) $\begin{cases}2x_1+2x_2-x_3=3;\\ -4x_1+x_2+x_3=4;\\ 4x_1-3x_2+2x_3=5.\end{cases}$ б) $\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=6;\\ 4x_1+5x_2+6x_3=9;\\ 7x_1+8x_2 \qquad =-6.\end{cases}$

Ответ: а) $(1;3;5)$; б) $(-2;1;2)$

7 Решить методом Гаусса системы линейных алгебраических уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} 8x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 18; \\ -7x_1 - 4x_2 - 4x_3 = -11; \\ -6x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -15. \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2; \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2; \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 8. \end{cases}$$

Ответ: а) $(5;-1;-5)$; б)$(1;2;3)$.

8 Решить матричным способом, записав систему в матричной форме, системы линейных алгебраических уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 6; \\ x_1 + 5x_2 - 0x_3 = -3. \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2; \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 = 14; \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases}$$

Ответ: $(2; 1; -1)$; $(2; -5; 3)$.

9 Даны векторы $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$, $\vec{b} = y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$, $\vec{c} = x_3\vec{i} + y_3 j + z_3\vec{k}$.

Найти:

а) координаты вектора $\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$, если $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$, $\vec{b} = -3\vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} + j - \vec{k}$;

б) разложение вектора $\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}$ по базису $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, если $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{b} = 6\vec{i} - 3\vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} + j - \vec{k}$;

в) направляющие косинусы вектора $\vec{n} = 4\vec{i} + 4j - 4\sqrt{2}\,\vec{k}$.

Ответ: а) $\left(3; \frac{11}{2}; 0\right)$; б) $\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c} = 6\vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k}$; в) $\cos\alpha = \frac{1}{2}, \cos\beta = \frac{1}{2}$, $\cos\gamma = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

10 Даны векторы $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$, $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$, $\vec{c} = x_3\vec{i} + y_3\vec{j} + z_3\vec{k}$.

Найти:

а) длину вектора $2\vec{a} + \vec{b} - 3\vec{c}$, если $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$;

б) скалярное произведение векторов $\vec{a} = 4\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$ и $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$;

в) угол между векторами $\vec{a} = 3\vec{i} + 4j + 5\vec{k}$ и $\vec{b} = 4\vec{i} - 5j + 3\vec{k}$;

г) векторное произведение векторов $\vec{a} = -4\vec{i} - 8j + 8\vec{k}$ и $\vec{b} = 4\vec{i} + 3j + 2\vec{k}$ и синус угла между ними;

д) смешанное произведение $\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$ и $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{c}$ векторов $\vec{a} = 3\vec{i} + j + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + 7j + 4\vec{k}$ и $\vec{c} = \vec{i} + 2j + \vec{k}$.

Ответ: а) $\sqrt{133}$; б) 3; в) $\varphi = \arccos\dfrac{7}{50}$; г) $(-40; 40; 20), \dfrac{5}{\sqrt{29}}$; д) $\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) =$
$= -46i + 29\vec{j} - 12\vec{k}$, $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{c} = -7i + 7\vec{j} + 7\vec{k}$.

11 Найти скалярное произведение векторов $\vec{c} = -2\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$, если $|\vec{a}| = 4\sqrt{2}$, $|\vec{b}| = 8$ и векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$.

Ответ: $\left(\vec{c}; \vec{d}\right) = -32$.

12 Даны три вектора $\vec{p} = (3; -2; 1)$, $\vec{q} = (-1; 1; -2)$, $\vec{r} = (2; 1; -3)$.

Найти разложение вектора $\vec{a} = (11; -6; 5)$ по базису $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$.

Ответ: $\vec{a} = (2; -3; 1)$.

13 Даны вершины треугольника $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$, $C(x_3; y_3; z_3)$.

Найти:

а) длины сторон треугольника и внутренние углы, если $A(1; 1; -1)$, $B(2; 3; 1)$, $C(3; 2; 1)$;

б) проекцию вектора $\vec{a} + \vec{b}$ на вектор $\vec{c}$, если $\vec{a} = (3; -6; -1)$, $\vec{b} = (1; 4; -5)$, $\vec{c} = (3; -4; 12)$.

Ответ: а) $3, 3, \sqrt{2}$; $\approx 76^\circ, \approx 76^\circ, \approx 27^\circ$; б) –4.

14 Даны точки $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$, $C(x_3; y_3; z_3)$, $D(x_4; y_4; z_4)$.

Требуется:

а) найти площадь треугольника ABC, если $A(1; 2; 3)$, $B(-2; 4; 1)$, $C(7; 6; 3)$, $D(4; -3; -1)$;

б) найти объем пирамиды с вершинами в точках $A(0; 0; 1)$, $B(2; 3; 5)$, $C(6; 2; 3)$, $D(3; 7; 2)$;

в) вычислить длину высоты, опущенной из вершины A на грань BCD, если точки $A(-5; -4; 8)$, $B(2; 3; 1)$, $C(4; 1; 2)$, $D(6; 3; 7)$ являются вершинами пирамиды;

г) определить, образуют ли векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ базис в пространстве.

Ответ: а) 14; б) 20; в) 11; г) образуют.

15 Даны вершины треугольника $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$.

Найти:

а) уравнения сторон треугольника, если $A(4; 6)$, $B(-4; 0)$, $C(-1; 4)$;

б) уравнение высоты BH, если $A(-3; 2)$, $B(5; -2)$, $C(0; 4)$;

в) уравнение медианы AM и ее длину, если $A(2; -2)$, $B(3; 5)$, $C(6; 1)$;

г) найти угол φ при вершине A, если $A(-1; 3)$, $B(3; -2)$, $C(5; 3)$;

д) уравнение прямой, проходящей через вершину параллельно стороне AB, если $A(-3; -1)$, $B(3; 2)$, $C(4; -3)$.

Ответ: а) $-3x+4y-12=0, 2x-y-2=0, 4x+3y+16=0$; б) $3x+2y-11=0$; в) $2x-y-6=0$, $\frac{5\sqrt{5}}{2}$; г) $\arccos\frac{4\sqrt{41}}{41}$; д) $x-2y-10=0$.

16 Составить уравнение биссектрисы внутреннего угла A треугольника ABC с вершинами $A(1;-2), B(5;4), C(-2;0)$.

Ответ: $5x+y-3=0$.

17 Найти расстояние между параллельными прямыми $3x-4y-10=0$ и $3x-4y-25=0$.

18 Даны четыре точки $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$, $C(x_3; y_3; z_3)$, $D(x_4; y_4; z_4)$.

Найти:

а) уравнение прямой AB и указать ее направляющий вектор, если $A(0;-3;4)$, $B(-1;0;2)$;

б) величины углов, образованных прямой AB с координатными осями;

в) угол между прямыми AD и BC, если $A(0;0;-1), B(5;7;-3), C(3;7;-5)$, $D(1;3;1)$;

г) уравнение плоскости ABC и указать ее нормальный вектор, если $A(1;1;2), B(-1;1;3), C(2;-2;4)$;

д) уравнение прямой, проходящей через точку $D(3;-3;5)$ перпендикулярно плоскости ABC;

е) уравнение плоскости, проходящей через точку $C(3;-1;\ 2)$ перпендикулярно прямой AD;

ж) синус угла между прямой AD и плоскостью ABC;

з) косинус угла между координатной плоскостью xOy и плоскостью ABC;

и) уравнение плоскости α, параллельной прямой BD и проходящей через точки A и C, если $A(3;-3;0), B(2;-5;2), C(3;1;-2), D(4;1;3)$;

к) расстояние от точки $D(4;1;3)$ до плоскости ABC.

Ответ: а) $\frac{x}{-1}=\frac{y+3}{3}=\frac{z-4}{-2}, \vec{s}=(-1;3;-2)$; б) $\cos\alpha=\frac{-1}{\sqrt{14}}; \cos\beta=\frac{3}{\sqrt{14}}$; $\cos\gamma=\frac{-2}{\sqrt{14}}$; в) $\frac{3}{2\sqrt{7}}$; г) $3x+5y+6z-20=0$, $\vec{n}=(3;5;6)$; д) $\frac{x-3}{3}=\frac{y+3}{5}=$ $=\frac{z-5}{6}$; е) $x+3y+2z-4=0$; ж) $\frac{15}{7\sqrt{5}}$; з) $\frac{3\sqrt{70}}{35}$; и) $4x-y-2z-15=0$; к) $\frac{3\sqrt{70}}{14}$.

19 Найти канонические уравнения прямой $\begin{cases} 2x+y-5z+3=0; \\ 3x+2y-4z+2=0. \end{cases}$

Ответ: $\dfrac{x+4}{6}=\dfrac{y-5}{-7}=\dfrac{z}{1}.$

20 Эллипс касается оси ординат в начале координат, а центр симметрии его находится в точке $(5;0)$. Составить уравнение эллипса, если его эксцентриситет равен 0,6.

Ответ: $\dfrac{(x-5)^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1.$

21 Асимптоты гиперболы имеют уравнения $3x\pm 4y=0,$ а фокусы лежат на оси Oy и расстояние между ними равно 20. Написать каноническое уравнение гиперболы и начертить ее.

Ответ: $\dfrac{x^2}{64}-\dfrac{y^2}{36}=-1.$

22 Составить уравнение параболы и ее директрисы, если парабола проходит через точки пересечения прямой $x+y=0$ и окружности $x^2+y^2-4x=0$ и симметрична относительно оси Oy.

Ответ: $x^2=-2y;\ 2y-1=0.$

Список литературы

1 Высшая математика. Общий курс: учебник / Под ред. С. А. Самаля. – Минск: Вышэйшая школа, 2000. – 351 с.

2 Высшая математика для экономистов: практикум для студентов вузов, обучающихся по экономическим специальностям / Под ред. Н. Ш. Кремера. – 2-е изд., перераб и доп. – Москва: ЮНИТИ-ДАНА, 2007. – 479 с.

3 **Гурский, Е. И.** Руководство к решению задач по высшей математике: в 3 т. / Е. И. Гурский; под ред. Е. И. Гурского. – Минск: Вышэйшая школа, 1990. – Т. 1. – 350 с.

4 **Гусак, А. А.** Высшая математика: в 2 т. / А. А. Гусак. – Минск: ТетраСистемс, 2004. – Т. 1. – 544 с.

5 **Данко, П. Е.** Высшая математика в упражнениях и задачах: в 2 ч. / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – Москва: ОНИКС XXI век, 2003. – Ч. 1. – 304 с.

6 **Красс, М. С.** Математика для экономистов / М. С. Красс, Б. П. Чупрынов. – Санкт-Петербург: Питер, 2007. – 464 с.

7 **Письменный, Д. Т.** Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д. Т. Письменный. – Москва: Айрис-пресс, 2006. – 608 с.