МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Маркетинг и менеджмент»

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Методические рекомендации к практическим занятиям для студентов специальности 1-28 01 02 «Электронный маркетинг» очной и заочной форм обучения

Часть 1

Могилев 2022

УДК 517
ББК 22.161
М34

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Маркетинг и менеджмент» «09» декабря 2021 г., протокол № 5

Составитель канд. пед. наук, доц. Т. С. Старовойтова

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доц. В. А. Ливинская

В методических рекомендациях представлены материалы для практических занятий по дисциплине «Математический анализ». Основные теоретические положения проиллюстрированы примерами решения задач. Отдельно выделены задания для самостоятельной работы.

Учебно-методическое издание

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Часть 1

Ответственный за выпуск А. В. Александров

Корректор И. В. Голубцова

Компьютерная верстка Н. П. Полевничая

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 56 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.

Содержание

1 Введение в математический анализ

Пусть каждому числу x из некоторого множества X поставлено в соответствие одно и только одно число y. Тогда говорят, что на множестве X задана функция $y = f(x)$. Множество X **называется областью определения функции** и обозначается $D(f)$, а множество всех чисел y, соответствующих различным числам $x \in X$, **называется областью значений этой функции** и обозначается $E(f)$.

Пример 1 – Найти области определения функций:

1) $f(x) = \dfrac{5x+7}{x^2-4}$; 3) $f(x) = \ln(x+4)$;

2) $f(x) = \sqrt{4-7x}$; 4) $f(x) = \dfrac{6}{\sqrt[3]{2x-x^2}} + \arcsin\dfrac{x-2}{3}$.

Решение

1 Так как дробь $\dfrac{5x+7}{x^2-4}$ определена, то ее знаменатель не равен нулю. Поэтому область определения данной функции находится из условия $x^2 - 4 \neq 0$, т. е. $x \neq \pm 2$. Тогда $D(f) = (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$.

2 Функция $f(x) = \sqrt{4-7x}$ определена, если подкоренное выражение неотрицательно, т. е. $4 - 7x \geq 0$. Отсюда $x \leq \dfrac{4}{7}$. Значит, $D(f) = \left(-\infty; \dfrac{4}{7}\right]$.

3 Выражение, стоящее под знаком логарифма, должно быть положительным, поэтому функция $\ln(x+4)$ определена в том и только в том случае, когда $x + 4 > 0$, т. е. $x > -4$. Значит, $D(f) = (-4; +\infty)$.

4 Функция $\dfrac{6}{\sqrt[3]{2x-x^2}}$ определена при тех значениях x, при которых знаменатель $2x - x^2 \neq 0$, т. е. $x \neq 0, x \neq 2$.

Функция $\arcsin\dfrac{x-2}{3}$ определена при тех значениях x, которые определяются условием $-1 \leq \dfrac{x-2}{3} \leq 1$, т. е. $-3 \leq x - 2 \leq 3$, или $-1 \leq x \leq 5$.

Таким образом, область определения данной функции $f(x) = \dfrac{6}{\sqrt[3]{2x-x^2}} + \arcsin\dfrac{x-2}{3}$ есть пересечение областей определения обоих слагаемых, откуда $D(f) = (-1; 0] \cup (0; 2) \cup (2; 5]$.

Пример 2 **–** Найти множество значений функций:

1) $f(x)=x^2+4x+1$;

2) $f(x)=2^{x^2}$;

3) $f(x)=4-7\cos x$.

Решение

1 Так как $x^2+4x+1=(x+2)^2-3$, а $(x+2)^2\geq 0$ для всех значений x, то $f(x)\geq -3$ для всех x.

Так как функция $(x+2)^2$ принимает все значения от 0 до $+\infty$, то $E(f)=[-3;+\infty)$.

2 Так как $E(f)=E\left(x^2\right)=[0;+\infty)$, то множество значений функции 2^{x^2} совпадает с множеством значений функции 2^x при $x\geq 0$. Значит, $E(f)=[1;+\infty)$.

3 Для функции $f(x)=4-7\cos x$ имеем $E(\cos x)=[-1;1]$, откуда $E(-7\cos x)=[-7;7]$. Тогда $E(f)=[-3;11]$.

Пример 3 **–** Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6}$;

3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1-x^2}{2x^2+3x}$;

2) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2}{1-x^2}\right)$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{x}$;

6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-4}{x+5}\right)^{5x+3}$.

Решение

1 Так как пределы числителя и знаменателя при $x\to 2$ равны нулю, то имеем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Раскроем ее следующим образом:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-3)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x-3}=\frac{2+2}{2-3}=\frac{4}{-1}=-4.$$

2 Имеем неопределенность вида $(\infty-\infty)$. Преобразуем данное выражение, приведем дроби к общему знаменателю:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{2}{1-x^2}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{1+x-2}{(1-x)(1+x)}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x-1}{(1-x)(1+x)}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-(1-x)}{(1-x)(1+x)}=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{1+1}=-\frac{1}{2}.$$

3 Пределы числителя и знаменателя при $x\to 2$ равны нулю, имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Раскроем ее следующим образом:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{x+7}-3\right)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}{(x-2)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{x+7}\right)^2-3^2}{(x-2)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x+7)-9}{(x-2)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\left(\sqrt{x+7}+3\right)}=\frac{1}{6}.$$

4 Так как $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ (первый замечательный предел), то

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x\cdot\frac{1}{4}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}\cdot\frac{1}{\frac{1}{4}}=4.$$

5 Числитель и знаменатель дроби – бесконечно большие функции, имеем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Разделим числитель и знаменатель на x^2:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1-x^2}{2x^2+3x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}-\frac{x^2}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2}+\frac{3x}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-1}{2+\frac{3}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{0+0-1}{2+0}=-\frac{1}{2},$$

т. к. при $x\to\infty$ $\frac{1}{x}\to 0, \frac{1}{x^2}\to 0, \frac{3}{x}\to 0.$

6 Так как $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ или $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ (второй замечательный предел), то преобразуем выражение следующим образом:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-4}{x+5}\right)^{5x+3}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x+5)-9}{x+5}\right)^{5x+3}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+5}{x+5}+\frac{-9}{x+5}\right)^{5x+3}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-9}{x+5}\right)^{5x+3}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-9}{x+5}\right)^{\frac{x+5}{-9}\cdot\frac{-9}{x+5}(5x+3)}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{-9}{x+5}\right)^{\frac{x+5}{-9}}\right)^{\frac{-9}{x+5}(5x+3)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-9}{x+5}(5x+3)}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-45x-27}{x+5}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-45-\frac{27}{x}}{1+\frac{5}{x}}}=e^{-45}.$$

Пример 4 – Найти пределы, применяя эквивалентные бесконечно малые величины:

1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\cdot\left(e^x-1\right)}{1-\cos x}$;

2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\cdot\arcsin\sqrt{x}}{\operatorname{arctg}^{\frac{3}{2}}2x}$;

3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+7x)}{\sin 2x}$;

4) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\operatorname{arctg}(x-2)}{x^2-2x}$.

Решение

1 $$\lim_{x\to0}\frac{x\cdot\left(e^x-1\right)}{1-\cos x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\begin{bmatrix}e^x-1\approx x,\\ 1-\cos x\approx\dfrac{x^2}{2}\end{bmatrix}=\lim_{x\to0}\frac{x\cdot x}{\frac{x^2}{2}}=2.$$

2 $$\lim_{x\to0}\frac{x\cdot\arcsin\sqrt{x}}{\operatorname{arctg}^{\frac{3}{2}}2x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\begin{bmatrix}\arcsin\sqrt{x}\approx\sqrt{x},\\ \operatorname{arctg}2x\approx2x\end{bmatrix}=\lim_{x\to0}\frac{x\cdot\sqrt{x}}{(2x)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{2^{\frac{3}{2}}}=2^{-\frac{3}{2}}.$$

3 $$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+7x)}{\sin 2x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\begin{bmatrix}\ln(1+7x)\approx7x,\\ \sin2x\approx2x\end{bmatrix}=\frac{7}{2}.$$

4 $$\lim_{x\to2}\frac{\operatorname{arctg}(x-2)}{x^2-2x}=\lim_{x\to2}\frac{\operatorname{arctg}(x-2)}{x(x-2)}=\lim_{x\to2}\frac{1}{x}\cdot\lim_{x\to2}\frac{\operatorname{arctg}(x-2)}{x-2}=\frac{1}{2}\cdot1=\frac{1}{2}.$$

2 Дифференциальное исчисление функций одной переменной

Пример 1 **–** Найти производные следующих функций:

1) $y=\left(x^2+7x-1\right)\cdot\log_3 x$;

2) $y=5\ln x+\dfrac{2}{\sqrt[5]{x^7}}+\operatorname{arctg}x-\lg 20\cdot 2^x+tg\,3\cdot x^{15}$;

3) $y=\sqrt[3]{x^2+tg\,x+15}$;

4) $y=4\arccos x-e^x+3$;

5) $y=\ln\left(\operatorname{arctg}3x\right)-\sin\dfrac{2\pi}{3}$.

Решение

1 $y'=\left(\left(x^2+7x-1\right)\cdot\log_3 x\right)'=\left(x^2+7x-1\right)'\cdot\log_3 x+\left(x^2+7x-1\right)\cdot\left(\log_3 x\right)'=$

$$=\left(2x+7\right)\cdot\log_3 x+\frac{x^2+7x-1}{x\ln 3}.$$

2 $y'=\left(5\ln x+\dfrac{2}{\sqrt[5]{x^7}}+\operatorname{arctg}x-\lg 20\cdot 2^x+tg\,3\cdot x^{15}\right)'=$

$$=\left(5\ln x\right)'+\left(\frac{2}{\sqrt[5]{x^7}}\right)'+\left(\operatorname{arctg}x\right)'-\left(\lg 20\cdot 2^x\right)'-\left(tg\,3\cdot x^{15}\right)'=$$

$$=\frac{5}{x}-\frac{14}{5\sqrt[5]{x^{12}}}+\frac{1}{1+x^2}-\lg 20\cdot\ln 2\cdot 2^x-15\cdot tg\,3\cdot x^{14}.$$

3 $y'=\left(\sqrt[3]{x^2+tg\,x+15}\right)'=\left(\left(x^2+tg\,x+15\right)^{\frac{1}{3}}\right)'=$

$$=\frac{1}{3}\left(x^2+tg\,x+15\right)^{-\frac{2}{3}}\left(x^2+tg\,x+15\right)'=\frac{1}{3}\left(x^2+tg\,x+15\right)^{-\frac{2}{3}}\left(2x+\frac{1}{\cos^2 x}\right)=$$

$$=\frac{1}{3\sqrt[3]{\left(x^2+tg\,x+15\right)^2}}\left(2x+\frac{1}{\cos^2 x}\right)=\frac{2x+\dfrac{1}{\cos^2 x}}{3\sqrt[3]{\left(x^2+tg\,x+15\right)^2}}.$$

4 $y'=\left(4\arccos x-e^x+3\right)'=4\left(\arccos x\right)'-\left(e^x\right)'=\dfrac{-4}{\sqrt{1-x^2}}-e^x.$

$$5\ y' = \left(\ln\left(\operatorname{arctg} 3x\right) - \sin\frac{2\pi}{3} \right)' = \left(\ln\left(\operatorname{arctg} 3x\right)\right)' - \left(\sin\frac{2\pi}{3}\right)' =$$

$$= \frac{1}{\operatorname{arctg} 3x} \cdot \left(\operatorname{arctg} 3x\right)' - 0 = \frac{1}{\operatorname{arctg} 3x} \cdot \frac{1}{1+\left(3x\right)^2} \cdot 3 = \frac{3}{\left(1+9x^2\right)\operatorname{arctg} 3x}.$$

Пример 2 **–** Найти производную и дифференциал функции $y = \ln\left(2x^2+7\right)$ в точке $x_0 = 2$.

Решение

Так как $\left(\ln u\right)' = \frac{1}{u} \cdot u'$, то $y' = \left(\ln\left(2x^2+7\right)\right)' = \frac{1}{2x^2+7} \cdot \left(2x^2+7\right)' = \frac{4x}{2x^2+7}$.

Если $x_0 = 2$, то получаем $y'\left(2\right) = \frac{4 \cdot 2}{2 \cdot 4 + 7} = \frac{8}{15}$.

Дифференциал функции $y = f\left(x\right)$ находится по формуле $dy = f'\left(x\right)dx$. Тогда $dy = \frac{4x}{2x^2+7}dx$, $dy\left(2\right) = \frac{8}{15}dx$.

Пример 3 **–** Найти производную и дифференциал второго порядка функции $y = x \cdot \sin x$.

Решение

Найдем первую производную функции $y = x \cdot \sin x$. Имеем

$$y' = \left(x \cdot \sin x\right)' = x' \cdot \sin x + x \cdot \left(\sin x\right)' = \sin x + x \cdot \cos x.$$

Найдем вторую производную данной функции. Получим

$$y'' = \left(y'\right)' = \left(\sin x + x \cdot \cos x\right)' = \left(\sin x\right)' + \left(x \cdot \cos x\right)' =$$

$$\cos x + \left(x' \cdot \cos x + x\left(\cos x\right)' \right) = \cos x + \left(\cos x - x \cdot \sin x \right) = 2\cos x - x \cdot \sin x.$$

Дифференциал второго порядка обозначается $d^2 y$ и определяется по формуле $d^2 y = y'' dx^2$. Значит, $d^2 y = \left(2\cos x - x \cdot \sin x\right)dx^2$.

Монотонность (возрастание и убывание) функции и экстремумы

Условия монотонности функции. Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на интервале $(a; b)$. Тогда если для любого x из интервала $(a; b)$ выполняется неравенство $f'(x) > 0,$ то функция $y = f(x)$ возрастает на этом интервале; если же на интервале $(a; b)$ $f'(x) < 0$, то функция $y = f(x)$ убывает на этом интервале.

Экстремумы функции. Точка x_0 называется точкой локального максимума, если существует такая окрестность $U(x_0)$ этой точки, что $f(x) \le f(x_0)$ для любого $x \in U(x_0)$, при этом $x \ne x_0$.

Точка x_0 называется точкой локального минимума, если существует такая окрестность $U(x_0)$ этой точки, что $f(x) \ge f(x_0)$ для любого $x \in U(x_0)$ $(x \ne x_0)$.

Точки локального максимума и минимума называются точками локального экстремума, а значения функции в этих точках – экстремумами функции.

Необходимое условие экстремума. Если x_0 – точка локального экстремума функции $f(x)$, то в этой точке производная функции либо равна нулю $(f'(x_0) = 0)$, либо не существует.

Точки области определения непрерывной функции $y = f(x)$, в которых ее производная не существует или равна нулю, называются критическими точками функции.

Достаточное условие экстремума. Пусть x_0 – критическая точка функции $f(x)$. Если при переходе через точку x_0 производная меняет знак с плюса на минус, то точка x_0 есть точка локального максимума; если же производная меняет знак с минуса на плюс, то x_0 есть точка локального минимума.

Пример 4 **–** Найти интервалы возрастания и убывания и точки экстремума функции $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x$.

Решение

Функция определена и дифференцируема на всей числовой прямой.

Находим производную функции $f'(x) = 3x^2 - 18x + 15 = 3(x-1)(x-5)$.

Находим критические точки: $f'(x) = 0,$ $x_1 = 1,$ $x_2 = 5.$

Критические точки $x_1 = 1,$ $x_2 = 5$ отмечаем на координатной прямой. Получаем интервалы $(-\infty; 1), (1; 5), (5; +\infty)$.

Определяем знак производной на каждом интервале: $f'(x) > 0$ на интервалах $(-\infty; 1)$ и $(5; +\infty)$, это интервалы возрастания функции; $f'(x) < 0$ на интервале $(1; 5)$, это интервал убывания функции.

Применяя достаточное условие экстремума, имеем $x_{\min}=5,\ x_{\max}=1-$точки экстремума.

$$f_{\min}=f(5)=-25,\ f_{\max}=f(1)=7.$$

Наибольшее и наименьшее значения функции

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$,то она принимает на отрезке свое наибольшее и наименьшее значения.

Для нахождения этих значений необходимо:

1) найти критические точки функции $f(x)$ внутри отрезка $[a;b]$;

2) вычислить значения функции $f(x)$ в критических точках и значения функции $f(a)$ и $f(b)$ на концах отрезка;

3) наибольшее из найденных значений есть наибольшее значение функции на отрезке $[a;b]$ и обозначается $y_{наиб}=\max\limits_{x\in[a;b]}f(x)$; наименьшее из найденных значений есть наименьшее значение функции на отрезке $[a;b]$ и обозначается $y_{наим}=\min\limits_{x\in[a;b]}f(x)$.

Пример 5 **–** Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=2x^3+3x^2-12x+1$ на отрезке $[-3;3]$.

Решение

Находим критические точки функции $y=2x^3+3x^2-12x+1$ внутри заданного отрезка $[-3;3]$: $y'=6x^2+6x-12=6\left(x^2+x-2\right)=6(x-1)(x+2)$.

Так как $y'=0$ при $x=-2$ и $x=1$, то $x_1=-2$ и $x_2=1-$ критические точки данной функции, причем обе они находятся внутри отрезка $[-3;3]$.

Вычислим значение функции в критических точках и на концах отрезка: $y(1)=2\cdot1^3+3\cdot1^2-12\cdot1+1=-6,\quad y(-2)=21,\quad y(-3)=0,\ y(3)=46.$

Тогда $y_{наиб}=\max\limits_{x\in[-3;3]}y=y(3)=46$, а $y_{наим}=\min\limits_{x\in[-3;3]}y=y(1)=-6.$

Выпуклость и точки перегиба

Достаточное условие выпуклости. Если функция $y=f(x)$ в каждой точке интервала $(a;b)$ имеет непрерывную вторую производную и $f''(x)\neq0$, то на этом интервале функция выпуклая, причем:

– если $f''(x)>0$, то выпукла вниз (вогнута);

– если $f''(x)<0$, то выпукла вверх.

Точка x_0 из области определения функции $y = f\left(x\right)$ называется точкой перегиба функции, если в правой и левой окрестностях этой точки направления выпуклости противоположны.

Пример 6 **–** Найти промежутки выпуклости и точки перегиба функции $y = x^4 - 6x^2 + 5x$.

Решение

Функция определена и дважды дифференцируема на всей действительной оси. Найдем вторую производную: $y'' = \left(4x^3 - 12x + 5\right)' = 12x^2 - 12$.

Приравняем вторую производную к нулю и получим критические точки второго рода: $12x^2 - 12 = 0$, $x^2 = 1$, $x_1 = -1, x_2 = 1$.

Эти точки разбивают числовую прямую на три интервала: $\left(-\infty; -1\right), \left(-1; 1\right), \left(1; +\infty\right)$.

Так как $y'' > 0$ при $x \in \left(-\infty; -1\right)$ и $x \in \left(1; +\infty\right)$, то на этих интервалах кривая вогнута (выпукла вниз). Поскольку $y'' < 0$ при $x \in \left(-1; 1\right)$, то на этом интервале кривая выпукла.

Найдем $y\left(-1\right) = -10$, $y\left(1\right) = 0$. Точки $\left(-1; -10\right)$ и $\left(1; 0\right)$ – точки перегиба.

3 Комплексные числа

Пример 1 **–** Найти сумму, разность, произведение и частное комплексных чисел $z_1 = -1 + 6i$ и $z_2 = 2 + 5i$.

Решение

Если $z_1 = x_1 + y_1 i$ и $z_2 = x_2 + y_2 i$, то $z_1 \pm z_2 = \left(x_1 \pm x_2\right) + \left(y_1 \pm y_2\right)i$, произведение $z_1 z_2 = \left(x_1 + y_1 i\right)\left(x_2 \pm y_2 i\right) = \left(x_1 x_2 - y_1 y_2\right) + \left(x_1 y_2 + x_2 y_1\right)$.

Тогда $z_1 + z_2 = \left(-1 + 6i\right) + \left(2 + 5i\right) = 1 + 11i$, $z_1 - z_2 = \left(-1 + 6i\right) - \left(2 + 5i\right) = -3 + i$, $z_1 z_2 = \left(-1 + 6i\right)\left(2 + 5i\right) = \left(-1 \cdot 2 - 6 \cdot 5\right) + \left(-1 \cdot 5 + 2 \cdot 6\right) = -32 + 7i$.

Частное комплексных чисел $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_1^2 + x_2^2} + \dfrac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1^2 + x_2^2} i$.

На практике поступают проще: умножают числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное знаменателю. Тогда

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-1 + 6i}{2 + 5i} = \frac{\left(-1 + 6i\right)\left(2 - 5i\right)}{\left(2 + 5i\right)\left(2 - 5i\right)} = \frac{28 + 17i}{4 + 25} = \frac{28}{29} + \frac{17}{29}i.$$

Пример 2 **–** Записать число $z = 1 - \sqrt{3}i$ в тригонометрической форме.

Решение

Тригонометрической формой записи комплексного числа называется его запись в виде $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где $r -$ модуль комплексного числа, а $\varphi -$один из его аргументов. Аргументом φ комплексного числа $z = x + yi$ ($z \neq 0$) называется величина угла между положительным направлением действительной оси и радиус-вектором, проведенным из начала координат в точку $M(x; y)$.

Аргумент φ комплексного числа находится из системы $\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{x}{r}, \\ \sin\varphi = \dfrac{y}{r} \end{cases}$ или из решения уравнения $tg\,\varphi = \dfrac{y}{x}$. Тогда $\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$.

Для числа $z = 1 - \sqrt{3}\,i$ $\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} = -\operatorname{arctg}\sqrt{3} = -\dfrac{\pi}{3}$, модуль $r = \sqrt{1 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = 2.$ Тогда $z = 2\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right) -$ тригонометрическая форма данного числа.

Пример 3 **–** Найти произведение и частное комплексных чисел $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$ и $z_2 = 2\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$.

Решение

Произведение двух комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме, находится по формуле $z_1 z_2 = r_1 r_2\left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right)$. Для данных чисел $r_1 r_2 = 2\sqrt{2}$, $\varphi_1 + \varphi_2 = \dfrac{3\pi}{4} + \left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{5\pi}{12}$.

Тогда

$$z_1 z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)\cdot 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right).$$

Деление комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме, выполняется по формуле $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right)$.

Тогда для данных чисел имеем

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{13\pi}{12}+i\sin\frac{13\pi}{12}\right).$$

Пример 4 **–** Найти z^4 и $\sqrt[3]{z}$, если $z=-4\sqrt{3}-4i$.

Решение

При возведении комплексного числа в степень с натуральным показателем его модуль возводится в степень с тем же показателем, а аргумент умножается на показатель степени, т. е. $z^n=\left(r\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right)\right)^n=r^n\left(\cos n\varphi+i\sin n\varphi\right)$.

Запишем число $z=-4\sqrt{3}-4i$ в тригонометрической форме. Так как $r=\sqrt{\left(-4\sqrt{3}\right)^2+\left(-4\right)^2}=\sqrt{64}=8$, а точка $A\left(-4\sqrt{3};-4\right)$ находится в III четверти, то аргумент $\varphi=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}-\pi=\operatorname{arctg}\dfrac{-4}{-4\sqrt{3}}-\pi=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{3}}-\pi=\dfrac{\pi}{6}-\pi=-\dfrac{5\pi}{6}$.

Тогда $z=8\left(\cos\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right)\right)$.

$$z^4=8^4\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\cdot 4\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\cdot 4\right)\right)=8^4\left(\cos\left(-\frac{10\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{10\pi}{3}\right)\right).$$

Для нахождения $\sqrt[n]{z}$ применим формулу

$$w_k=\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right),\ k=0,1,2,\ldots,n-1.$$

В данном случае $n=3$. Тогда

$$w_k=\sqrt[3]{-4\sqrt{3}-4i}=\sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{-\frac{5\pi}{6}+2k\pi}{3}+i\sin\frac{-\frac{5\pi}{6}+2k\pi}{3}\right),\ k=0,1,2.$$

Найдем все три значения w_k :

$$w_0=\sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{-\frac{5\pi}{6}}{3}+i\sin\frac{-\frac{5\pi}{6}}{3}\right)=2\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{18}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{18}\right)\right);$$

$$w_1=\sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{-\frac{5\pi}{6}+2\pi}{3}+i\sin\frac{-\frac{5\pi}{6}+2\pi}{3}\right)=2\left(\cos\left(\frac{7\pi}{18}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{18}\right)\right);$$

$$w_2=\sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{-\frac{5\pi}{6}+4\pi}{3}+i\sin\frac{-\frac{5\pi}{6}+4\pi}{3}\right)=2\left(\cos\left(\frac{19\pi}{18}\right)+i\sin\left(\frac{19\pi}{18}\right)\right)=$$

$$=2\left(-\cos\left(\frac{\pi}{18}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{18}\right)\right)=-2\left(\cos\frac{\pi}{18}+i\sin\frac{\pi}{18}\right).$$

4 Интегральное исчисление функций одной переменной

Неопределенный интеграл. Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$, заданной на некотором множестве X, если $F'(x)=f(x)$ для всех $x\in X$. Очевидно, что для функции $f(x)$ первообразной будет также функция $F(x)+C$, т. к. $(F(x)+C)'=F'(x)+C'=f(x)+0=f(x)$.

Таким образом, $F(x)+C$ есть множество первообразных, т. к. величина C не определена. Например, множество первообразных для функции $f(x)=x^4$ есть $F(x)=\frac{x^5}{5}+C$, а для функции $f(x)=\sin x$ имеем $F(x)=-\cos x+C$.

Множество всех первообразных для функции $f(x)$ называют неопределенным интегралом и обозначают $\int f(x)dx$.

Таким образом, $\int f(x)dx=F(x)+C$, где $(F(x)+C)'=f(x)$. При этом функцию $f(x)$ называют подынтегральной функцией, $f(x)\,dx$ – подынтегральным выражением, x – переменной интегрирования, dx – дифференциалом независимой переменной, знак $\int$ – знак неопределенного интеграла.

Операцию нахождения неопределенного интеграла называют *интегрированием*. Интегрирование – действие, обратное дифференцированию. Правильность интегрирования проверяется дифференцированием.

Условие существования неопределенного интеграла: всякая непрерывная на промежутке (a,b) функция $f(x)$ имеет на этом промежутке первообразную, т. е. неопределенный интеграл от функции $f(x)$ существует.

Свойства неопределенного интеграла:

а) $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$;

б) $\int d\,F(x) = F(x) + C$;

в) $a\,f(x)dx = a\int f(x)dx,\ a = \text{const}$;

г) $\int\big(f(x) \pm g(x)\big)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$;

д) если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(u)du = F(u) + C$, где $u = \varphi(x)$ (свойство неизменности или инвариантности формулы интегрирования).

Неопределенные интегралы от основных элементарных функций:

1) $\int 0\,dx = C,\ C = \text{const}$;

2) $\int x^{\alpha}dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C\ \ (\alpha \neq -1, \alpha \in R)$.

В частности:

– если $\alpha = 0$, то имеем $\int dx = \int 1\,dx = x + C$;

– если $\alpha = -\dfrac{1}{2}$, то имеем $\int \dfrac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x} + C$;

– если $\alpha = -2$, то имеем $\int \dfrac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x} + C$;

3) $\int \dfrac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$;

4) $\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$. Если $a = e$, то $\int e^x\,dx = e^x + C\ \ (\ln e = 1)$;

5) $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$;

6) $\int \cos x\,dx = \sin x + C$;

7) $\int \dfrac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + C$;

8) $\int \dfrac{1}{\sin^2 x}dx = -\operatorname{ctg} x + C$;

9) $\int \dfrac{1}{x^2 + a^2}dx = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} + C = -\dfrac{1}{a}\operatorname{arcctg}\dfrac{x}{a} + C$;

10) $\int \dfrac{1}{x^2 + 1}dx = \operatorname{arctg}\,x + C = -\operatorname{arcctg}\,x + C$;

11) $\int \dfrac{1}{x^2 - a^2}dx = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C$;

12) $\int \dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx = \arcsin\dfrac{x}{a} + C = -\arccos\dfrac{x}{a} + C, |x| < |a|$;

13) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C;$

14) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C;$

15) $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C.$

Основные приемы и методы интегрирования.

Непосредственное интегрирование: метод, при котором неопределенный интеграл с помощью тождественных преобразований подынтегральной функции и применения свойств неопределенного интеграла приводится к одному или нескольким табличным интегралам.

Пример 1 – Найти неопределенный интеграл

$$\int\left(3x^4 + \frac{\cos x}{7} + 3^x - \frac{6}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{12}{x} - 5e^x + \frac{3\sqrt{x}}{x} + \frac{4}{49+x^2}\right)dx.$$

Решение

$$\int\left(3x^4 + \frac{\cos x}{7} + 3^x - \frac{6}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{12}{x} - 5e^x + \frac{3\sqrt{x}}{x} + \frac{4}{49+x^2}\right)dx = \int 3x^4 dx + \int \frac{\cos x}{7}dx +$$

$$+\int 3^x dx - \int \frac{6}{\sqrt{1-x^2}}dx + \int \frac{12}{x}dx - \int 5e^x dx + \int \frac{3\sqrt{x}}{x}dx + \int \frac{4}{49+x^2}dx = 3\int x^4 dx +$$

$$= \frac{1}{7}\int \cos dx + \frac{3^x}{\ln 3} - 6\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + 12\int \frac{dx}{x} - 5\int e^x dx + 3\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx + 4\int \frac{dx}{49+x^2} =$$

$$= 3\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1}{7}\sin x + \frac{3^x}{\ln 3} - 6\arcsin x + 12\ln|x| - 5e^x + 3\cdot 2\sqrt{x} + 4\cdot\frac{1}{7}\operatorname{arctg}\frac{x}{7} + C =$$

$$= \frac{3}{5}x^5 + \frac{1}{7}\sin x + \frac{3^x}{\ln 3} - 6\arcsin x + 12\ln|x| - 5e^x + 6\sqrt{x} + \frac{4}{7}\operatorname{arctg}\frac{x}{7} + C.$$

Интегрирование подстановкой (*замена переменной*): метод, при котором введение новой переменной позволяет получить табличный интеграл с новой переменной или свести его к табличному интегралу.

Пусть $\int f(x)\,dx$ не является табличным. Заменим переменную x на некоторую функцию $x=\varphi(t)$, которая должна быть строго монотонной и иметь непрерывную производную. Тогда $dx = d\big(\varphi(t)\big)=\varphi'(t)\,dt.$

Формула замены переменной в неопределенном интеграле имеет вид:

$$\int f(x)\,dx=\int f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)\,dt=\int \omega(t)\,dt.$$

Найдя интеграл по переменной t, необходимо вернуться к переменной x по формуле $t=\varphi^{-1}(x)$, т. е. найти обратную функцию. В некоторых случаях целесообразно делать подстановку $t=g(x)$. Тогда $\int f\big(g(x)\big)\cdot g'(x)\,dx=\int f(t)\,dt.$

Пример 2 – Найти неопределенный интеграл:
1) $\int \sin(2-3x)\,dx;$

2) $\int \dfrac{1}{9x^2+1}dx.$

Решение

1 $$\int \sin(2-3x)\,dx=\left[2x-3=t,\ x=\frac{1}{2}(t+3),\ dx=\left(\frac{1}{2}(t+3)\right)'_t dt=\frac{1}{2}dt\right]=$$

$$=\int \sin t\cdot\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}\int \sin t\,dt=-\frac{1}{2}\cos t+C=\left|t=2x-3\right|=-\frac{1}{2}\cos\,(2x-3)+C.$$

2 $$\int \frac{1}{9x^2+1}dx=\int\frac{1}{(3x)^2+1}dx=\left[3x=t, x=\frac{t}{3}, dx=\frac{1}{3}dt\right]=\int\frac{1}{t^2+1}\cdot\frac{1}{3}dt=$$

$$=\int\frac{1}{t^2+1}\cdot\frac{1}{3}dt=\frac{1}{3}\int\frac{1}{t^2+1}dt=\frac{1}{3}\operatorname{arctg} t+C=\frac{1}{3}\operatorname{arctg}3x+C.$$

Интегрирование путем подведения подынтегральной функции или ее части под знак дифференциала. Пусть надо найти $\int g(x)\,dx$. В выражении $g(x)\,dx$ в качестве множителя выделяем дифференциал некоторой функции $u=\varphi(x)$, т. е. $du=\varphi'(x)\,dx,$ и подынтегральное выражение $g(x)\,dx$ представляем в виде $g(x)\,dx=f\big(\varphi(x)\big)\,\varphi'(x)\,dx=f(u)\,du$. После этого $\int f(u)\,du$ должен стать табличным или сводиться к нему. Найдя первообразную $F(u)du$, возвращаемся к переменной x по формуле $u=\varphi(x)$, т. е. получаем $F\big(\varphi(x)\big)$.

Пример 3 **–** Найти неопределенный интеграл:

1) $\int \sin(3x+5)\,dx$;

2) $\int \frac{x^3}{\cos^2 x^4}\,dx.$

Решение

$$1\ \int \sin(3x+5)\,dx = \left[dx = \frac{1}{3} d(3x+5) \right] = \int \sin(3x+5) \cdot \frac{1}{3} d(3x+5) =$$

$$= [3x+5=u] = \frac{1}{3} \int \sin u\,du = -\frac{1}{3} \cdot \cos u + C = [3x+5=u] = -\frac{1}{3} \cdot \cos(3x+5) + C.$$

$$2\ \int \frac{x^3}{\cos^2 x^4}\,dx = \left[x^3\,dx = \frac{1}{4} d\left(x^4\right) \right] = \frac{1}{4} \int \frac{d\left(x^4\right)}{\cos^2 x^4} = \left[x^4 = u \right] =$$

$$= \frac{1}{4} \int \frac{du}{\cos^2 u} = \frac{1}{4} \operatorname{tg} u + C = \left[u = x^4 \right] = \frac{1}{4} \operatorname{tg} x^4 + C.$$

Интегрирование по частям. Пусть $u(x)$ и $v(x)$ – непрерывные функции, имеющие непрерывные производные. Известно, что $d(uv) = u\,dv + v\,du$. Тогда $\int u\,dv = uv - \int v\,du$. Эту формулу называют *формулой интегрирования по частям.* Она дает возможность свести вычисление интеграла $\int udv$ к вычислению интеграла $\int vdu$, который при удачном разбиении подынтегрального выражения на части u и dv во многих случаях оказывается более простым.

Пример 4 **–** Найти неопределенный интеграл $\int x \cdot \sin x\,dx.$

Решение

Подынтегральное выражение можно разбить на произведение двух множителей двумя способами: $u = \sin x,\ dv = x\,dx$ или $u = x,\ dv = \sin x\,dx.$

$$\int x \cdot \sin x\,dx = \left[\begin{array}{l} u = \sin x,\ du = \cos x\,dx \\ dv = x\,dx, v = \int dv = \int x\,dx = \frac{x^2}{2}(C=0) \end{array} \right] = \frac{x^2}{2} \cdot \sin x - \frac{1}{2} \int x^2 \cos x\,dx.$$

Разбиение оказалось неудачным, т. к. получился более сложный интеграл: $\int x^2 \cos x\,dx$. Пусть $u = x,\ dv = \sin x\,dx$. Тогда

$$\int x\cdot\sin x\,dx=\begin{bmatrix}u=x,\,du=dx\\ dv=\sin x\,dx,v=-\cos x\end{bmatrix}=$$

$$=x\cdot(-\cos x)-\int(-\cos x)\,dx=\;x\cdot(-\cos x)+\int\cos x\,dx=-x\cdot\cos x+\sin x+C.$$

Некоторые часто встречающиеся интегралы, которые вычисляются методом интегрирования по частям:

а) интегралы вида $\int P_n(x)\,e^{kx}dx$, $\int P_n(x)\cos kx\,dx,\int P_n(x)\sin kx\,dx$, где $P_n(x)-$ многочлен, k – некоторое число, берутся по частям, если положить $u=P_n(x)$, а в качестве dv брать все остальное, т. е. $dv=e^{kx}dx$, $dv=\cos kx\,dx$, $dv=\sin kx\,dx.$ При этом формулу интегрирования по частям следует применять n раз.

Пример 5 **–** Найти $\int(x^2-2x+7)e^{2x}dx.$

Решение

$$\int(x^2-2x+7)\,e^{2x}dx=\begin{bmatrix}u=x^2-2x+7,\,dv=e^{2x}\,dx\\ du=(2x-2)\,dx,\,v=\dfrac{1}{2}e^{2x}\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2}(x^2-2x+7)\,e^{2x}-\int\frac{1}{2}e^{2x}(2x-2)\,dx=\frac{1}{2}(x^2-2x+7)\,e^{2x}-\int(x-1)\,e^{2x}\,dx.$$

Отдельно найдем

$$\int(x-1)\,e^{2x}\,dx=\begin{bmatrix}u=x-1,\,dv=e^{2x}dx\\ du=dx,v=\dfrac{1}{2}e^{2x}\end{bmatrix}=\frac{1}{2}(x-1)\,e^{2x}-\int e^{2x}\,dx=\frac{1}{2}(x-1)\,e^{2x}-\frac{1}{4}\,e^{2x}+C;$$

$$\int(x^2-2x+7)\,e^{2x}dx=\frac{1}{2}(x^2-2x+7)\,e^{2x}-\frac{1}{2}(x-1)\,e^{2x}+\frac{1}{4}\,e^{2x}+C=\frac{1}{2}\left(x^2-3x+\frac{17}{2}\right)e^{2x}+C;$$

б) интегралы вида $\int P_n(x)\arccos kx\,dx,\int P_n(x)\arcsin kx\,dx,\int P_n(x)\ln kx\,dx,$ $\int P_n(x)\,\mathrm{arctg}\,kx\,dx,\int P_n(x)\,\mathrm{arcctg}\,kx\,dx$, где $P_n(x)$ – многочлен относительно $x.$ При интегрировании по частям за u принимают функцию, являющуюся множителем при $P_n(x)$, а в качестве dv выступает $P_n(x)\,dx.$

Пример 6 – Найти $\int\left(4x^3+6x-7\right)\ln x\,dx$.

Решение

$$\int\left(4x^3+6x-7\right)\ln x\,dx=\begin{bmatrix} u=\ln x,\ dv=\left(4x^3+6x-7\right)dx \\ du=\dfrac{dx}{x},\ v=x^4+3x^2-7x \end{bmatrix}=$$

$$=\left(x^4+3x^2-7x\right)\ln x-\int\frac{x^4+3x^2-7x}{x}\,dx=\left(x^4+3x^2-7x\right)\ln x-\left(\frac{x^4}{4}+\frac{3x^2}{2}-7x\right)+C;$$

в) интегралы вида $\int e^{ax}\cos bx\,dx$, $\int e^{ax}\sin bx\,dx$, где a и b – числа, находятся двукратным интегрированием по частям.

Пример *7* – Найти $\int e^{2x}\cos 3x\,dx$.

Решение

$$\int e^{2x}\cos 3x\,dx=\left[u=e^{2x},\ \ du=2e^{2x}\,dx,\ \ dv=\cos 3x\,dx,\ \ v=\frac{1}{3}\sin 3x\right]=$$

$$=\frac{1}{3}e^{2x}\sin 3x-\frac{2}{3}\int e^{2x}\sin 3x\,dx.$$

К последнему интегралу снова применим интегрирование по частям:

$$\int e^{2x}\sin 3x\,dx=\left[u=e^{2x},\ \ du=2e^{2x}\,dx,\ \ dv=\sin 3x\,dx,\ \ v=-\frac{1}{3}\cos 3x\right]=$$

$$-\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x+\frac{2}{3}\int e^{2x}\cos 3x\,dx;$$

$$\int e^{2x}\cos 3x\,dx=\frac{1}{3}e^{2x}\sin 3x-\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x+\frac{2}{3}\int e^{2x}\cos 3x\,dx\right)=$$

$$=\frac{1}{3}e^{2x}\left(\sin 3x+\frac{2}{3}\cos 3x\right)-\frac{4}{9}\int e^{2x}\cos 3x\,dx.$$

После преобразований имеем

$$\left(1+\frac{4}{9}\right)\int e^{2x}\cos 3x\,dx=\frac{1}{3}\,e^{2x}\left(\sin 3x+\frac{2}{3}\cos 3x\right).$$

Тогда

$$\int e^{2x}\cos 3x\,dx=\frac{e^{2x}\left(3\sin 3x+2\cos 3x\right)}{13}+C.$$

Пример 8 **–** Найти неопределенные интегралы:

1) $\int\frac{dx}{x^2+8x+7}$;

2) $\int\frac{dx}{x^2+2x+5}$.

Решение

$$1\ \int\frac{dx}{x^2+8x+7}=\int\frac{dx}{(x+4)^2-9}=\int\frac{d(x+4)}{(x+4)^2-9}=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x+4-3}{x+4+3}\right|+C=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x+1}{x+7}\right|+C.$$

$$2\ \int\frac{dx}{x^2+2x+5}=\int\frac{dx}{(x+1)^2+4}=\int\frac{d(x+1)}{(x+4)^2+1}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+C.$$

Пример 9 – Найти интеграл $\int\frac{x\,dx}{x^2-5x+6}$.

Решение

Так как $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$, то представим дробь $\frac{x}{x^2-5x+6}$ в виде суммы дробей: $\frac{x}{x^2-5x+6}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}$ и найдем коэффициенты A и B.

$$\frac{x}{x^2-5x+6}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}=\frac{A(x-3)+B(x-2)}{(x-2)(x-3)};$$

$$x=A(x-3)+B(x-2)\ \text{ или }\ x=(A+B)x-3A-2B.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях последнего равенства, составим систему уравнений $\begin{cases}A+B=1;\\-3A-2B=0.\end{cases}$

Ее решение $A=-2,\ B=3$. Таким образом, $\dfrac{x}{x^2-5x+6}=\dfrac{-2}{x-2}+\dfrac{3}{x-3}$.

$$\int\frac{x\,dx}{x^2-5x+6}=\int\left(\frac{-2}{x-2}+\int\frac{3}{x-3}\right)dx=\int\frac{-2}{x-2}dx+\int\frac{3}{x-3}dx=-2\int\frac{dx}{x-2}+3\int\frac{dx}{x-3}=$$

$$=-2\int\frac{d(x-2)}{x-2}+-2\int\frac{d(x-3)}{x-3}=-2\ln|x-2|+3\ln|x-3|+C.$$

Пример 10 – Найти интеграл $\displaystyle\int\frac{5x}{(x-1)^3}dx.$

Решение

$$\frac{5x}{(x-1)^3}=\frac{A}{(x-1)^3}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-1};$$

$$A+B(x-1)+C(x-1)^2=5x;$$

$$Cx^2+(B-2C)x+(A-B+C)=5x;$$

$$\begin{cases}C=0;\\ B-2C=5;\\ A-B+C=0,\end{cases}\qquad\qquad \begin{cases}C=0;\\ B=5;\\ A=5.\end{cases}$$

$$\int\frac{5x}{(x-1)^3}dx=\int\frac{5}{(x-1)^3}dx+\int\frac{5x}{(x-1)^2}dx=-\frac{5}{2(x-1)^2}-\frac{5}{x-1}+C.$$

Если рациональная дробь неправильная, то ее представляют в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби.

Определенный интеграл. Вычисление определенного интеграла. Рассмотрим некоторую функцию $y=f(x)$, определенную и непрерывную на отрезке $[a;b]$. С помощью точек деления $x_1<x_2<x_3<\ldots<x_{i-1}<x_i<\ldots x_{n-1}$ разобьем этот отрезок на n «малых» отрезков (частей): $[x_0,x_1]$, $[x_1,x_2]$, $[x_2,x_3],\ldots,$ $[x_{n-1},x_n]$, $x_0=a$, $x_n=b$. На каждом из полученных частичных («малых») отрезков $[x_{i-1},x_i]$ выберем произвольную точку $c_i\ (x_{n-1}<c_i<x_{n-1})$ и умножим значение функции $f(x)$ в точке c_i на длину $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$ соответствующего отрезка, т. е. $f(c_i)\cdot\Delta x_i$. Составим сумму всех таких произведений: $f(c_1)\cdot\Delta x_1+f(c_2)\cdot\Delta x_2+\ \ldots+f(c_i)\cdot\Delta x_i+\ldots+f(c_n)\cdot\Delta x_n$, или в сокращенной

записи $S_n = \sum_{i=1}^{n} f\left(c_i \right) \cdot \Delta x_i$, которую называют *интегральной суммой.*

Наибольшую из длин частичных отрезков назовем шагом разбиения, обозначим его через λ, т. е. $\lambda = \max\left\{ \Delta x_i \right\}$, и вычислим предел интегральной суммы при $n \to \infty \left(\lambda \to 0 \right)$.

Если существует конечный предел интегральной суммы S_n, который не зависит ни от способа разбиения отрезка $\left[a,b\right]$ на частичные отрезки, ни от выбора точек c_i в каждом из них, то этот предел (число) называется *определенным интегралом* от функции $f\left(x\right) f\left(x\right)$ на отрезке $f\left(x\right)$ и обозначается символом $\int_a^b f\left(x\right) dx$. Таким образом, $\int_a^b f\left(x\right) dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f\left(c_i \right) \cdot \Delta x_i$.

Числа a и b называются соответственно нижним и верхним пределами интегрирования (нижней и верхней границами интегрирования), а отрезок $\left[a,b\right]$ – областью интегрирования.

Теорема существования определенного интеграла. Всякая непрерывная на отрезке $\left[a,b\right]$ функция интегрируема, т. е. для такой функции существует предел интегральных сумм при стремлении шага разбиения к нулю.

Геометрический смысл определенного интеграла. Фигуру, ограниченную графиком функции $y = f\left(x\right)$, осью Ox и прямыми $x = a$, $x = b$, называют *криволинейной трапецией*. Если $f\left(x\right) \geq 0$ для всех $x \in \left[a, b\right]$, то площадь S криволинейной трапеции численно равна определенному интегралу от функции $f\left(x\right)$, взятому по отрезку $\left[a, b\right]$, т. е. $S = \int_a^b f\left(x\right) dx$.

Основные свойства определенного интеграла:

а) $\int_a^a f\left(x\right) dx = 0$;

б) $\int_a^b f\left(x\right) dx = -\int_b^a f\left(x\right) dx$;

в) $\int_a^b k \cdot f\left(x\right) dx = k \cdot \int_a^b f\left(x\right) dx$;

г) $\int_a^b \left(f_1\left(x\right) + f_2\left(x\right) \right) dx = \int_a^b f_1\left(x\right) dx + \int_a^b f_2\left(x\right) dx$;

д) $\int_a^b f\left(x\right) dx = \int_a^c f\left(x\right) dx + \int_c^b f\left(x\right) dx$.

Определенный интеграл с переменным верхним пределом. Пусть функция $f\left(x\right)$ непрерывна на отрезке $\left[a, b\right]$. Тогда она интегрируема на любом отрезке $[a, x]$, где $x \in [a, b]$. Функция $I(x) = \int\limits_a^x f(t)\, dt$ называется интегралом с переменным верхним пределом (переменная интегрирования обозначена буквой t, т. к. буквой x здесь обозначен верхний предел интеграла).

Теорема о дифференцировании интеграла по верхнему пределу: для непрерывной функции $f(x)$ производная интеграла по верхнему пределу равна самой функции, т. е. $I'(x) = f(x)$.

Формула Ньютона – Лейбница. Теорема. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, а функция $F(x)$ является первообразной для $f(x)$ на $[a, b]$, то справедлива формула Ньютона – Лейбница $\int\limits_a^b f(x)\, dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$.

Пример 11 – Вычислить определенный интеграл $\int\limits_0^2 f(x)\, dx$, где $f(x) = e^x$, если $x \in [0; 1]$, и $f(x) = 2x$, если $x \in (1; 2]$.

Решение

Так как интеграл от 0 до 2 равен сумме интегралов от 0 до 1 и от 1 до 2, то

$$\int\limits_0^2 f(x)\, dx = \int\limits_0^1 e^x\, dx + \int\limits_1^2 2x\, dx = e^x \Big|_0^1 + 2 \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_1^2 = e^1 - e^0 + 2^2 - 1^2 = e - 1 + 4 - 1 = e + 2.$$

Метод интегрирования подстановкой (*замена переменной*). Пусть функция $f(x)$ непрерывна в любой точке $x = \varphi(t)$, $t \in [\alpha; \beta]$ и пусть $a = \varphi(\alpha)$ и $b = \varphi(\beta)$. Тогда если функция $\varphi(t)$ имеет непрерывную производную, то справедлива формула $\int\limits_a^b f(x) dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t) dt.$ Эта формула называется *формулой замены переменной* интегрирования в определенном интеграле.

Пример 12 – Вычислить определенный интеграл $\int\limits_1^2 x \cos x^2\, dx$.

Решение

$$\int\limits_1^2 x \cos x^2\, dx = \begin{bmatrix} x = \varphi(t) = \sqrt{t},\ dx = d\sqrt{t},\ x^2 = t, \\ 1 = \sqrt{t},\ t = 1;\ 2 = \sqrt{t},\ t = 4 \end{bmatrix} =$$

$$= \int\limits_1^4 \sqrt{t} \cos t\, d\sqrt{t} = \int\limits_1^4 \sqrt{t} \cos t \frac{1}{2\sqrt{t}} dt = \frac{1}{2} \int\limits_1^4 \cos t\, dt = \frac{1}{2} \sin t \Big|_1^4 = \frac{1}{2}(\sin 4 - \sin 1).$$

Если не изменять пределы интегрирования, то решение будет следующим:

$$\int_1^2 x\cos x^2\,dx=\left[x=\varphi(t)=\sqrt{t},\ dx=d\sqrt{t}, x^2=t,\right]=\int_1^2\sqrt{t}\cos t\,d\sqrt{t}=\int_1^2\sqrt{t}\cos t\frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^2\cos t\ dt=\begin{bmatrix}t=x^2,\\ dt=2x\,dx\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\int_1^2\cos x^2\,2x\,dx=\frac{1}{2}\int_1^2 d\left(\sin x^2\right)=\sin x^2\Big|_1^2=(\sin\,4-\sin\,1).$$

Очевидно, что результат решения не изменился.

Интегрирование по частям. Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a,b]$, то справедлива формула $\int_a^b u\,dv=u\cdot v\Big|_a^b-\int_a^b v\,du.$

Пример 13 – Вычислить определенный интеграл $\int_0^{\pi} x\cos x\,dx.$

Решение

$$\int_0^{\pi} x\cos x\,dx=\begin{bmatrix}u=x, du=dx,\\ dv=\cos x\,dx, v=\sin x\end{bmatrix}=x\sin x\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin x\,dx=\cos x\Big|_0^{\pi}=-2.$$

Определенный интеграл от неотрицательной непрерывной функции есть площадь соответствующей криволинейной трапеции (в этом заключается геометрический смысл определенного интеграла). Если $f(x)\geq 0$, то криволинейная трапеция с основанием $[a,b]$, ограниченная сверху графиком этой функции, имеет площадь S, которую можно найти по формуле $S=\int_a^b f(x)\,dx$. Если $f(x)\leq 0$, то $\int_a^b f(x)\,dx<0$, а площадь соответствующей криволинейной трапеции будет $S=-\int_a^b f(x)\,dx=\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|$. Если требуется вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=f(x)$, $y=g(x)$, $x=a$, $x=b$ и $f(x)\geq g(x)$, то, рассматривая эту площадь как разность площадей соответствующих криволинейных трапеций, можно записать $S=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx=\int_a^b\left(f(x)-g(x)\right)dx$, где $f(x)-g(x)\geq 0$. Последняя формула остается справедливой и для случая $g(x)\leq 0$.

Пример 14 **–** Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=-x+8,\ y=0{,}5x+2,\ y=2.$

Решение

Найдем пределы интегрирования как абсциссы точек пересечения графиков функций: $x_A=0,\ x_B=4,\ x_C=6$. Тогда площадь

$$S_{ABC}=\left(\int_0^4 (0{,}5x+2)\,dx-\int_0^4 2\,dx\right)+\left(\int_4^6 (-x+8)\,dx-\int_4^6 2\,dx\right)=$$

$$=\int_0^4 \frac{x}{2}dx+\int_0^4 (-x+6)\,dx=\frac{x^2}{4}\Big|_0^4+\left(-\frac{x^2}{2}+6x\right)\Big|_4^6=6.$$

Вычисление длины дуги кривой. Теорема. Пусть кривая $\breve{AB}$ задана уравнением $f(x)$, где $f(x)$ – непрерывная функция, имеющая непрерывную первую производную во всех точках отрезка $[a,b]$. Тогда дуга $\breve{AB}$ имеет длину l, равную $l=\int\limits_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$.

Вычисление объема тела вращения. Пусть криволинейная трапеция с основанием $[a,b]$, ограниченная непрерывной кривой $y=f(x)$, вращается вокруг оси Ox. Тогда объем полученного тела вращения вычисляется по формуле

$$V=\pi\int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx \quad \text{или} \quad V=\pi\int_a^b y^2\,dx.$$

Несобственные интегралы. Интегралы на бесконечном промежутке. Пусть функция $y=f(x)$ определена и непрерывна на бесконечном промежутке $[a;+\infty)$. Тогда $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx=\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$ называется *несобственным интегралом с бесконечным верхним пределом* (бесконечной верхней границей) или *несобственным интегралом первого рода.* Если указанный предел существует, то интеграл называется *сходящимся*; если же предел не существует, в частности, бесконечен, то интеграл называется *расходящимся*.

Аналогично определяется несобственный интеграл с *бесконечным нижним пределом*: $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx=\lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)dx.$

Несобственный интеграл *с двумя бесконечными пределами* (границами) определяется формулой $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx$, где $c-$ любая фиксированная точка оси Ox; он существует только тогда, когда существует каждый из интегралов $\int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx$ и $\int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx$.

Геометрический смысл несобственного интеграла первого рода: несобственный интеграл первого рода выражает площадь бесконечно длинной криволинейной трапеции.

Если интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} |f(x)|\, dx$ сходится, то интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ сходится *абсолютно*. Если $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ сходится, но $\int\limits_{a}^{+\infty} |f(x)|\, dx$ расходится, то говорят, что он *сходится условно*. Сходящиеся интегралы от неотрицательных функций сходятся абсолютно.

Для установления сходимости интеграла $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ используют следующие *признаки сравнения*:

а) если на интервале $[a;+\infty)$ функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны и выполняются условия $0 \le f(x) \le \varphi(x)$, $0 \le f(x) \le \varphi(x)$, а интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} \varphi(x)dx$ сходится, то интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} \varphi(x)dx$ тоже сходится; если же $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ расходится, то интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} \varphi(x)dx$ также расходится;

б) *предельный признак сравнения*: если для $\forall x \ge a$ существует конечный предел $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} \ne 0$, то интегралы $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ и $\int\limits_{a}^{+\infty} \varphi(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Пример 15 **–** Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость:

1) $\int\limits_{-1}^{+\infty} \dfrac{dx}{x^2+4x+5}$; 2) $\int\limits_{0}^{+\infty} \dfrac{x\,dx}{\sqrt{x^2+1}}$.

Решение

1 Подынтегральная функция непрерывна на $[-1;+\infty)$. Тогда

$$\int_{-1}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+5}=\int_{-1}^{+\infty}\frac{dx}{\left(x^2+4x+4\right)+1}=\int_{-1}^{+\infty}\frac{d\left(x+2\right)}{\left(x+2\right)^2+1}=\lim_{b\to+\infty}\left(\operatorname{arctg}\left(x+2\right)\right)\Big|_{-1}^{b}=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left(\operatorname{arctg}\left(b+2\right)-\operatorname{arctg}1\right)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}.$$

2 Подынтегральная функция непрерывна на интервале $\left[0;+\infty\right)$. Тогда

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+1}}=\int_{0}^{+\infty}\frac{d\left(x^2+1\right)}{2\sqrt{x^2+1}}=\lim_{b\to+\infty}\sqrt{x^2+1}\,\Big|_{0}^{b}=\lim_{b\to+\infty}\left(\sqrt{b^2+1}-1\right)=+\infty-1=+\infty.$$

Несобственный интеграл расходится.

Интегралы от неограниченных функций. Пусть функция $y=f\left(x\right)$ является разрывной в точке b отрезка $\left[a;b\right]$ и непрерывной на отрезке $\left[a;c\right]$, где $c-$ любая точка интервала $\left(a;b\right)$. Если при $c\to b$ *слева* определенный интеграл $\int_a^c f\left(x\right)dx$ стремится к конечному пределу, то этот предел называется несобственным интегралом от разрывной функции или *несобственным интегралом второго рода* и обозначается символом $\int_a^b f\left(x\right)dx$. Таким образом, $\int_a^b f\left(x\right)dx=\lim\limits_{c\to b-0}\int_a^c f\left(x\right)dx$. В этом случае несобственный интеграл существует или сходится. Если указанный предел не существует, то интеграл не существует или расходится.

Если функция $f\left(x\right)$ разрывна при приближении *справа* к точке a, то тогда $\int_a^b f\left(x\right)dx=\lim\limits_{c\to a+0}\int_c^b f\left(x\right)dx,\ a<c<b$. Если функция $f\left(x\right)$ разрывна в некоторой внутренней точке d отрезка $\left[a;b\right]$, то этот отрезок разбивается на два отрезка: $\left[a;d\right]$ и $\left[d;b\right]$. Если несобственные интегралы от данной функции существуют на каждом из этих отрезков, то $\int_a^b f\left(x\right)dx=\int_a^d f\left(x\right)dx+\int_d^b f\left(x\right)dx$.

Геометрический смысл несобственных интегралов второго рода: несобственный интеграл второго рода выражает площадь бесконечно высокой криволинейной трапеции.

Пример 16 – Исследовать на сходимость интегралы.

1 $\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \int\limits_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx + \int\limits_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx = 3+3= 6$ (подынтегральная функция разрывна в точке $x = 0$, т. к. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty$). Данный интеграл сходится.

2 $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^5+1}} dx$. Сравним подынтегральную функцию $\frac{x}{\sqrt{x^5+1}}$ с функцией $\frac{x}{\sqrt{x^5}}$ в интервале $[1; +\infty)$: $\frac{x}{\sqrt{x^5+1}} < \frac{x}{\sqrt{x^5}} = \frac{1}{\sqrt{x^3}}$. Но $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3}} = \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}$ сходится, следовательно, сходится и данный интеграл.

5 Дифференциальное исчисление функций многих переменных

Понятие функции нескольких переменных. Пусть задано множество D упорядоченных пар чисел (x, y). Зависимость f, при которой каждой паре чисел (x, y) ставится в соответствие единственное число $z \in R$, называется *функцией двух переменных*, определенной на множестве D, и записывается в виде $z = f(x, y)$. При этом переменные x и y называются *аргументами* или *независимыми переменными*, а z – *функцией* или *зависимой переменной*.

Множество D всех пар значений аргументов данной функции называется *областью определения* (или областью задания) функции и обозначается $D(f)$. Если $D = D(f)$ не указано, то областью определения называется множество всех пар чисел (x, y), при которых функция имеет смысл. Множество значений, принимаемых $z = f(x, y)$ в области определения, называется *областью значений* (областью изменения) этой функции и обозначается $E(f)$.

Графиком функции двух переменных является поверхность, образованная множеством точек $M(x, y, z)$ пространства, координаты которых удовлетворяют уравнению $z = f(x, y)$.

Линией уровня функции $z = f(x, y)$ называется множество точек плоскости xOy, в которых функция принимает одно и то же значение C.

Величина U называется *функцией n переменных* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, если каждой совокупности $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ из некоторой области n-мерного пространства ставится в соответствие определенное значение U.

Функция n независимых переменных записывается в виде $U = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$.

Предел функции двух переменных. Множество точек $M\left(x, y\right)$ плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству $\sqrt{\left(x - x_0\right)^2 + \left(y - y_0\right)^2} < \delta$, называется δ-окрестностью точки $M_0\left(x_0, y_0\right)$.

Число A называется *пределом функции* $z = f\left(x, y\right)$ при $x \to x_0$ и $y \to y_0$ или, что то же самое, при $M\left(x, y\right) \to M_0\left(x_0, y_0\right)$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что для всех $x \neq x_0$ и $y \neq y_0$, удовлетворяющих условию $\sqrt{\left(x - x_0\right)^2 + \left(y - y_0\right)^2} < \delta$, выполняется неравенство $\left|f\left(x, y\right) - A\right| < \varepsilon$. Записывают $A = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f\left(x, y\right)$ или $A = \lim\limits_{M \to M_0} f\left(M\right)$.

Из определения следует, что если предел существует, то он не зависит от пути, по которому $M \to M_0$.

Непрерывность функции двух переменных. Функция $z = f\left(x, y\right)$ (или $z = f\left(M\right)$) называется непрерывной в точке $M_0\left(x_0, y_0\right)$, если:

а) она определена в этой точке и некоторой ее окрестности;

б) имеет предел $A = \lim\limits_{M \to M_0} f\left(M\right)$;

в) предел равен значению функции z в точке M_0, т. е. $\lim\limits_{M \to M_0} f\left(M\right) = f\left(M_0\right)$ или $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f\left(x, y\right) = f\left(x_0, y_0\right)$.

Точки, в которых нарушается хотя бы одно условие непрерывности, называются *точками разрыва*.

Для функции $z = f\left(x, y\right)$ рассмотрим *приращения аргументов* $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$ и *полное приращение функции* $\Delta z = z - z_0 = f\left(x, y\right) - f\left(x_0, y_0\right)$ в точке $M_0\left(x_0, y_0\right)$.

Функция $z = f\left(x, y\right)$ называется *непрерывной* в точке $M_0\left(x_0, y_0\right)$, если выполняется равенство $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0$.

Пример 1 **–** Найти область определения функции $z = \arcsin\left(x^2 + y^2 - 3\right)$.

Решение

Функция определена при выполнении условия $-1 \le x^2 + y^2 - 3 \le 1$, которое равносильно условию $2 \le x^2 + y^2 \le 4$. Граничными линиями области определения являются окружности $x^2 + y^2 = 2$ и $x^2 + y^2 = 4$, которые также принадлежат этой окружности. Таким образом, область определения функции состоит из точек, лежащих между указанными окружностями, и точек, лежащих на этих окружностях.

Пример 2 – Найти предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+4}-2}$.

Решение

Преобразуем выражение под знаком предела, умножив числитель и знаменатель дроби на выражение $\sqrt{x^2+y^2+4}+2$, сопряженное знаменателю.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+4}-2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\left(x^2+y^2\right)\left(\sqrt{x^2+y^2+4}+2\right)}{\left(\sqrt{x^2+y^2+4}-2\right)\left(\sqrt{x^2+y^2+4}+2\right)} =$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\left(x^2+y^2\right)\left(\sqrt{x^2+y^2+4}+2\right)}{x^2+y^2+4-4} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\left(x^2+y^2\right)\left(\sqrt{x^2+y^2+4}+2\right)}{x^2+y^2} =$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left(\sqrt{x^2+y^2+4}+2\right) = 4.$$

Частные производные функции двух переменных. Пусть задана функция $z=f\left(x;y\right)$, которая определена и непрерывна в некоторой области D. Будем считать, что точки с координатами $\left(x;y\right), \left(x+\Delta x;y\right), \left(x;y+\Delta y\right)$, $\left(x+\Delta x;y+\Delta y\right)$, где $\Delta x, \Delta y$ – приращения аргументов, также принадлежат области D.

Разности $\Delta_x z = f\left(x+\Delta x;y\right)-f\left(x;y\right)$ и $\Delta_y z = f\left(x;y+\Delta y\right)-f\left(x;y\right)$ называются *частным приращением функции* $z=f\left(x;y\right)$ по независимым переменным x и y. *Разность* $\Delta z = f\left(x+\Delta x;y+\Delta y\right)-f\left(x;y\right)$ называется *полным приращением функции* $z=f\left(x;y\right)$, соответствующим приращениям аргументов Δx и Δy. В общем случае $\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z$.

Частной производной функции $z=f\left(x;y\right)$ по переменным x и y называется предел отношения соответствующего частного приращения $\Delta_x z$ и $\Delta_y z$ к приращению данной переменной при условии, что приращение переменной стремится к нулю:

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f\left(x+\Delta x;y\right)-f\left(x;y\right)}{\Delta x};$$

$$z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x; y + \Delta y) - f(x; y)}{\Delta y}.$$

Частная производная функции нескольких переменных определяется как производная функции одной из этих переменных при условии постоянства значений остальных независимых переменных. Поэтому частные производные функции $z = f(x; y)$ находят по формулам и правилам вычисления производных функции одной переменной (при этом соответственно x или y считается постоянной величиной).

Пример 3 **–** Найти частные и полное приращение функции $z = xy^2 - \dfrac{x}{y}$ в точке $M_0(3; -2)$ при приращениях аргументов $\Delta x = 0{,}1$ и $\Delta y = -0{,}05$.

Решение

Так как $x_0 = 3$, $y_0 = -2$, то $x_0 + \Delta x = 3{,}1$, $y_0 + \Delta y = -2{,}05$, $M_1(3{,}1; -2{,}05)$.

Определим $z(M_0) = z(3; -2) = 3 \cdot (-2)^2 + \dfrac{3}{2} = 13{,}50.$

Тогда

$$z(x_0 + \Delta x; y_0) = z(3{,}1; -2) = 3{,}1 \cdot (-2)^2 + \frac{3{,}1}{2} = 13{,}95;$$

$$z(x_0; y_0 + \Delta y) = z(3; -2{,}05) = 3 \cdot (-2{,}05)^2 + \frac{3}{2{,}05} = 14{,}07;$$

$$z(M_1) = z(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) = z(3{,}1; -2{,}05) = 3{,}1 \cdot (-2{,}05)^2 + \frac{3{,}1}{2{,}05} = 14{,}54.$$

Таким образом,

$$\Delta_x z = z(x_0 + \Delta x; y_0) - z(x_0; y_0) = 0{,}45;$$

$$\Delta_y z = z(x_0; y_0 + \Delta y) - z(x_0; y_0) = 0{,}57;$$

$$\Delta z = z(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - z(x_0; y_0) = 14{,}54 - 13{,}50 = 1{,}04.$$

Очевидно, что $\Delta z = 1{,}04 \ne 0{,}45 + 0{,}57 = 1{,}02 = \Delta_x z + \Delta_y z$.

Пример 4 – Найти частные производные функции $z=\ln\left(x^6+y^5+4xy-3x+7y\right)$.

Решение

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(y=\text{const}\right)=\frac{1}{x^6+y^5+4xy-3x+7y}\cdot\left(x^6+y^5+4xy-3x+7y\right)'=$$

$$=\frac{1}{x^6+y^5+4xy-3x+7y}\cdot\left(6x^5+4y-3\right)=\frac{6x^5+4y-3}{x^6+y^5+4xy-3x+7y}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(x=\text{const}\right)=\frac{1}{x^6+y^5+4xy-3x+7y}\cdot\left(x^6+y^5+4xy-3x+7y\right)'=$$

$$=\frac{1}{x^6+y^5+4xy-3x+7y}\cdot\left(5y^4+4x+7\right)=\frac{5y^4+4x+7}{x^6+y^5+4xy-3x+7y}.$$

Частными производными второго порядка называются частные производные, взятые от частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=x''_{xx};\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=x''_{yy}.$$

Частная производная второго и более высокого порядка, взятая по различным переменным, называется *смешанной частной производной*:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=x''_{xy};\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=x''_{yx}.$$

Если частные производные высшего порядка непрерывны, то смешанные производные одного порядка, отличающиеся лишь порядком дифференцирования, равны между собой.

Пример 5 – Найти частные производные второго порядка функции $z=7x^5y^3+8xy+5x-3y$.

Решение

Найдем частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(y=\text{const}\right)=\left(7x^5y^3+8xy+5x-3y\right)'_x=35x^4y^3+8y+5;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(x = \text{ const}\right) = \left(7x^5y^3 + 8xy + 5x - 3y\right)_y' = 21x^5y^2 + 8x - 3.$$

Найдем частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(35x^4y^3 + 8y + 5\right)_x' = 140x^3y^3; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(35x^4y^3 + 8y + 5\right)_y' = 105x^4y^2 + 8;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(21x^5y^2 + 8x - 3\right)_y' = 42x^5y; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \left(21x^5y^2 + 8x - 3\right)_x' = 105x^4y^2 + 8.$$

Очевидно, что $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

Теорема Шварца. Если смешанные частные производные второго порядка непрерывны, то они равны между собой. Другими словами, результат смешанного дифференцирования не зависит от порядка.

Полный дифференциал функции двух переменных. Пусть функция $z = f(x;\, y)$ определена в некоторой окрестности точки $M(x;\, y)$ и полное приращение этой функции в указанной точке равняется $\Delta z = f(x + \Delta x;\, y + \Delta y) - f(x;\, y)$.

Функция $z = f(x;\, y)$ называется *дифференцируемой в точке* $M(x;\, y)$, если ее полное приращение в этой точке можно представить в виде

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y,$$

где $\alpha = \alpha(\Delta x, \Delta y) \to 0$ и $\beta = \beta(\Delta x, \Delta y) \to 0$ при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$. Сумма первых двух слагаемых в этом равенстве называется *главной частью приращения функции.*

Главная часть полного приращения функции $z = f(x;\, y)$, линейно зависящая от приращения независимых переменных Δx и Δy, называется *полным дифференциалом функции* $z = f(x;\, y)$ и обозначается dz. Если функция имеет непрерывные частные производные, то полный дифференциал существует и равен $dz = A\Delta x + B\Delta y$.

Необходимое условие дифференцируемости функции: если функция $z = f(x;\, y)$ дифференцируема в точке $M(x;\, y)$, то она непрерывна в этой точке, имеет в ней частные производные, причем $\dfrac{\partial z}{\partial x} = A$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = B$.

Так как приращения независимых переменных Δx и Δy совпадают с их дифференциалами dx и dy, т. е. $dx = \Delta x, dy = \Delta y$, то дифференциал функции $z = f(x;\, y)$ вычисляется по формуле $dz = \dfrac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + \dfrac{\partial z}{\partial y} \cdot dy$ или $dz = z_x'\, dx + z_y'\, dy$.

Приняты также обозначения: $d_x z = z_x'\, dx$ и $d_y z = z_y'\, dy -$ *частные диффе-*

ренциалы функции $z = f(x; y)$.

Применение дифференциала в приближенных вычислениях. Из определения дифференциала функции $z = f(x; y)$ следует, что при достаточно малых $|\Delta x|$ и $|\Delta y|$ имеет место приближенное равенство $\Delta z \approx dz$.

Так как полное приращение $\Delta z = f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y)$,то получается формула приближенного вычисления значения функции

$$f(x + \Delta x; y + \Delta y) \approx f(x; y) + f'_x(x; y)\Delta x + f'_y(x; y)\Delta y.$$

Пример 6 **–** Найти полный дифференциал функции $z = \cos \dfrac{x^2 + y^2}{x^3 + y^3}$.

Решение

Найдем частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\sin\frac{x^2 + y^2}{x^3 + y^3} \cdot \left(\frac{x^2 + y^2}{x^3 + y^3}\right)'_x = -\sin\frac{x^2 + y^2}{x^3 + y^3} \cdot \frac{2x\left(x^3 + y^3\right) - 3x^2\left(x^2 + y^2\right)}{\left(x^3 + y^3\right)^2} =$$

$$= -\sin\frac{x^2 + y^2}{x^3 + y^3} \cdot \frac{-x^4 - 3x^2y^2 + 2xy^3}{\left(x^3 + y^3\right)^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\sin\frac{x^2 + y^2}{x^3 + y^3} \cdot \left(\frac{x^2 + y^2}{x^3 + y^3}\right)'_x = -\sin\frac{x^2 + y^2}{x^3 + y^3} \cdot \frac{2x\left(x^3 + y^3\right) - 3x^2\left(x^2 + y^2\right)}{\left(x^3 + y^3\right)^2} =$$

$$= -\sin\frac{x^2 + y^2}{x^3 + y^3} \cdot \frac{-x^4 - 3x^2y^2 + 2xy^3}{\left(x^3 + y^3\right)^2}.$$

Запишем частные дифференциалы: $d_x z = \dfrac{x^4 + 3x^2y^2 - 2xy^3}{\left(x^3 + y^3\right)^2} \cdot \sin\dfrac{x^2 + y^2}{x^3 + y^3}dx;$ $d_y z = \dfrac{y^4 + 3x^2y^2 - 2x^3y}{\left(x^3 + y^3\right)^2} \cdot \sin\dfrac{x^2 + y^2}{x^3 + y^3}dy.$ Тогда полный дифференциал функции

$$dz = \frac{1}{\left(x^3 + y^3\right)^2} \cdot \sin\frac{x^2 + y^2}{x^3 + y^3} \cdot \left[x\left(x^3 + 3xy^2 - 2y^3\right)dx + y\left(y^3 + 3x^2y - 2x^3\right)dy\right].$$

Дифференциалы высших порядков. Вторым дифференциалом или *дифференциалом второго порядка* для функции z называется выражение вида

$d^2z = d\left(dz\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2.$ Третьим дифференциалом или *дифференциалом третьего порядка* для функции z называется выражение $d^3z = d\left(d^2z\right) = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}dx^2dy + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}dxdy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy^3.$

Пример *7* – Найти дифференциал второго порядка d^2z для функции $z = \frac{xy}{x-y}$.

Решение

Найдем первый дифференциал: $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \frac{-y^2}{\left(x-y\right)^2}dx + \frac{x^2}{\left(x-y\right)^2}dy.$

Находим вторые производные:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-y^2}{\left(x-y\right)^2}\right) = \frac{2y^2}{\left(x-y\right)^3}; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2}{\left(x-y\right)^2}\right) = \frac{2x^2}{\left(x-y\right)^3};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y^2}{\left(x-y\right)^2}\right) = \frac{-2xy}{\left(x-y\right)^3}.$$

Тогда $d^2z = d^2\left(\frac{xy}{x-y}\right) = \frac{2\left(y^2dx^2 - 2xy\,dx\,dy + x^2dy^2\right)}{\left(x-y\right)^3}.$

Пример 8 – Вычислить приближенно $1{,}07^{3{,}97}$.

Решение

Рассмотрим функцию $f\left(x;\, y\right) = x^y$. Тогда данное число $1{,}07^{3{,}97}$ является частным значением этой функции при следующих значениях: $x = 1{,}07$, $y = 3{,}97$. Так как $1{,}07 = 1 + 0{,}07$; $3{,}97 = 4 - 0{,}03$, то принимаем $x_0 = 1,\ y_0 = 4$. Тогда $\Delta x = 0{,}07,\ \Delta y = -0{,}03$.

Найдем следующие значения:

$$f'_x\left(x;\, y\right) = yx^{y-1};\ f'_y\left(x;\, y\right) = x^y \ln x;\ f'_y\left(x;\, y\right) = x^y \ln x;\ f\left(1;\, 4\right) = 1^4 = 1;$$

$$f'_x\left(1;\, 4\right) = 4 \cdot 1^{4-1} = 4;\ f'_y\left(x;\, y\right) = 1^4 \ln 1 = 0.$$

Тогда $df(1;4)=4\cdot 0{,}07+0\cdot(-0{,}03)=0{,}28,$ значит, $1{,}07^{3{,}97}\approx 1+0{,}28=1{,}28.$

Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Плоскость P, которая касается графика дифференцируемой функции $z=f(x;y)$, т. е. поверхности, в единственной точке $M_0(x_0;y_0;z_0)$, называется *касательной плоскостью*, а ее уравнение имеет вид $f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)=z-f(x_0,y_0).$

Прямая L, проходящая через точку касания $M_0(x_0;y_0;z_0)$ и перпендикулярная касательной плоскости, называется *нормалью*, и ее уравнение имеет вид:

$$\frac{x-x_0}{f'_x(x_{0,},y_0)}=\frac{y-y_0}{f'_y(x_{0,},y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}.$$

Если функция задана неявно уравнением $F(x;y;z)=0,$ то уравнение касательной плоскости в точке $M_0(x_0;y_0;z_0)$ имеет вид:

$$F'_x(M_0)(x-x_0)+F'_y(M_0)(y-y_0)+F'_z(M_0)(z-z_0)=0.$$

Если функция задана неявно, т. е. уравнением $F(x;y;z)=0,$ то уравнение нормали в точке $M_0(x_0;y_0;z_0)$ имеет вид:

$$\frac{x-x_0}{F'_x(M_{0,})}=\frac{y-y_0}{F'_y(M_{0,})}=\frac{z-z_0}{F'_z(M_{0,})}.$$

Пример 9 **–** Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z=x^2-16x+y^2-10y+23$ в точке $M_0(1;2)$.

Решение

Найдем $z_0=f(x_0;y_0)=1^2-16+2^2-10\cdot 2+23=-8,$ $z'_x=2x-16,$ $z'_y=2y-10,$ $z'_x(M_0)=z'_x(x_0;y_0)=2\cdot 1-16=-14,$ $z'_y(M_0)=z'_y(x_0;y_0)=2\cdot 2-10=-6.$

Запишем уравнение касательной плоскости в виде $z-(-8)=-14(x-1)-6(y-2)$ и преобразуем его. Получим $14x+6y+z-18=0$ – уравнение касательной плоскости.

Запишем уравнение нормали: $\dfrac{x-1}{-14}=\dfrac{y-2}{-6}=\dfrac{z+8}{-1}$ или $\dfrac{x-1}{14}=\dfrac{y-2}{6}=\dfrac{z+8}{1}.$

Экстремум функции двух переменных. Пусть функция $z=f(x;y)$ определена в некоторой области D и точка $M_0(x_0;y_0)\in D.$ Точка $M_0(x_0;y_0)$ называется точкой *локального максимума* (*минимума*) функции $z=f(x;y)$, если существует такая δ-окрестность точки $(x_0;y_0)$, что для каждой точки $M(x;y)$ из этой окрестности, отличной от точки $M_0(x_0; y_0)$, выполняется неравенство $f(x; y) < f(x_0; y_0)$ $\left(f(x; y) > f(x_0; y_0)\right)$.

Значение функции в точке максимума (минимума) называется *максимумом* (*минимумом*) функции. Максимум и минимум функции называются *экстремумами* функции.

Необходимые условия существования экстремума. Если функция $z = f(x; y)$ имеет в точке $M_0(x_0; y_0)$ экстремум, то ее частные производные в этой точке равны нулю либо не существуют:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0} = 0, \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0} = 0.$$

Точки, в которых частные производные первого порядка функции $z = f(x; y)$ равны нулю, называются *стационарными* (*критическими*) *точками* функции.

Достаточные условия существования экстремума. Пусть функция $z = f(x; y)$ в некоторой области, содержащей точку $M_0(x_0; y_0)$, имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно и частные производные в этой точке равны нулю. Введем следующие обозначения:

$$A = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_0}; \; B = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{M_0}; \; C = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{M_0}; \; \Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2.$$

Тогда:

а) если $\Delta > 0$, то функция $z = f(x; y)$ имеет в точке $M_0(x_0; y_0)$ максимум, если $A < 0$;

б) если $\Delta > 0$, то функция $z = f(x; y)$ имеет в точке $M_0(x_0; y_0)$ минимум, если $A > 0$;

в) если $\Delta < 0$, то функция в точке $M_0(x_0; y_0)$ экстремума не имеет;

г) если $\Delta = 0$, то экстремум в точке $M_0(x_0; y_0)$ может быть, а может и не быть; необходимы дополнительные исследования.

Схема исследования функции на экстремум:

а) найти область определения функции;

б) определить критические точки функции, для этого найти частные производные, приравнять их к нулю и решить полученную систему;

в) найти частные производные второго порядка и вычислить их значения в критических точках;

г) выяснить знак выражения $AC - B^2$ и сделать вывод на основании достаточных условий;

д) вычислить значения функции в точках экстремума.

Пример 10 – Найти локальные экстремумы функции $z = x^2 + y^2 - xy + 9x - 6y + 22.$

Решение

Область определения функции $D(z)$ – вся плоскость xOy. Найдем частные производные: $z'_x = 2x - y + 9$, $z'_y = 2y - x - 6$. Критические точки находим как решение системы $\begin{cases} 2x - y + 9 = 0; \\ 2y - x - 6 = 0. \end{cases}$ Система имеет единственное решение: $x = -4$, $y = 1$. Получили одну критическую точку $M_0(-4; 1)$.

Находим вторые производные: $z''_{xx} = 2$, $z''_{yy} = 2$, $z''_{xy} = z''_{yx} = -1$. Вторые производные являются постоянными во всей области определения, а значит, и в критической точке. В соответствии с введенными ранее обозначениями имеем $A = z''_{xx}(-4; 1) = 2$, $B = z''_{yy}(-4; 1) = 2$, $C = z''_{xy}(-4; 1) = -1$. Вычислим значение $\Delta = AB - C^2 = 3 > 0$. Значит, в точке $M_0(-4; 1)$ экстремум есть, а т. к. $A = 2 > 0$ $(B = 2 > 0)$, то в точке $M_0(-4; 1)$ функция имеет локальный минимум и $z_{\min} = z(-4; 1) = 1$.

Производная по направлению и градиент. Частная производная функции $z = f(x; y)$ выражает скорость изменения функции в соответствующем направлении: $z'_x = \dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $z'_y = \dfrac{\partial z}{\partial y}$ определяют скорость изменения функции в направлении оси Ox и Oy соответственно.

Пусть функция $z = f(x; y)$ определена и дифференцируема в некоторой окрестности точки $M_0(x_0; y_0)$. Для характеристики скорости изменения этой функции в точке M_0 по направлению к произвольной точке $M(x; y)$, т. е. вдоль некоторого вектора $\overrightarrow{M_0M}(x - x_0; y - y_0) = \vec{l}(l_x; l_y)$, вводится понятие производной по направлению. Производной функции $z = f(x; y)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$ по направлению вектора $\vec{l}(l_x; l_y) = \overrightarrow{M_0M}(x - x_0; y - y_0)$ называется предел отношения приращения этой функции к полному приращению аргумента, т. е.

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{f(x; y) - f(x_0; y_0)}{\Delta l},$$

где Δl – расстояние между точками M_0 и M, $\Delta l = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$.

Обозначение и расчетная формула имеют вид $z'_l(M_0) = \left.\dfrac{\partial z}{\partial l}\right|_{M_0} = z'_x(M_0)\cos\alpha + z'_y(M_0)\cos\beta$, где $z'_x(M_0), z'_y(M_0)$ – значения частных производных функции в точке M_0; $\cos\alpha = \frac{l_x}{|\vec{l}|}$, $\cos\beta = \frac{l_y}{|\vec{l}|}$ – направляющие косинусы вектора $\vec{l}\left(l_x; l_y\right)$, их основное свойство $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$ $\left(\cos\beta = \sin\alpha\right)$; $\left|\vec{l}\right| = \sqrt{l_x^{\ 2} + l_y^{\ 2}}$.

Так как производная по направлению $\vec{l}$ характеризует скорость изменения функции в точке $M_0\left(x_0; y_0\right)$ по направлению $\vec{l}$, то:

– если $z'_l\left(M_0\right) > 0$, то функция в этом направлении возрастает;

– если $z'_l\left(M_0\right) < 0$, то функция в этом направлении убывает;

– если $z'_l\left(M_0\right) = 0$, то функция в этом направлении не изменяется.

Направление, или вектор, вдоль которого $z'_l\left(M_0\right)$ максимальна, называют *градиентом.* Его обозначают $\operatorname{grad} z\big|_{M_0} = \operatorname{grad} z\left(M_0\right)$. Для функции двух переменных $z = f\left(x; y\right)$ в точке $M_0\left(x_0; y_0\right)$ градиент определяется по формуле

$$\operatorname{grad} z\big|_{M_0} = \operatorname{grad} z\left(M_0\right) = z'_x\left(M_0\right)\vec{i} + z'_y\left(M_0\right)\vec{j},$$

где i, j – единичные векторы декартова базиса; $z'_x\left(M_0\right)$, $z'_y\left(M_0\right)$ – координаты градиента, т. е. $\operatorname{grad} z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\bigg|_{M_0}; \frac{\partial z}{\partial y}\bigg|_{M_0}\right)$.

Физический смысл градиента: градиент указывает направление наибыстрейшего возрастания функции. *Наибольшая скорость* наибыстрейшего возрастания функции равна модулю градиента. Таким образом, $\max\left(z'_l\left(M_0\right)\right) = \left|\operatorname{grad} z\left(M_0\right)\right| = \sqrt{\left(z'_x\left(M_0\right)\right)^2 + \left(z'_y\left(M_0\right)\right)^2}$.

Пример 11 – Найти производную функции $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ в точке $M_0\left(4; 3\right)$ по направлению градиента функции z.

Решение

По условию вектор $\vec{l}$ совпадает с градиентом функции $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ в точке $M_0\left(4; 3\right)$. Тогда $\operatorname{grad} z = \frac{\partial z}{\partial x}\bigg|_{M_0} + \frac{\partial z}{\partial y}\bigg|_{M_0} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\Bigg|_{M_0}\vec{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\Bigg|_{M_0}\vec{j} = \frac{4}{5}\vec{i} + \frac{3}{5}\vec{j}$.

Значит, $\frac{\partial z}{\partial l} = \left|\operatorname{grad} z\right| = \sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2} = 1$.

6 Интегральное исчисление функций многих переменных

Двойной интеграл. Пусть в ограниченной замкнутой области D плоскости xOy задана непрерывная ограниченная функция $z = f(x; y)$. Разобьем область D на n элементарных (частичных) областей D_i $\left(i = \overline{1,n}\right)$, площади которых обозначим ΔS_i. Наибольшее расстояние между точками на границе в каждой частичной области обозначим d_i, а наибольший из диаметров всех областей $\Delta = \max\limits_{i=\overline{1,n}} \{d_i\}$. В каждой области произвольным образом выберем точку $M_i(x_i; y_i)$ и найдем значение функции $f(M_i)$. Умножим это значение функции на площадь ΔS_i и составим сумму таких произведений $\sum\limits_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i$. Эту сумму называют *интегральной* суммой.

Если существует конечный предел интегральной суммы, не зависящий от способа разбиения области D на частичные области D_i и от выбора точек разбиения $M_i(x_i; y_i)$ в них, то он называется *двойным интегралом* от функции $z = f(x; y)$ по области D и обозначается как $\iint\limits_D f(x; y)\,dS = \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \Delta\to 0}} \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i; y_i)\,dS_i$, где $dS -$ элемент площади области D.

Геометрический смысл двойного интеграла: двойной интеграл от *неотрицательной* функции $z = f(x; y)$ численно равен объему цилиндрического тела, ограниченного сверху поверхностью $z = f(x; y)$, снизу – замкнутой областью D плоскости xOy, с боков – цилиндрической поверхностью, образующая которой параллельна оси Oz, а направляющей служит граница области D, т. е. $\iint\limits_D f(x; y)\,dxdy = V$.

Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах:

а) пусть в плоскости xOy область D представляет собой криволинейную трапецию, ограниченную сверху линией $y = \varphi_2(x)$, снизу – линией $y = \varphi_1(x)$, при этом функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ непрерывны, а с боков – прямыми $x = a$ и $x = b$. Область D называется *простой или правильной* в направлении оси Oy, если любая прямая, параллельная оси Oy, пересекает границу области не более чем в двух точках (вход в область и выход). В этом случае двойной интеграл вычисляется по формуле $\iint\limits_D f(x; y)\,dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y=\varphi_1(x)}^{y=\varphi_2(x)} f(x; y)\,dy$.

Правая часть формулы называется *двукратным или повторным интегра-*

лом по области D от функции $f(x;y)$. Интеграл $\int\limits_{y=\varphi_1(x)}^{y=\varphi_2(x)} f(x;y)dy$ называют внутренним, а интеграл $\int\limits_a^b dx$ – внешним. При вычислении двойного интеграла сначала берут внутренний интеграл по переменной y, считая x постоянной, а затем – внешний по переменной x;

б) пусть область D ограничена справа линией $y=\psi_2(x)$, слева – линией $y=\psi_1(x)$, при этом функции $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ непрерывны, снизу – прямой $y=c$ и сверху прямой $y=d$. Область D является простой в направлении оси Ox. Тогда $\iint\limits_D f(x;y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{y=\psi_1(x)}^{y=\psi_2(x)} f(x;y)dx$.

При вычислении двойного интеграла в этом случае сначала берут внутренний интеграл по переменной x, считая y постоянной, а затем – внешний по переменной y. Если область D *прямоугольная*, то двойной интеграл вычисляется по формуле $\iint\limits_D f(x;y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x;y)dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x;y)dx$.

Пример 1 **–** Вычислить $\iint\limits_D (2x+y^3)dxdy$, где область D ограничена линиями $x=1$, $x=2$, $y=0$, $y=2$.

Решение

Область D прямоугольная, поэтому $\iint\limits_D (2x+y^3)dxdy = \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^2 (2x+y^3)dy =$

$$= \int\limits_1^2 \left(2xy + \frac{y^4}{4} \right)\Bigg|_{y=0}^{y=2} dx = \int\limits_1^2 (4x+4)dx = (2x^2+4x)\Big|_1^2 = (8+8)-(2+4)=10.$$

Изменим порядок интегрирования: $\iint\limits_D (2x+y^3)dxdy = \int\limits_0^2 dy \int\limits_1^2 (2x+y^3)dx =$

$$= \int\limits_0^2 \left(2\frac{x^2}{2} + y^3x \right)\Bigg|_{x=1}^{x=2} dy = \int\limits_0^2 (x^2+y^3x)\Big|_{x=1}^{x=2} dy = \int\limits_0^2 (4+2y^3-1-y^3)dy = \int\limits_0^2 (y^3+3)dy =$$

$= \left(\dfrac{y^4}{4} + 3y \right)\Bigg|_0^2 = 4+6=10$. Результат не зависит от порядка интегрирования.

Пример 2 – Вычислить $\iint\limits_D \left(x^2 + yx + 2y^2\right)dxdy$, если область D ограничена линиями $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1 - x$.

Решение

Относительно осей Ox и Oy область D является простой. В этом случае

$$\iint\limits_D \left(x^2 + yx + 2y^2\right)dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{y=0}^{y=1-x} \left(x^2 + yx + 2y^2\right)dy =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(x^2 y + \frac{xy^2}{2} + \frac{2y^3}{3} \right)\Bigg|_{y=0}^{y=1-x} dx == \int\limits_0^1 \left(x^2(1-x) + x \cdot \frac{(1-x)^2}{2} + 2 \cdot \frac{(1-x)^3}{3} \right)dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(x^2 - x^3 + \frac{x - 2x^2 + x^3}{2} + \frac{2 - 6x + 6x^2 - 2x^3}{3} \right)dx = \int\limits_0^1 \left(-\frac{7}{6}x^3 + 2x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{2}{3} \right)dx =$$

$$= \left(-\frac{7x^4}{24} + \frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{4} + \frac{2x}{3} \right)\Bigg|_0^1 = -\frac{7}{24} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} + \frac{2}{3} = \frac{7}{24}.$$

7 Задания для самостоятельной работы

1 Найти области определения функций:

а) $f(x) = \dfrac{6x - 7}{(x-1)(x+5)}$; в) $f(x) = \log_2(2 - 3x)$;

б) $f(x) = \sqrt{x - 7} + \sqrt{10 - x}$; г) $f(x) = \arccos\dfrac{x-2}{5} - \dfrac{3}{\sqrt[7]{x^2 - 4x}}$.

2 Найти множество значений функций:

а) $f(x) = x^2 - 8x + 20$; в) $f(x) = 2\sin x - 7$.

б) $f(x) = 3^{-x^2}$;

3 Найти пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 6} \dfrac{x^2 - 8x + 12}{x^2 - 7x + 6}$; в) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x+7} - 3}{\sqrt{x+2} - 2}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1 - 3x^2}{x^2 + 7x - 2}$;

б) $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{3}{x^2 - 4} \right)$; г) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin\frac{x}{3}}{x}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+2}{x+1} \right)^{2x}$.

4 Найти производные следующих функций:

а) $y=\frac{1}{2}\sqrt[3]{x^2}\cos x$; в) $y=(2x+1)\arcsin x$;

б) $y=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{2}{x^3}+\sqrt{7}\cdot x$; г) $y=\operatorname{arctg}(x-2)+\frac{x-3}{x^2-4x+5}$.

5 Найти производную и дифференциал функции $y=\sqrt[3]{x^5-1}$ в точке $x_0=2$.

6 Найти производную и дифференциал второго порядка функции $y=\frac{x-1}{x+1}$.

7 Найти интервалы возрастания и убывания и экстремумы функции $y=(x-2)\sqrt[3]{x^2}$.

8 Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=\frac{2x-1}{x^2+2}$ на отрезке $[-2;0]$.

9 Найти промежутки выпуклости и точки перегиба функции $y=\frac{x^2}{1+x^2}$.

10 Найти сумму, разность, произведение и частное комплексных чисел $z_1=1-5i$ и $z_2=5+3i$.

11 Записать комплексное число $z=1-\sqrt{3}\,i$ в тригонометрической форме.

12 Найти произведение и частное следующих комплексных чисел: $z_1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$ и $z_2=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

13 Найти z^{20} и $\sqrt[3]{z}$ для комплексного числа $z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

14 Найти интегралы методом замены переменной и подведением под знак дифференциала:

а) $\int\frac{x^3}{(x+1)^2}dx$; в) $\int\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$; д) $\int\frac{x}{\sqrt[3]{3x+1}}dx$; ж) $\int\frac{x}{1+x^2}dx$;

б) $\int\frac{1}{\cos^2(5x-7)}dx$; г) $\int\frac{\cos x}{\sin^3 x}dx$; е) $\int\frac{(1+2x)}{\sqrt{x+x^2}}dx$; з) $\int\frac{x^2}{\cos^2 x^3}dx$.

15 Найти интегралы методом интегрирования по частям:

а) $\int x^2e^x dx$; в) $\int x\cdot\sin 3x\,dx$; д) $\int x\cdot 2^x dx$;

б) $\int x^2\ln x\,dx$; г) $\int x\cdot 2^x dx$; е) $\int(x+1)\sin 2x\,dx$.

16 Проинтегрировать функции, содержащие квадратный трехчлен:

а) $\int\frac{dx}{17+2x+x^2}$; б) $\int\frac{dx}{\sqrt{5x^2+4x+7}}$; в) $\int\frac{dx}{x^2+7x-8}$;

г) $\int \frac{x^2+x+2}{\left(x^2-1\right)x}\,dx$; д) $\int \frac{\left(x+3\right)dx}{x^2-4x+4}$; е) $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+2x+2}}$.

17 Вычислить определенный интеграл:

а) $\int\limits_0^1 \frac{x}{\left(3x^2-1\right)^4}\,dx$; в) $\int\limits_0^1 x\ln\left(x^2+1\right)dx$;

б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+\cos x}\,dx$; г) $\int\limits_0^{16} \frac{dx}{\sqrt{x+9}-\sqrt{x}}$.

18 Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y=x^2+1,\ y=x+3$; в) $y=-x^2+6x,\ y=0$;

б) $y=x^2+1,\ x=0,\ x=2, y=0$; г) $y=x^3,\ x+y=2,\ y=0$.

19 Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x}{x^4+1}\,dx$; в) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+16}$; д) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}+1}$.

б) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-5x}\,dx$; г) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$;

20 Найти область определения функций:

а) $z=\sqrt{y^2-1}+\sqrt{1-x^2}$; в) $z=\sqrt{4-x^2+y}$.

б) $z=\frac{1}{\sqrt{y-\sqrt{x}}}$;

21 Найти частные и полное приращение данной функции в данной точке и при данных приращениях аргументов:

а) $z=\frac{x^2y^2}{x^2y^2-\left(x-y\right)^2}$; $M_0\left(2;2\right)$; $\Delta x=-0{,}2$; $\Delta y=0{,}1$;

б) $z=\left(\frac{x^2+y^2}{xy}\right)^2$; $M_0\left(1;1\right)$; $\Delta x=-0{,}1$; $\Delta y=-0{,}1$.

22 Найти частные производные функций:

а) $z=\frac{x^2-y^2}{x^2-y^2}$; в) $z=\frac{x}{\sqrt{x^2+3y^2}}$.

б) $z=x^4\cos^2 y-y^4\sin^3 x^5$;

23 Найти частные производные второго порядка функций:

а) $z = x^3 y + 5xy^2 - x^2 y^4$; в) $z = \operatorname{arctg}\sqrt{x^2 y^2 - 1}$; д) $z = \sin xy$;

б) $z = x^2 \ln(x+y)$; г) $z = xy + \sin(x+y)$; е) $z = \sqrt{2xy + y^2}$.

24 Найти полный дифференциал функций:

а) $z = \cos(x^2 + y^2)$; в) $z = x\sqrt{y} + \dfrac{y}{\sqrt{x}}$.

б) $z = \arcsin\sqrt{x^2 + y^2}$;

25 Найти дифференциал второго порядка функций:

а) $z = \ln(x^2 + y^2)$; в) $z = x - 3\sin y$; д) $z = x^3 + y^4 + 5xy$;

б) $z = \dfrac{xy}{x+y}$; г) $z = \sin x \sin y$; е) $z = 4x^3 + 3x^2 y + 3xy^2 - y^3$.

26 Вычислить приближенно:

а) $1{,}04^{2{,}03}$; в) $\operatorname{arctg}\dfrac{1{,}02}{0{,}95}$;

б) $\sqrt{1{,}04^2 + 3{,}01^2}$; г) $\sin 28° \cdot \cos 61°$.

27 Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхностям $z = f(x; y)$ в точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$:

а) $z = x^2 + 2xy - 4y^2$, $M_0(-2{,}1; -4)$;

б) $xy + x^2 z - z^2 + 4x - y - 2 = 0$, $M_0(1; -1; 2)$;

в) $z = x^2 - xy + y^2 - 1$, $M_0(1; 2; 2)$;

г) $z = x^3 + 2xy^2$, $M_0(1; -2)$.

28 Найти локальные экстремумы функции двух переменных:

а) $z = 3x^2 y - x^3 - y^4$; в) $z = x^4 - x^2 - y^2 + y^4 - 2xy$;

б) $z = 3x - x^2 - y^2 + 64 - xy$; г) $z = 3x - x^2 - y^2 + 6y - xy$.

29 Для функции $z = f(x; y)$ найти наибольшее и наименьшее значения в области D, ограниченной указанными линиями:

а) $z = 1 + x + 2y$, $x = 0$, $y = 0$, $x - y - 1 = 0$;

б) $z = y^2 + x^2 + 4y - 6x + 2$, $x = 1$, $x = 4$, $y = -3$, $y = 2$;

в) $z = 2y^2 + x^2 + 2y + 3x - xy + 1$, $x = 0$, $x + y = -5$, $y = 0$.

30 Найти производную функции $z = f(x; y)$ в точке $M(x; y)$ по направлению указанного вектора:

а) $z = \ln\left(x^2 + 3y^2 - xy\right), M(1;-1), \overrightarrow{NP}: N(3;2), P(1;4)$;

б) $z = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y},\ M(1;1),\ \vec{l} = (-3;1)$.

31 Найти градиент функции $z = f(x;y)$, указанной в точке $M(x;y)$:

а) $z = y^2 + 2x^3y - \sqrt{xy},\ M(-1;-1)$; б) $z = \arcsin\dfrac{x}{x+y},\ M(2;1)$.

32 Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D f(x;y)\,dxdy$ по области D, ограниченной линиями:

а) $f(x;y) = xy$, где $D: x=1,\ x=2,\ y=1,\ y=2$;

б) $f(x;y) = x - y$, где $D: x=0,\ y=0,\ y=2x+1$;

в) $f(x;y) = x^2y$, где $D: x=0,\ y=x,\ y=2-x$.

Список литературы

1 Высшая математика. Общий курс: учебник / Под ред. С. А. Самаля. – Минск: Вышэйшая школа, 2000. – 351 с.

2 Высшая математика для экономистов: практикум для студентов вузов, обучающихся по экономическим специальностям / Под ред. Н. Ш. Кремера. – 2-е изд., перераб. и доп. – Москва: ЮНИТИ-ДАНА, 2007. – 479 с.

3 **Гурский, Е. И.** Руководство к решению задач по высшей математике: в 3 т. / Е. И. Гурский; под ред. Е. И. Гурского. – Минск: Вышэйшая школа, 1990. – Т. 3. – 350 с.

4 **Гусак, А. А.** Высшая математика: в 2 т. / А. А. Гусак. – Минск: ТетраСистемс, 2004. – Т. 2. – 544 с.

5 **Жевняк, Р. М.** Высшая математика. Функции многих переменных. Интегральное исчисление функций одной и многих переменных. Векторный анализ / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Минск: Вышэйшая школа, 1993. – 411 с.

6 Индивидуальные задания по высшей математике: учебное пособие: в 4 ч. / А. П. Рябушко [и др.]; под общ. ред. А. П. Рябушко. – 3-е изд., испр. – Минск: Вышэйшая школа, 2007. – Ч. 2. – 396 с.

7 **Кожух, И. Г.** Математический анализ: учебное пособие для вузов / И. Г. Кожух. – Минск: Изд-во Гревцова, 2011. – 448 с.

8 **Лунгу, К. Н.** Руководство к решению задач: учебное пособие / К. Н. Лунгу, Е. В. Макаров; под ред. В. Д. Кулиева. – 2-е изд., испр. – Москва: Физматлит, 2005. – 216 с.

9 **Письменный, Д. Т.** Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д. Т. Письменный. – Москва: Айрис-пресс, 2009. – 608 с.