

УДК 378

РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ СЛОЖНЫХ ЗАДАЧ
IX И XI ОТКРЫТЫХ ОЛИМПИАД
БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКОГО УНИВЕРСИТЕТА ПО МАТЕМАТИКЕ

В. Г. ЗАМУРАЕВ
Белорусско-Российский университет
Могилев, Беларусь

Рассмотрим решения некоторых задач IX и XI Открытых олимпиад Белорусско-Российского университета по математике (см. [1] и список литературы в [1]), вызвавших затруднения у многих участников соревнований.

Нижеприведенные задачи 1–4 предлагались на девятой олимпиаде (2018 г., 46 участников). Правильный ответ в задаче 1 смогли дать три участника, в остальных трёх задачах – по четыре участника.

Задача 1 [2, с. 252]. Найдите наименьшее значение параметра p , при котором уравнение $\lg(x^2 + 2px) - \lg(8x - 6p - 3) = 0$ имеет единственное решение.

Решение

Область допустимых значений (ОДЗ) переменной x

$$\begin{cases} x^2 + 2px > 0, \\ 8x - 6p - 3 > 0. \end{cases}$$

Запишем уравнение в виде $\lg(x^2 + 2px) = \lg(8x - 6p - 3)$. Учитывая ОДЗ, имеем $x^2 + 2px = 8x - 6p - 3$, $x^2 + 2(p - 4)x + 6p + 3 = 0$. Отсюда находим

$$x_{1,2} = 4 - p \pm \sqrt{p^2 - 14p + 13} = 4 - p \pm \sqrt{(p - 1)(p - 13)}.$$

Квадратное уравнение имеет единственное решение при $p = 1$ или $p = 13$. При $p = 1$ $x_1 = x_2 = 3$; при $p = 13$ $x_1 = x_2 = -11$. При подстановке значений $p = 1$ и $x = 3$ в начальное уравнение получим $\lg 15 = \lg 15$, т. е. верное равенство, а при подстановке $p = 13$ и $x = -11$ получим $\lg(-165) = \lg(-169)$. Таким образом, данное уравнение имеет единственное решение $x = 3$ при $p = 1$.

Два различных решения

$$x_1 = 4 - p - \sqrt{p^2 - 14p + 13} \text{ и } x_2 = 4 - p + \sqrt{p^2 - 14p + 13}$$

уравнение имеет при $p^2 - 14p + 13 > 0$, т. е. при $p \in (-\infty, 1) \cup (13, +\infty)$.

При подстановке значений x_1 и x_2 в ОДЗ убеждаемся, что x_1 не удовлетворяет ОДЗ, а x_2 удовлетворяет ОДЗ при $p \in \left[-\frac{1}{2}, -\frac{3}{22}\right]$. Таким образом, данное уравнение имеет ещё единственное решение

$$x = 4 - p + \sqrt{p^2 - 14p + 13}$$

при $p \in \left[-\frac{1}{2}, -\frac{3}{22}\right]$. Наименьшим значением параметра p , при котором уравнение имеет единственное решение, является $p = -\frac{1}{2}$.

Ответ: $-\frac{1}{2}$.

Задача 2 [3, с. 18]. На окружности дано 19 точек и проведены всевозможные хорды, соединяющие эти точки. Известно, что никакие три из проведенных хорд не пересекаются в одной точке. На сколько частей разбивается круг?

Решение

Соединим последовательно точки, взятые на окружности, хордами. Подсчитаем, на сколько частей разбивается диагоналями полученный 19-угольник. Диагонали будем проводить последовательно. Заметим, что после проведения каждой диагонали число частей увеличивается на число, на 1 большее числа точек пересечения, которые появляются после проведения диагоналей. Поэтому число частей, на которые диагонали разбивают многоугольник, равно 1 (сначала была одна часть – весь многоугольник), плюс число диагоналей, плюс число точек пересечения диагоналей. Число диагоналей 19-угольника $\frac{19 \cdot (19 - 3)}{2} = 152$.

Число точек пересечения диагоналей 19-угольника $C_{19}^4 = \frac{19!}{4!15!} = 3876$ (каждая точка пересечения определяется четырьмя вершинами). Следовательно, число частей, на которые разобьётся круг,

$$1 + 152 + 3876 + 19 = 4048.$$

Ответ: 4048.

Задача 3 [4, с. 66]. Часовая стрелка имеет длину 2 см, а минутная – 2,2 см. Угол между стрелками изменяется с постоянной скоростью. Найдите расстояние между концами стрелок в тот момент, когда оно изменяется быстрее всего.

Решение

Пусть длина часовой стрелки равна a , а длина минутной – b . Обозначим через φ угол между стрелками, а через r – расстояние между концами стрелок.

По теореме косинусов $r^2(\varphi) = a^2 - 2ab \cos \varphi + b^2$, откуда следует, что

$$2r(\varphi)r'(\varphi) = 2ab \sin \varphi, \text{ т. е. } r'(\varphi) = \frac{ab \sin \varphi}{r(\varphi)}.$$

Так как $r^2(\varphi) = (a - b \cos \varphi)^2 + (b \sin \varphi)^2 \geq (b \sin \varphi)^2$, то

$$(r'(\varphi))^2 = \frac{(ab \sin \varphi)^2}{r^2(\varphi)} \leq a^2,$$

причём максимальное значение a^2 достигается при условии $b \cos \varphi = a$. Следовательно, искомое значение $r = \sqrt{b^2 - a^2}$.

При $a = 2$, $b = 2,2$ получаем $r = \frac{\sqrt{21}}{5}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{21}}{5}$.

Задача 4 [5, с. 105]. Найдите $\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{E_n} \sin(x^2 + y^2) dx dy$, где

$$E_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < n, |y| < n\}.$$

Решение

Из непрерывности функции

$$(x, y) \rightarrow \sin(x^2 + y^2), (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

следует равенство

$$\iint_{E_n} \sin(x^2 + y^2) dx dy = \int_{-n}^n dx \int_{-n}^n \sin(x^2 + y^2) dy = 2 \int_{-n}^n \sin x^2 dx \int_{-n}^n \cos y^2 dy,$$

в силу которого получаем после перехода к пределу произведение интегралов Френеля:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{E_n} \sin(x^2 + y^2) dx dy = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \sin x^2 dx \int_{-\infty}^{+\infty} \cos y^2 dy = 2\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \pi.$$

Ответ: π .

Следующая задача 5 предлагалась на одиннадцатой олимпиаде (2020 г., 52 участника), правильный ответ в задаче смогли дать пять участников.

Задача 5 [6, с. 425]. Сторона основания правильной пирамиды $SABCD$ имеет длину 4, боковое ребро – длину $2\sqrt{6}$. Найдите площадь сечения пирамиды, перпендикулярного боковому ребру SC и проходящего через середину этого ребра.

Решение

В плоскости ASC через середину M ребра SC проведём перпендикуляр к этому ребру, он будет лежать в плоскости сечения. Точку пересечения этого перпендикуляра с AC обозначим K и найдем длину KC . Пусть φ – угол между боковым ребром и плоскостью основания пирамиды, O – центр основания. Из треугольника SOC имеем

$$\cos \varphi = \frac{OC}{SC} = \frac{4\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Теперь из треугольника KMC находим $|KC| = \frac{|MC|}{\cos \varphi} = \sqrt{6}\sqrt{3} = 3\sqrt{2}$.

Отправляясь от найденной точки K , строим сечение. Плоскость сечения α и прямая BD перпендикулярны ребру SC , поэтому они параллельны. Значит, и линия пересечения плоскостей α и $ABCD$ параллельна BD . Проводим прямую $EF \parallel BD$, затем прямые EM и FM . Обозначим точку пересечения EF и AB через P , EF и AD – через Q , EM и SB – через N , FM и SD – через R . В результате получаем в сечении пятиугольник $MNPQR$.

Найдём площадь сечения. Имеем

$$|MK| = |MC| \cdot \operatorname{tg} \varphi = \sqrt{6}\sqrt{2} = 2\sqrt{3},$$

$$|EF| = 2|KC| = 6\sqrt{2}, \quad S_{\triangle EFM} = \frac{1}{2}|EF| \cdot |MK| = 6\sqrt{6}. \quad \text{Видим, что}$$

$$|CE| = \frac{3}{2}|BC|, \text{ а } |BE| = \frac{1}{3}|CE|. \text{ Отсюда } |EP| = \frac{1}{3}|EF|.$$

$$\text{Проведём } MM_1 \parallel SB. \text{ Тогда } |EB| = |BM_1|. \text{ Значит, } |EN| = \frac{1}{2}|EM|.$$

Из того, что $|EP| = \frac{1}{3}|EF|$ и $|EN| = \frac{1}{2}|EM|$, следует

$$S_{\triangle EPN} = \frac{1}{6}S_{\triangle EFM} = \sqrt{6}.$$

Из симметрии всех фигур относительно плоскости SAC следует, что $S_{\triangle FQR} = S_{\triangle EPN} = \frac{1}{6}S_{\triangle EFM} = \sqrt{6}$. Значит, площадь сечения

$$S_{MNPQR} = S_{\triangle EFM} - S_{\triangle EPN} - S_{\triangle FQR} = 4\sqrt{6}.$$

Ответ: $4\sqrt{6}$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Замураев, В. Г. Решения наиболее сложных задач XI Открытой олимпиады Белорусско-Российского университета по математике / В. Г. Замураев // Преподавание математики в высшей школе и работа с одаренными студентами в современных условиях: материалы Междунар. науч.-практ. семинара. – Могилев : Белорус.-Рос. ун-т, 2020. – С. 42–47.
2. Полный сборник решений задач для поступающих в вузы. Группа В / Под ред. М. И. Сканава. – Москва: Мир и образование, 2003. – 608 с.

3. Комбинаторный анализ. Задачи и упражнения: учебное пособие / Под ред. К. А. Рыбникова. – Москва : Наука, 1982. – 368 с.
4. **Попов, И. Ю.** Задачи повышенной трудности в курсе высшей математики: учебное пособие / И. Ю. Попов. – Санкт-Петербург: СПбГУ ИТМО, 2008. – 214 с.
5. Справочное пособие по высшей математике: в 5 т. Т. 3: Математический анализ: кратные и криволинейные интегралы / И. И. Ляшко [и др.]. – Москва: Едиториал УРСС, 2001. – 224 с.
6. Пособие по математике для поступающих в вузы / Под ред. Г. Н. Яковлева. – Москва: Наука, 1981. – 608 с.

УДК 378.091

ОСОБЕННОСТИ ПРЕПОДАВАНИЯ ТЕОРИИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ В ТЕХНИЧЕСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

В. В. ИГНАТЕНКО, Е. А. ЛЕОНОВ

Белорусский государственный технологический университет
Минск, Беларусь

Теория массового обслуживания (ТМО) является одним из разделов высшей математики и достаточно широко используется в приложениях, связанных со случайными процессами. Как правило, она используется для построения стохастических моделей, когда нельзя построить детерминированные модели, т. е. когда входящие в модель параметры строго определены, например, как в линейном программировании.

Поскольку в техническом университете математика является обслуживающей дисциплиной, то и изложение ТМО ориентировано на её использование при решении прикладных задач. Здесь, при преподавании ТМО, не нужно строгое изложение с доказательствами, как в классическом университете. Очень важно, чтобы студенты усвоили основные понятия: случайный процесс; марковский процесс (показать, что, в сущности, любой процесс можно рассматривать как марковский, если все параметры из «прошлого», от которых зависит «будущее», включить в «настоящее», и привести пример); процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем; размеченный граф состояний; потоки событий и их характеристики; пуассоновский и простейший потоки. Причем все примеры при изучении этих понятий должны быть из реального производства, связанного с будущей специальностью, чтобы студент сразу понимал, что это не просто теория, а пригодится в будущей работе.

Покажем, как это делается в Белорусском государственном технологическом университете для специальностей лесопромышленного комплекса «Лесная инженерия и логистическая инфраструктура лесного комплекса», «Технология