УДК 372.851+517.968

К ВОПРОСУ О МЕТОДИКЕ ИЗУЧЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

А. И. СЕРЫЙ, З. Н. СЕРАЯ
Брестский государственный университет имени А. С. Пушкина
Брест, Беларусь

Несмотря на то, что интегральные уравнения (ИУ) используются в научно-исследовательской деятельности не столь часто, как обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ), они занимают важное место в курсе высшей математики. В качестве примера области их применения можно назвать квантовую механику, теорию рассеяния [1, с. 156], задачи, связанные с явлением переноса [2, с. 336], задачи о движении материальной точки в вертикальной плоскости под действием силы тяжести, обратные задачи (определение потенциальной энергии по периоду колебаний, восстановление рассеивающего поля по эффективному сечению) [2, с. 8] и др. Несмотря на наличие ряда учебных пособий, полностью или частично посвященных изучению ИУ (в качестве примера можно привести [3]), возможно дальнейшее совершенствование методики преподавания раздела «Интегральные уравнения» в рамках изучения дисциплины «Дифференциальные и интегральные уравнения».

Вопросы совершенствования методики изучения ОДУ ранее обсуждались в [4], и многое из того, что было сказано там, можно распространить на методику изучения ИУ. В частности, можно выделить следующие важные направления.

1. Установление более тесной взаимосвязи между ИУ, решаемыми аналитически, и ИУ, решаемыми только численно.

2. Использование классификационных признаков для анализа отдельно взятого ИУ или для сравнительного анализа двух и более ИУ либо различных типов ИУ.

3. Формулировка тождественна приведенной в [4, с. 93] для ОДУ.

Все, что было сказано применительно к методике изучения ОДУ по направлениям, аналогичным 1 и 3 в [4], можно почти дословно повторить применительно к методике изучения ИУ, поэтому не будем подробно останавливаться на этих вопросах. Далее обсудим направление 2.

В общем виде одномерное интегральное уравнение записывается в виде (1) (смысл входящих в него элементов указан в табл. 1), другие замечания систематизированы в табл. 2 и 3.

$$u(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda\int_a^y K(x,s,\varphi(s))\,ds. \qquad (1)$$

Табл. 1. Функции (А) и величины (Б), входящие в уравнение (1)

Элемент (тип и обозначение)		Название	Примечание
А	$\varphi(x)$	Искомая функция	Не всегда единственна
	$u(x)$	Заданная функция (специального названия нет)	Род ИУ зависит от значения $u(x)$
	$f(x)$	Свободный член	Однородность ИУ зависит от обращения $f(x)$ в ноль
	$K(x,s,\varphi(s))$	Ядро ИУ	Линейность ИУ зависит от возможности разложения $K(x,s,\varphi(s)) = K_1(x,s)\varphi(s)$
Б	a	Нижний предел интегрирования (ПИ)	Всегда постоянный (заданный)
	y	Верхний ПИ	Класс ИУ зависит от y
	λ	Параметр	Может быть вещественным или комплексным

Табл. 2. Методы решения линейных ИУ с различными ядрами

Ядро	Выражение	Примечание
Полярное	$\dfrac{L(x,s)}{\lvert x-s\rvert^{\alpha}}$	К нему применимы результаты Фредгольма для ИУ с непрерывным ядром $L(x,s)$, $\alpha < 1$
Вырожденное	$\sum\limits_{n=1}^{m} a_n(x) b_n(s)$	ИУ Фредгольма второго рода сводится к системе линейных алгебраических уравнений
Вещественное симметричное	$K(x,s) = K(s,x)$	Справедлива теория Гильберта – Шмидта
Зависит от разности аргументов	$K(x,s) = K(x-s)$	Эффективно применение метода Винера – Хопфа, основанного на интегральных преобразованиях, ИУ сводится к алгебраическому

Можно предложить учащимся разбор отдельно взятого ИУ по следующим пунктам (которые можно составить, например, на основе [1, с. 156–157; 3, с. 27–99]).

1. Линейность (линейное, нелинейное).
2. Однородность (однородное, неоднородное).
3. Род (первый, второй, третий).
4. Размерность (одномерное, многомерное).
5. Класс (Фредгольма или Вольтерры) для одномерных уравнений.
6. Сингулярность (является ли ядро ядром Фредгольма).
7. Другие характеристики ядра (зависит от разности аргументов, вырожденное, симметричное, полярное и др.).
8. Характеристическое (собственное) число ИУ, его кратность.

9. Характеристические (собственные) функции ИУ.

10. Регулярность параметра ИУ.

11. Множество, на котором (предположительно) должна быть определена искомая функция (например, отрезок, интервал, полуинтервал, луч, полупрямая, прямая в случае одномерного уравнения), наличие особых точек.

12. Существование и единственность решения на множестве, выбранном в п. 11; ветвление решений (для нелинейных ИУ).

13. Допустимые методы решения (через элементарные функции, через специальные функции, через бесконечный ряд, последовательные приближения, последовательные подстановки, численно и т. д.).

14. Смысловое содержание (конкретный раздел физики или других наук).

Табл. 3. Примеры разновидностей линейных ИУ

$f(x)$	y	$u(x)=0$	$u(x)=1$	$\forall\, u(x)$
$=0$	$b=\mathrm{const}$	Однородное Фредгольма (ОФ) первого рода	ОФ второго рода	ОФ третьего рода
	x	Однородное Вольтерры (ОВ) первого рода	ОВ второго рода	ОВ третьего рода
$\neq 0$	$b=\mathrm{const}$	Неоднородное Фредгольма (НФ) первого рода	НФ второго рода	НФ третьего рода
	x	Неоднородное Вольтерры (НВ) первого рода	НВ второго рода	НВ третьего рода

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Физическая энциклопедия / редкол.: А. М. Прохоров (гл. ред.) [и др.] – Москва: Совет. энцикл., 1990. – Т. 2: Добротность – Магнитооптика. – 703 с.

2. Физическая энциклопедия / редкол.: А. М. Прохоров (гл. ред.) [и др.]. – Москва: Совет. энцикл., 1988. – Т. 1: Ааронова – Бома эффект – Длинные линии. – 704 с.

3. **Елисеева, Т. В.** Интегральные уравнения и вариационные исчисления : учебное пособие / Т. В. Елисеева. − Пенза: Пенз. гос. ун-т, 2008. − 104 с.

4. **Серый, А. И.** К вопросу о методике изучения обыкновенных дифференциальных уравнений / А. И. Серый, З. Н. Серая // Преподавание математики в высшей школе и работа с одаренными студентами в современных условиях. Teaching mathematics in higher education and working with gifted students in contemporary context: материалы Междунар. науч.-практ. семинара. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2021. – С. 91–94.