УДК 373, 378, 510

ОБ УЧАСТИИ УНИВЕРСИТЕТОВ В ПРОЕКТНОЙ РАБОТЕ С ТАЛАНТЛИВЫМИ ШКОЛЬНИКАМИ – ПОТЕНЦИАЛЬНЫМИ СТУДЕНТАМИ

И. В. АСТАШОВА
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Российский экономический университет имени Г. В. Плеханова
С. С. ЕЖАК, М. Ю. ТЕЛЬНОВА
Российский экономический университет имени Г. В. Плеханова
Москва, Россия

В связи с проведением в Российской Федерации Года науки и технологий Комиссия РАН по изучению научного наследия выдающихся ученых совместно с Московским областным отделением общероссийской общественно-государственной детско-юношеской организации «Российское движение школьников» провели в ноябре-декабре 2021 г. региональную научно-исследовательскую конференцию «Математический научный форум школьников Московской области» (далее – Конференция). Тематическая область Конференции включала в себя фундаментальную математику, вычислительные методы, математическое моделирование и приложения информационных технологий к различным областям науки и техники. Конференция была направлена на повышение интереса школьников к углубленному изучению математики и выявление талантливых обучающихся – потенциальных ученых – и являлась, таким образом, одним из аспектов предметной профориентационной работы среди школьников Московского региона[1].

Школьники, желающие принять участие в Конференции, на первом этапе участвовали в Олимпиаде по математике, а для проведения второго этапа, исследовательского, победители были объединены в проектные коллективы, состоящие из 1–3 школьников, педагога и научного консультанта-эксперта из числа ученых вузов. В качестве таких экспертов-консультантов была приглашена наша научная группа. Экспертам-консультантам была поставлена задача разработать и предложить школьникам темы для исследования, согласовать с участниками план работы и структуру исследования (а затем – текста статьи), приемлемый объем исследования, руководить написанием статьи для последующего размещения в сборнике публикаций Конференции и подготовкой доклада.

По итогам обсуждений с учителями и школьниками сформировались темы

---

[1]https://mosobl-centerdo.ru/menu/deyatelnost/rossijskoe-dvizhenie-shkolnikov/694-regionalnaya-nauchno-issledovatelskaya-konferencziya-%C2%ABmatematicheskij-nauchnyij-forum-shkolnikov-moskovskoj-oblasti%C2%BB-v-ran

исследований, которые были успешно выполнены и представлены на конференции. Приведем их краткое описание.

Кривые и поверхности второго порядка в архитектуре

Научный руководитель – Асташова Ирина Викторовна, проф. кафедры дифференциальных уравнений мехмата МГУ им. М. В. Ломоносова, проф. кафедры высшей математики РЭУ им. Г. В. Плеханова; руководитель проекта – Коникина Ольга Сергеевна, учитель математики высшей квалификационной категории МОУ «Демиховский лицей», г. о. Орехово-Зуевский; исполнитель – Егоркина Кристина Александровна, учащаяся 9 класса.

Цель: продемонстрировать неразрывную связь математики и архитектуры, оценить роль кривых и поверхностей второго порядка в строительстве.

Задачи: изучить теоретический материал о линиях и поверхностях второго порядка [1], обосновать их использование в строительстве; рассмотреть архитектурные стили, в которых наиболее ярко представлены кривые и поверхности второго порядка; найти кривые и поверхности второго порядка в зданиях родного города.

Исследования показали, что именно кривые и поверхности второго порядка являются основой самых замысловатых и удивительных сооружений мира. В процессе работы над проектом были найдены объекты, в которых используются различные виды кривых второго порядка, и проанализированы их свойства, характеризующие их использование. При этом оказалось, что в архитектурных конструкциях применяются свойства не только самих кривых второго порядка (эллипса, гиперболы, параболы), но и линий, порожденных ими. Например, если парабола катится по прямой, проходящей через ее вершину и перпендикулярной ее оси, то траектория ее фокуса есть цепная линия [2]. Центр тяжести цепной линии – самый низкий из всех форм нитей равной длины, соединяющих две опоры, т. е. имеет минимум потенциальной энергии. Перевёрнутая цепная линия – идеальная с точки зрения прочности форма для арок. Материал однородной арки с одинаковой по длине линейной плотностью в форме перевёрнутой цепной линии испытывает только механические напряжения сжатия и не испытывает напряжений изгиба. Подобную форму имеет, например, арка в мемориальном комплексе Сент-Луиса (США) «Врата Запада» (рис. 1). При исследовании поверхностей второго порядка доказывалось, в частности, суще-

Рис. 1

исследований, которые были успешно выполнены и представлены на конференции. Приведем их краткое описание.

Кривые и поверхности второго порядка в архитектуре

Научный руководитель – Асташова Ирина Викторовна, проф. кафедры дифференциальных уравнений мехмата МГУ им. М. В. Ломоносова, проф. кафедры высшей математики РЭУ им. Г. В. Плеханова; руководитель проекта – Коникина Ольга Сергеевна, учитель математики высшей квалификационной категории МОУ «Демиховский лицей», г. о. Орехово-Зуевский; исполнитель – Егоркина Кристина Александровна, учащаяся 9 класса.

Цель: продемонстрировать неразрывную связь математики и архитектуры, оценить роль кривых и поверхностей второго порядка в строительстве.

Задачи: изучить теоретический материал о линиях и поверхностях второго порядка [1], обосновать их использование в строительстве; рассмотреть архитектурные стили, в которых наиболее ярко представлены кривые и поверхности второго порядка; найти кривые и поверхности второго порядка в зданиях родного города.

Исследования показали, что именно кривые и поверхности второго порядка являются основой самых замысловатых и удивительных сооружений мира. В процессе работы над проектом были найдены объекты, в которых используются различные виды кривых второго порядка, и проанализированы их свойства, характеризующие их использование. При этом оказалось, что в архитектурных конструкциях применяются свойства не только самих кривых второго порядка (эллипса, гиперболы, параболы), но и линий, порожденных ими. Например, если парабола катится по прямой, проходящей через ее вершину и перпендикулярной ее оси, то траектория ее фокуса есть цепная линия [2]. Центр тяжести цепной линии – самый низкий из всех форм нитей равной длины, соединяющих две опоры, т. е. имеет минимум потенциальной энергии. Перевёрнутая цепная линия – идеальная с точки зрения прочности форма для арок. Материал однородной арки с одинаковой по длине линейной плотностью в форме перевёрнутой цепной линии испытывает только механические напряжения сжатия и не испытывает напряжений изгиба. Подобную форму имеет, например, арка в мемориальном комплексе Сент-Луиса (США) «Врата Запада» (рис. 1). При исследовании поверхностей второго порядка доказывалось, в частности, суще-

Рис. 1

ствование прямолинейных образующих на однополостном гиперболоиде, гиперболическом параболоиде, цилиндрических и конических поверхностях, что обеспечивает прочность конструкций и придает изящество сооружениям. Классическими примерами являются знаменитые башни Шухова, представляющие собой конструкцию из однополостных гиперболоидов, сконструированных из прямолинейных образующих (на рис. 2 представлена первая башня в Липецкой области), ресторан в Сочимилко, являющийся соединением восьми гиперболических параболоидов, придающих изделию из бетона структурную прочность и устойчивость к растяжению и сжатию за счет наличия прямолинейной арматуры (рис. 3), собор Саграда Фамилья (Барселона), в котором Гауди использовал гиперболоидно-параболоидные конструкции в окнах и сводах (рис. 4).

Рис. 2

Рис. 3

Рис. 4

Градирни в форме гиперболических параболоидов дают возможность использовать, наряду с прочностью, их увеличенную по сравнению с цилиндрическими трубами поверхность, способствующую более быстрому охлаждению оседающего на ней пара.

Приведены примеры других зданий, встречающихся в мировой архитектуре, в проектировании которых были использованы подобные геометрические модели, в том числе здания г. о. Орехово-Зуевского.

Взаимосвязь моделей распространения коронавирусной инфекции с моделью распространения слухов в социуме

Научный руководитель – Ежак Светлана Сергеевна, канд. физ.-мат. наук, доц. кафедры высшей математики; руководитель проекта – Бутылина Елена Владимировна, учитель математики МАОУ «Гимназия № 6», г. о. Красноармейск; исполнители – Давыдов Илья Александрович, Графова Александра Алексеевна, учащиеся 9 класса.

Цель: проанализировать взаимосвязь моделей распространения слухов и распространения вируса COVID-19.

Задачи: ознакомиться с самыми известными математическими моделями распространения вирусов; рассмотреть модель распространения слухов среди населения; провести анализ рассмотренных математических моделей; попробовать найти взаимосвязь модели распространения слухов среди населения с процессом распространения вирусов.

В рамках исследования были выполнены подготовка, проведение и фиксирование результатов экспериментов по распространению слухов среди учащихся девятых классов гимназии. Для учащихся характерна высокая скорость распространения полученной информации. В двух классах проведены эксперименты, провоцирующие возникновение тревожных ситуаций (сообщения о проведении проверочной работы) и отслеживающие их развитие. В результате были получены характеристики уровня восприятия, оценены количество контактов в единицу времени, скорость распространения слухов. Цель заключалась в проверке правильности математической модели распространения слухов при разных условиях. Выяснялись механизм распространения информации и реакция на ее получение. В итоге была получена схема распространения информации, во многом похожая на схему распространения слуха (ведь слух в устах первоисточника нередко бывает вполне достоверной информацией). Проведенные опыты продемонстрировали в первую очередь возможность экспериментального воспроизведения и исследования такого социально-психологического феномена, как распространение слухов. Характерной особенностью распространения слухов в данных экспериментах является их затухание. Причин затухания несколько, главные из них – ограниченность среды распространения (среда представляет собой узор связей) кругом знакомых, лиц, связанных общим интересом, отсутствие

Градирни в форме гиперболических параболоидов дают возможность использовать, наряду с прочностью, их увеличенную по сравнению с цилиндрическими трубами поверхность, способствующую более быстрому охлаждению оседающего на ней пара.

Приведены примеры других зданий, встречающихся в мировой архитектуре, в проектировании которых были использованы подобные геометрические модели, в том числе здания г. о. Орехово-Зуевского.

Взаимосвязь моделей распространения коронавирусной инфекции с моделью распространения слухов в социуме

Научный руководитель – Ежак Светлана Сергеевна, канд. физ.-мат. наук, доц. кафедры высшей математики; руководитель проекта – Бутылина Елена Владимировна, учитель математики МАОУ «Гимназия № 6», г. о. Красноармейск; исполнители – Давыдов Илья Александрович, Графова Александра Алексеевна, учащиеся 9 класса.

Цель: проанализировать взаимосвязь моделей распространения слухов и распространения вируса COVID-19.

Задачи: ознакомиться с самыми известными математическими моделями распространения вирусов; рассмотреть модель распространения слухов среди населения; провести анализ рассмотренных математических моделей; попробовать найти взаимосвязь модели распространения слухов среди населения с процессом распространения вирусов.

В рамках исследования были выполнены подготовка, проведение и фиксирование результатов экспериментов по распространению слухов среди учащихся девятых классов гимназии. Для учащихся характерна высокая скорость распространения полученной информации. В двух классах проведены эксперименты, провоцирующие возникновение тревожных ситуаций (сообщения о проведении проверочной работы) и отслеживающие их развитие. В результате были получены характеристики уровня восприятия, оценены количество контактов в единицу времени, скорость распространения слухов. Цель заключалась в проверке правильности математической модели распространения слухов при разных условиях. Выяснялись механизм распространения информации и реакция на ее получение. В итоге была получена схема распространения информации, во многом похожая на схему распространения слуха (ведь слух в устах первоисточника нередко бывает вполне достоверной информацией). Проведенные опыты продемонстрировали в первую очередь возможность экспериментального воспроизведения и исследования такого социально-психологического феномена, как распространение слухов. Характерной особенностью распространения слухов в данных экспериментах является их затухание. Причин затухания несколько, главные из них – ограниченность среды распространения (среда представляет собой узор связей) кругом знакомых, лиц, связанных общим интересом, отсутствие подпитки со стороны некоторого постоянно действующего средства информации и социально незначимый уровень распространяемого слуха. Подтверждение результатов исследований было найдено в современных научных работах (см., например, [7]). Математическая модель распространения информации в своей основе содержит модель SIR.

Отметим, что аналогичная математическая модель используется в качестве базовой и для изучения распространения коронавируса. Для расчета вероятности заражения людей использовался симулятор, разработанный группой ученых во главе с профессором Хосе Луисом Хименесом (Университет Колорадо) с целью показать важность факторов, которые влияют на распространение коронавируса. Расчет не является исчерпывающим, но он показывает развитие рисков на основе факторов, которые целиком в нашей власти.

В проведенных опытах обращают на себя внимание следующие моменты: совпадение количества контактов активных коммуникаторов и близость вероятностей заражения в различных опытах. Таким образом, область распространения вируса, интенсивность его распространения, длительность существования и степень заражения находятся в такой же математической зависимости, как и распространение слухов. Таким образом, имитируя распространение слухов, можно прогнозировать и распространение эпидемии.

Отметим, что знание основных характеристик социально-психологической структуры социума, количества контактов в единицу времени, а также вероятности заражения позволяет строить более адекватные имитационные и математические модели распространения слухов и вируса.

Применение матриц в компьютерной графике

Научный руководитель – Тельнова Мария Юрьевна, канд. физ.-мат. наук, доц. кафедры высшей математики; руководитель проекта – Криницына Марина Васильевна, учитель математики МАОУ СОШ № 14, г. о. Балашиха; исполнители – Овчаренко Анжелика Анатольевна, Нешков Степан Александрович, Печул Александр Алексеевич, учащиеся 9 класса.

Цель: познакомиться с математическим аппаратом, лежащим в основе компьютерной графики, и научиться применять этот аппарат при решении основных задач, в частности, при решении задачи представления преобразования поворота точек плоскости как композиции двух преобразований «сдвига-масштабирования».

Задачи: изучить историю зарождения компьютерной графики; изучить понятие матрицы и основные операции над матрицами; подготовить анимации, наглядно демонстрирующие перемещения точек под действием умножения слева вектора из их координат на матрицы основных линейных преобразований; решить задачу представления преобразования поворота точек плоскости как композиции двух преобразований «сдвига-масштабирования»; сделать вывод.

подпитки со стороны некоторого постоянно действующего средства информации и социально незначимый уровень распространяемого слуха. Подтверждение результатов исследований было найдено в современных научных работах (см., например, [7]). Математическая модель распространения информации в своей основе содержит модель SIR.

Отметим, что аналогичная математическая модель используется в качестве базовой и для изучения распространения коронавируса. Для расчета вероятности заражения людей использовался симулятор, разработанный группой ученых во главе с профессором Хосе Луисом Хименесом (Университет Колорадо) с целью показать важность факторов, которые влияют на распространение коронавируса. Расчет не является исчерпывающим, но он показывает развитие рисков на основе факторов, которые целиком в нашей власти.

В проведенных опытах обращают на себя внимание следующие моменты: совпадение количества контактов активных коммуникаторов и близость вероятностей заражения в различных опытах. Таким образом, область распространения вируса, интенсивность его распространения, длительность существования и степень заражения находятся в такой же математической зависимости, как и распространение слухов. Таким образом, имитируя распространение слухов, можно прогнозировать и распространение эпидемии.

Отметим, что знание основных характеристик социально-психологической структуры социума, количества контактов в единицу времени, а также вероятности заражения позволяет строить более адекватные имитационные и математические модели распространения слухов и вируса.

Применение матриц в компьютерной графике

Научный руководитель – Тельнова Мария Юрьевна, канд. физ.-мат. наук, доц. кафедры высшей математики; руководитель проекта – Криницына Марина Васильевна, учитель математики МАОУ СОШ № 14, г. о. Балашиха; исполнители – Овчаренко Анжелика Анатольевна, Нешков Степан Александрович, Печул Александр Алексеевич, учащиеся 9 класса.

Цель: познакомиться с математическим аппаратом, лежащим в основе компьютерной графики, и научиться применять этот аппарат при решении основных задач, в частности, при решении задачи представления преобразования поворота точек плоскости как композиции двух преобразований «сдвига-масштабирования».

Задачи: изучить историю зарождения компьютерной графики; изучить понятие матрицы и основные операции над матрицами; подготовить анимации, наглядно демонстрирующие перемещения точек под действием умножения слева вектора из их координат на матрицы основных линейных преобразований; решить задачу представления преобразования поворота точек плоскости как композиции двух преобразований «сдвига-масштабирования»; сделать вывод.

В рамках исследования учениками, участниками проекта, были изучены понятие матрицы и основные операции над матрицами, понятие линейного преобразования и свойства линейных преобразований, изучена теорема, утверждающая, что для любого линейного преобразования T пространства $\mathbb{R}^n$ в пространство $\mathbb{R}^m$ существует единственная матрица A, такая, что для любого $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ выполняется равенство $T(\overline{x}) = A\overline{x}$. Оказывается, данную матрицу найти несложно, и ребята научились находить матрицы для основных линейных преобразований, используемых в двумерной и трехмерной компьютерной графике.

Поскольку параллельный перенос объекта на плоскости не является линейным преобразованием, он не может быть задан никакой матрицей размера 2×2. Чтобы устранить это препятствие, вводят так называемые однородные координаты: каждой точке $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ставят в соответствие точку $(x, y, 1) \in \mathbb{R}^3$. Тогда каждое линейное преобразование в $\mathbb{R}^2$ представляется с помощью однородных координат матрицей вида

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где A – соответствующая линейному преобразованию матрица размера 2×2.

Движение объекта на экране компьютера часто требует двух или более основных преобразований. Композиция таких преобразований обеспечивается последовательным умножением слева на соответствующую каждому новому преобразованию матрицу.

Для изображения трехмерных объектов на плоскости экрана используется преобразование центрального проектирования. Для реализации центрального проектирования, а также параллельного переноса в пространстве аналогично двумерному случаю вводятся однородные координаты для точек из $\mathbb{R}^3$ и пишутся матрицы уже размера 4×4.

После изучения основ теории ученики рассмотрели задачу представления вращения объекта в 2D-графике как результата двух преобразований «сдвига-масштабирования» с целью ускорения вычислений, определяющих координаты графического объекта на экране в терминах пикселей экрана.

На данный момент основной задачей программистов, инженеров, ученых и математиков, работающих над созданием 3D-графики, являются повышение качества изображений и ускорение вычислительных процессов с целью сделать виртуальную окружающую среду более реалистичной. На основе изученного материала учениками было отмечено, что матрицы составляют основную часть математического аппарата, который можно совершенствовать, решая все более и более сложные задачи.

Отметим, что тематика предложенных школьникам девятых классов работ не только опиралась на полученные ими в школе знания по математике, но потребовала знания материала, изучаемого студентами. Поэтому нами были прочитаны лекции, способствовавшие пониманию постановки задачи и методов исследования. Проекты заинтересовали школьников, были успешно представлены на конференции и получили высокую оценку экспертов.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Асташова, И. В.** Геометрия и топология: учебное пособие / И. В. Асташова, В. А. Никишин. – Москва: МЭСИ, 2011.

2. **Савёлов, А. А.** Плоские кривые. Систематика, свойства, применения: справочное руководство / А. А. Савёлов; под ред. А. П. Нордена. – Москва: Физматлит, 1960.

3. 33 самых невероятных здания мира [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://1tmn.ru/style/urbanism/33-samykh-neobychnykh-zdaniya-mira-4134660.html.

4. Водонапорные и другие башни [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://watertowers.ru/ vodonapornye-bashni/orekhovo-zuevo.

5. Что скрывает история Шуховской башни на Шаболовке [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://architectureguru.ru/shukhov-tower-in-moscow/.

6. **Измоденова, К. В.** Об оптимальном управлении процессом распространения информации / К. В. Измоденова, А. П. Михайлов // Математическое моделирование. – 2005. – Т. 17, № 5. – С. 67–76.

7. **Горковенко, Д. К.** Обзор моделей распространения информации в социальных сетях / Д. К. Горковенко // Молодой ученый. – 2017. – № 8 (142). – С. 23–28.

8. Как математика помогает бороться с эпидемиями [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://nplus1.ru/material/2019/12/26/epidemic-math.

9. **Богданов, А.** Сколько человек может заразить один больной коронавирусом [Электронный ресурс] / А. Богданов. – Режим доступа: https://hi-news.ru/research-development/ skolko-chelovek-mozhet-zarazit-odin-bolnoj-koronavirusom.html.

10. **Lay, David C.** Linear Algebra and Its Applications / David C. Lay // Pearson. – 2012. – 4th ed. – P. 1–576.

11. **Кудрина, М. А.** Компьютерная графика / М. А. Кудрина, К. Е. Климентьев. – Самара: Самарский гос. аэрокосм. ун-т, 2013. – С. 1–140.

12. **Галинский, В.** Компьютерная графика. Лекция 1: лекториум [Электронный ресурс] / В. Галинский. – 2018. – Режим доступа: https:/lektorium.tv/node/33155.

УДК 378.147

К ВОПРОСУ МЕЖДИСЦИПЛИНАРНОГО ПОДХОДА В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ В ТЕХНИЧЕСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

Б. А. БАДАК
Белорусский национальный технический университет
Минск, Беларусь

Одним из важнейших направлений модернизации современного математического образования является усиление проблемной направленности курса математики, осуществление связи его содержания и методики обучения с практикой.