СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Насыров, В. В.** Пакеты прикладных программ для физиков: LATEX: учебное пособие / В. В. Насыров. – Хабаровск : Тихоокеан. гос. ун-т, 2019. – 84 с.

УДК 517.2

СИСТЕМА УПРАЖНЕНИЙ ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО КРУЖКА ПО ТЕМЕ «ВЕКТОРЫ»

Т. Ю. ОРЛОВА
Белорусско-Российский университет
Могилев, Беларусь

Для работы со студентами, интересующимися математикой, в Белорусско-Российском университете организован математический кружок.

Ранее были рассмотрены системы упражнений для математического кружка по темам «Матрицы» [1], «Производная» [2], «Интегрирование» [3]. Продолжая тему работы математического кружка, приведу подборку задач по теме «Векторы».

Аппарат векторной алгебры широко применяется при решении различных задач.

1. Решить уравнение $3x+4y-3+4\sqrt{x^2+4y^2+3}=0$ [4].

Введем в рассмотрение векторы $\vec{a}=\left(x;2y;\sqrt{3}\right)$ и $\vec{b}=\left(3;2;-\sqrt{3}\right)$. Тогда $\vec{a}\vec{b}=3x+4y-3$, $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{x^2+4y^2+3}$. Получим $\vec{a}\vec{b}=-4\left|\vec{a}\right|$, откуда $\cos\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)=-1$. Следовательно, векторы коллинеарны. Из пропорциональности координат получаем $x=-3$, $y=-1$.

2. Доказать, что для любых $a_1,a_2,b_1,b_2,c_1,c_2\in\mathbb{R}$ выполняется неравенство $\left(a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2\right)^2\le\left(a_1^2+b_1^2+c_1^2\right)\left(a_2^2+b_2^2+c_2^2\right)$. Выяснить, когда будет равенство [4].

Аналогично первой задаче рассмотрим векторы $\vec{x}=\left(a_1;b_1;c_1\right)$ и $\vec{y}=\left(a_2;b_2;c_2\right)$. Тогда $\left(\vec{x}\vec{y}\right)^2\le\left|\vec{x}\right|^2\cdot\left|\vec{y}\right|^2$. Очевидно, что неравенство выполняется, а равенство достигается в случае коллинеарности векторов.

3. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $\angle BAC_1=\angle DAC_1=60°$. Найти $\angle A_1AC_1$.

Эта задача под силу школьнику. Но введя систему координат, совместив ее начало с вершиной *A* и направив оси вдоль ребер, видим, что косинусы наших углов являются направляющими косинусами вектора $\overrightarrow{AC_1}$. Из равенства $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ получаем, что $\angle A_1AC_1=\gamma=45°$.

4. Сколько существует различных невырожденных матриц 3-го порядка, элементами которых являются числа «0» или «1» (10-th Internet Mathematics Olympiad for Students, университет Ариель, Израиль) [1]?

Пусть $A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$, где $\vec{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, $\vec{c}=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ – векторы, соединяющие вершины единичного куба. $\det A\neq 0$, т. к. векторы некомпланарны.

Введём систему координат так, чтобы вершины куба $OABCO_1A_1B_1C_1$ имели координаты $O(0;0;0)$, $A(1;0;0)$, $B(1;1;0)$, $C(0;1;0)$, $O_1(0;0;1)$, $A_1(1;0;1)$, $B_1(1;1;1)$, $C_1(0;1;1)$. Рассмотрим радиус-векторы вершин куба, их семь. Следовательно, матриц с соответствующими столбцами можно составить $A_7^3=210$. Из этих матриц вырожденными будут те, которые составлены из компланарных векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Их $6\cdot 6=36$ (6 плоскостей, содержащих точку O, по 3! комбинации в каждой). Значит, различных невырожденных матриц 3-го порядка, элементами которых являются числа «0» или «1», будет $210-36=174$.

На занятии по данной теме, кроме разобранных ранее, можно рассмотреть со студентами следующие задачи.

1. Определить вид треугольника ABC, если:

$$а)\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}^2;\quad б)\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}^2=0;\quad в)\ \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0.$$

Ответ: *а*) прямоугольный; *б*) тупоугольный; *в*) равнобедренный.

2. Вычислить $ab+cd$, если $a^2+b^2=c^2+d^2=1$, $ac+bd=0$.

Ответ: 0.

3. Числа x, y, z таковы, что $x^2+4y^2+z^2=3$. Какие значения может принимать выражение $x+2y+z$?

Ответ: $[-3;3]$.

4. Решить уравнение и систему:

а) уравнение $\sqrt{3(x+y+z)}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{x}$;

б) систему уравнений $\begin{cases} \sqrt{x}\sin\alpha+\sqrt{y}\cos\alpha+\sqrt{z}=\sqrt{2(x+y+z)}, \\ 5(x+y)+4\sqrt{z}=1, \end{cases}$

где $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Ответ: *а*) $(0;0;0)$; *б*) $\left(\frac{1}{25}\sin^2\alpha;\frac{1}{25}\cos^2\alpha;\frac{1}{25}\right)$.

5. Какой наименьший угол могут образовывать векторы $\vec{a}=(1;-x;2)$, $\vec{b}=(x;1;1)$?

Ответ: $\arccos\sqrt{0,4}$.

6. Непересекающиеся диагонали двух смежных боковых граней прямоугольного параллелепипеда наклонены к плоскости основания под углами α, β соответственно. Найти угол между этими диагоналями.

Ответ: $\arccos(\sin\alpha\ \sin\beta)$.

7. Найти отношение суммы квадратов длин медиан треугольника к сумме квадратов длин его сторон.

Ответ: $0,75$.

8. К вершине куба приложены три силы, равные по величине $1, 2, 3$ и направленные по диагоналям граней куба, выходящим из этой вершины. Найти величину равнодействующей этих сил и углы, образуемые с составляющими силами.

Ответ: 5; $\arccos 0,7$; $\arccos 0,4$; $\arccos 0,3$.

9. Доказать неравенство $2\sqrt{5x+1}+2\sqrt{6x+1}+\sqrt{7-11x}\le 9$ для всех значений x, при которых определена левая часть.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Орлова, Т. Ю.** Система упражнений для математического кружка по теме «Матрицы» / Т. Ю. Орлова, С. Ф. Плешкунова // Преподавание математики в высшей школе и работа с одаренными студентами в современных условиях : материалы Междунар. науч.-практ. семинара. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2019. – С. 58–62.

2. **Орлова, Т. Ю.** Система упражнений для математического кружка по теме «Производная» / Т. Ю. Орлова // Преподавание математики в высшей школе и работа с одаренными студентами в современных условиях: материалы Междунар. науч.-практ. семинара. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2020. – С. 73–76.

3. **Орлова, Т. Ю.** Система упражнений для математического кружка по теме «Производная» / Т. Ю. Орлова // Преподавание математики в высшей школе и работа с одаренными студентами в современных условиях: материалы Междунар. науч.-практ. семинара. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2021. – С. 80–83.

4. **Беркович, Ф. Д.** Задачи студенческих математических олимпиад с указаниями и решениями: учебное пособие / Ф. Д. Беркович, В. С. Федий, В. И. Шлыков. – Ростов-на-Дону: Феникс, 2008. – 171 с.