Отметьте верные определения непрерывности функции в точке.

---

Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке $x = 4$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого $x$, $|x - 4| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x) - f(4)| < \varepsilon$.

Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке $x = 4$, если $\lim\limits_{x \to 4}(f(x) - f(4)) = 0$.

Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке $x = 4$, если для любой последовательности $x_n \to 4$ соответствующая последовательность значений функции $f(x_n) \to f(4)$.

Рис. 1. Теоретический вопрос теста

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бугров, Я. С.** Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. – Москва: Наука, 1980. – 432 с.

2. **Майоров, А. Н.** Теория и практика создания тестов для системы образования (Как выбирать, создавать и использовать тесты для целей образования) / А. Н. Майоров. – Москва: Народное образование, 2000. – 352 с.

3. **Чайкина, Е. В.** Особенности обучения математики в техническом вузе в условиях дистанционного обучения / Е. В. Чайкина // Актуальные проблемы преподавания математики в техническом вузе. – 2020. – № 8. – С. 254–258.

УДК 378.147:51

# ТЕОРИЯ ДЕТЕРМИНАНТОВ В ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ИЗЛОЖЕНИИ

В. А. ШИЛИНЕЦ
Международный университет «МИТСО»
Минск, Беларусь

Очень часто преподавателю геометрии необходимо использовать детерминанты значительно ранее, чем они изучаются в курсе линейной алгебры. Поэтому геометрам приходится самостоятельно вводить понятие детерминанта и доказывать его простейшие свойства. Существует чисто геометрическое определение детерминанта через некоторые векторные операции. Эти определения заметили в работах Л. Кронекера и К. Вейерштрасса и, к сожалению, забыли сейчас. Если учесть, что классическое построение теории детерминанта (в алгебраическом изложении) более сложное по сравнению с геометрическим, то, конечно, приходится жертвовать временем и другим, более наглядным способом строить эту теорию. В данной работе предлагается вариант изложения теории детерминантов, построенный на геометрической основе и в несколько другой форме по сравнению с тем, как это было сделано у Л. Кронекера и К. Вейерштрасса.

Сначала приведем некоторые определения, которые потребуются далее. На евклидовой плоскости рассмотрим упорядоченную пару векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и ориентированный угол $\varphi$ между ними. Затем рассмотрим ориентированный параллелограмм, построенный на этих векторах, и его ориентированную площадь. Условимся считать, что ориентированная площадь параллелограмма выражается положительным числом, если $\varphi \le 180°$, и отрицательным числом, когда $\varphi > 180°$. Если считать вектор $\vec{a}$ первой компонентой пары $(\vec{a},\vec{b})$, а вектор $\vec{b}$ – второй, то ориентированную площадь параллелограмма, построенного на этих векторах, обозначим $\Delta(\vec{a},\vec{b})$ и назовем внешним произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Из этого определения следует, что $\Delta(\vec{a},\vec{b}) = ab\sin\varphi$, где $\varphi$ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

На основании этого можно установить, что внешнее произведение обладает следующими свойствами:

1) $\Delta(\vec{a},\vec{b}) = -\Delta(\vec{b},\vec{a})$;

2) $\Delta(\vec{a},\vec{b}) = 0$ тогда, и только тогда, когда $\vec{a} \parallel \vec{b}$ (в частности, $\Delta(\vec{a},\vec{a}) = 0$);

3) $\Delta(\lambda\vec{a},\vec{b}) = \Delta(\vec{a},\lambda\vec{b}) = \lambda\Delta(\vec{a},\vec{b})$;

4) $\Delta(\vec{a}_1 + \vec{a}_2,\vec{b}) = \Delta(\vec{a}_1,\vec{b}) + \Delta(\vec{a}_2,\vec{b})$.

В прямоугольной декартовой системе координат с ортонормированным базисом $\vec{i}$, $\vec{j}$ и векторами $\vec{a} = (a_1,a_2)$, $\vec{b} = (b_1,b_2)$ внешнее произведение принимает вид:

$$\Delta(\vec{a},\vec{b}) = a_1b_2 - a_2b_1, \tag{1}$$

т. к. $\Delta(\vec{i},\vec{i}) = \Delta(\vec{j},\vec{j}) = 0$, $\Delta(\vec{i},\vec{j}) = -\Delta(\vec{j},\vec{i}) = 1$.

Из равенства (1) следует, что внешнее произведение векторов $\vec{a} = (a_1,a_2)$ и $\vec{b} = (b_1,b_2)$ есть детерминант второго порядка, образованный из координат этих векторов:

$$\Delta(\vec{a},\vec{b}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Таким образом, детерминант второго порядка есть число $a_1b_2 - a_2b_1$.

Покажем теперь, как выводятся формулы Крамера через внешнее произведение. Пусть дана система двух линейных уравнений первой степени с неизвестными $x$ и $y$:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1; \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases} \tag{2}$$

Если коэффициенты $a_1$, $a_2$, $b_1$, $b_2$ и свободные члены $c_1$ и $c_2$ рассматривать в виде координат трех векторов $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$ и $\vec{c} = (c_1, c_2)$, то систему (2) можно записать в виде векторного уравнения

$$\vec{a}x + \vec{b}y = \vec{c}. \tag{3}$$

Тогда формулы Крамера можно получить в векторной форме, если умножить уравнение (3) внешним образом первый раз справа на вектор $\vec{b}$, а второй раз слева на вектор $\vec{a}$. На основании свойств 1–4 получим: $\Delta(\vec{a},\vec{b})x = \Delta(\vec{c},\vec{b})$, $\Delta(\vec{a},\vec{b})y = \Delta(\vec{a},\vec{c})$. Отсюда, если $\Delta(\vec{a},\vec{b}) \neq 0$, имеем: $x = \Delta(\vec{c},\vec{b}) / \Delta(\vec{a},\vec{b})$, $y = \Delta(\vec{a},\vec{c}) / \Delta(\vec{a},\vec{b})$. Получили формулы Крамера в векторной форме.

Перейдем теперь к рассмотрению детерминанта третьего порядка. Как и в случае ориентированной площади параллелограмма, введем понятие ориентированного объема параллелепипеда, построенного на трех ориентированных векторах, имеющих общее начало. Объем параллелепипеда, построенного на трех векторах, имеющих общее начало, будем считать положительным, если эти векторы образуют правую тройку, и отрицательным, если эти векторы образуют левую тройку. Ориентированный объем параллелепипеда, построенного на упорядоченной тройке векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, обозначим $\Delta(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ и назовем внешним произведением этих векторов. Очевидно, что внешнее произведение трех векторов совпадает с понятием смешанного произведения этих векторов. Но смешанное произведение вводится только для частного случая трех векторов, тогда как внешнее произведение имеет общий характер для векторов пространства любого измерения. Если упорядоченная тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образует правую тройку, то тройка векторов $\vec{b}$, $\vec{a}$, $\vec{c}$ образует левую тройку, поэтому

$\Delta(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=-\Delta(\vec{b},\vec{a},\vec{c})$. Вообще, внешнее произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ обладает следующими свойствами:

1) $\Delta(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\Delta(\vec{b},\vec{c},\vec{a})=\Delta(\vec{c},\vec{a},\vec{b})=-\Delta(\vec{b},\vec{a},\vec{c})=-\Delta(\vec{a},\vec{c},\vec{b})=-\Delta(\vec{c},\vec{b},\vec{a})$;

2) $\Delta(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=0$, если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарны;

3) $\Delta(\lambda\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\Delta(\vec{a},\lambda\vec{b},\vec{c})=\Delta(\vec{a},\vec{b},\lambda\vec{c})=\lambda\Delta(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$;

4) $\Delta(\vec{a}_1+\vec{a}_2,\vec{b},\vec{c})=\Delta(\vec{a}_1,\vec{b},\vec{c})+\Delta(\vec{a}_2,\vec{b},\vec{c})$.

Заметим, что для векторов $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ ортонормированного базиса

$$\Delta(\vec{i},\vec{j},\vec{k})=\Delta(\vec{j},\vec{k},\vec{i})=\Delta(\vec{k},\vec{i},\vec{j})=-\Delta(\vec{j},\vec{i},\vec{k})=-\Delta(\vec{i},\vec{k},\vec{j})=-\Delta(\vec{k},\vec{j},\vec{i}).$$

Для всех остальных случаев произведение векторов $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ равно нулю. Пусть теперь $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$, $\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$ – произвольные векторы. Согласно свойствам 1–4 имеем

$$\Delta(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=a_1\Delta(\vec{i},\vec{b},\vec{c})+a_2\Delta(\vec{j},\vec{b},\vec{c})+a_3\Delta(\vec{k},\vec{b},\vec{c}). \tag{4}$$

Так как $\Delta(\vec{i},\vec{b},\vec{c})=\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}$, $\Delta(\vec{j},\vec{b},\vec{c})=\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}$, $\Delta(\vec{k},\vec{b},\vec{c})=\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$, то равенство (4) примет вид:

$$\Delta(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}-a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}+a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Для последнего равенства введем обозначение

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}-a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}+a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \tag{5}$$

и назовем детерминантом третьего порядка.

Если вычислить детерминанты второго порядка, то равенство (5) примет вид:

$$\Delta(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3-a_3b_2c_1.$$

Таким образом, детерминант третьего порядка есть число, вычисляемое по формуле

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1 .$$

Равенство (5) называется разложением детерминанта третьего порядка по элементам первой строки.

УДК 378.1

# ОСОБЕННОСТИ РАБОТЫ С ОДАРЕННЫМИ И ТАЛАНТЛИВЫМИ СТУДЕНТАМИ (НА ПРИМЕРЕ ГРОДНЕНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА ИМЕНИ ЯНКИ КУПАЛЫ)

Д. С. ШПАК, Н. А. ТЕСТЕЛЕЕВА
Гродненский государственный университет имени Янки Купалы
Гродно, Беларусь

Работа с одаренными студентами – одно из приоритетных направлений современного образовательного процесса. Именно талантливая молодёжь обеспечивает тот потенциал ресурсов, который позволит сделать качественный скачок в экономической и социальной сфере нашей страны.

Отличительными особенностями одаренного студента, как отмечают психологи, являются высокий уровень мышления и интеллекта, познавательная потребность, отличная память, хорошо развитая речь, большой словарный запас, повышенные математические способности, способность к самообучению, независимость суждений, богатая фантазия и воображение.

Одаренного студента характеризует стремление к лидерству, повышение требований к себе и окружающим, стремление к совершенству во всем.

Ориентация на талантливых студентов предполагает разработку системы мер для оптимизации организационных условий образовательного процесса, что, в свою очередь, требует выявления отношений одаренных студентов к различным сторонам организации образовательной деятельности.

Одаренные студенты привержены к выбору профессионально-самореализационной модели обучения, сущность которой составляют:

– интерес к профессии (высокий уровень профессиональной направленности);

– ориентация на творческий труд (возможность проявлять инициативу, самостоятельность);

– критичность мышления (предрасположенность к поиску нестандартных решений) [1].