УДК 533.6

Структура по Прандтлю – Карману решения задачи о динамическом турбулентном пограничном слое

В. Н. Лаптинский

В рамках теории Прандтля установлены структура и структурные свойства решения задачи о динамическом турбулентном пограничном слое.

Ключевые слова: динамический пограничный слой, турбулентность, задача Прандтля.

Structure according to Prandtl-Karman of solution to the dynamic turbulent boundary layer problem

V. N. Laptinskiy

Within the framework of Prandtl's theory, the structure and structural properties of the solution to the problem of a dynamic turbulent boundary layer are established.

Keywords: dynamic boundary layer, turbulence, Prandtl problem.

Исследуется система соотношений

$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dx} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau}{\partial y}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0, \tag{2}$$

$$u_x\big|_{y=0} = 0, \quad u_y\big|_{y=0} = 0; \quad u_x\big|_{y=\delta(x)} = U(x), \tag{3}$$

представляющая собой задачу Прандтля о динамическом турбулентном пограничном слое конечной толщины $\delta(x)$ в случае стационарного плоского течения несжимаемой жидкости (см., например, [9, с. 521], [1, с. 368]), при этом в турбулентном напряжении трения $\tau = \tau_l + \tau_t$ турбулентная составляющая τ_t, согласно Прандтлю, принята в виде

$$\tau_t = \rho \kappa^2 y^2 \left|\frac{\partial u_x}{\partial y}\right| \frac{\partial u_x}{\partial y}, \tag{4}$$

где $\tau_l = \mu \partial u_x / \partial y$ – ламинарная составляющая напряжения трения. Искомыми величинами являются функции $\delta(x)$ и $\tau_0(x)$ – касательное напряжение.

В случае ламинарного течения в работе [7] по методу [6] получены точные формулы для $\delta(x),\ \tau_0(x)$. В работе [3] тем же методом с учетом (4) выведены соотношения

$$\delta^2(x)=J\int_0^x\left(\frac{U(\tau)}{U(x)}\right)^k\delta(\tau)d\tau+\frac{2\nu}{\varphi}\int_0^x\frac{U^{k-1}(\tau)}{U^k(x)}d\tau, \tag{5}$$

$$\tau_0(x)=\left(1+\frac{\psi}{\varphi}\right)\frac{\mu U}{\delta}+\left(a-\frac{b\psi}{\varphi}\right)\rho UU'\delta+\frac{1}{2}(\varphi+\psi)\rho U^2J, \tag{6}$$

где

$$\varphi=\int_0^1 f(s)(1-sf(s))ds-\frac{1}{2}\left(\int_0^1 f(s)ds\right)^2,\quad \psi=\frac{1}{2}\left(\int_0^1 f(s)ds\right)^2-\int_0^1(1-s)f^2(s)ds,$$

$$J=2\kappa^2J_0/\varphi,\quad k=2b/\varphi,\ a=\frac{1}{2}\left(\int_0^1 f(s)ds\right)^2-2\int_0^1(1-s)f^2(s)ds+\frac{1}{2},$$

$$b=\int_0^1 f(s)(1-2sf(s))ds-\frac{1}{2}\left(\int_0^1 f(s)ds\right)^2+\frac{1}{2}.$$

Как и задача [7], эта задача относится к обратным задачам газо- и гидродинамики, теплофизики. Она гораздо сложнее, чем задача [7], даже с учетом гипотезы Прандтля; это проявляется в соотношениях (5), (6) присутствием нелинейного интегрального функционала (функционала Прандтля)

$$J_0=\int_0^1 s^2\left|f'(s)\right|f'(s)ds, \tag{7}$$

где $f'(s)=df(s)/ds$, $f(s)$ – полуэмпирическая функция автомодельного типа, определяемая по соответствующему профилю скоростей [8, 9 и др.] $u_x/U=(y/\delta)^n$.

Согласно методикам [4], [6], аналогом функции $f(y/\delta)$ является вспомогательная функция $\psi(x,y)$; ее построение связано с громоздкими выкладками. Поэтому присутствие функционала (7) не позволяет считать соотношения (5), (6) ключом к решению задачи (1)–(3), а рассматривать их как ее промежуточное решение. В [2] этот функционал исключен из этих соотношений, но с использованием эмпирически определяемого сопротивления трения пластины конечной длины.

В связи с отмеченным возникает задача изучения структуры и структурных свойств функций $\delta(x),\ \tau_0(x)$. В данной работе, являющейся продолжением [2–4] и развитием [5–7], эта задача исследуется на основе формулы Прандтля и формализованного соотношения Кармана [1, 8, 9]:

$$\tau(x,y)=\mu\frac{\partial u_x}{\partial y}+\rho\kappa^2y^2\left|\frac{\partial u_x}{\partial y}\right|\frac{\partial u_x}{\partial y}, \tag{8}$$

$$\frac{d\delta}{dx}+\left(2+\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)\frac{U'}{U}\delta=\frac{\tau_0}{\alpha_1\rho U^2}, \tag{9}$$

где

$$\alpha_1=\int_0^1 f(s)\big(1-f(s)\big)ds,\ \alpha_2=\int_0^1\big(1-f(s)\big)ds.$$

Следуя методу [6], на основе (1)–(3), (8) с использованием величины ударной вязкости пограничного слоя имеем структуру функций $\delta(x),\ \tau_0(x)$ в следующем виде:

$$\delta(x)=\frac{\nu}{U(x)}h_\delta, \tag{10}$$

$$\tau_0(x)=\rho\,U^2(x)\,h_\tau, \tag{11}$$

где

$$h_\delta=\frac{(c_\tau-c_l)\,c_l}{\kappa^2\,c_t}, \tag{12}$$

$$h_\tau=\frac{\kappa^2\,c_t}{(c_\tau-c_l)\,c_l^2}; \tag{13}$$

здесь $c_\tau=c_\tau(x),\ c_l=c_l(x),\ c_t=c_t(x)$ – структурные функции, определяемые на основе безразмерных интегральных средних на промежутке $\left[0,\delta(x)\right]$ соответственно напряжений трения τ,τ_l,τ_t. Заметим, что величины $\delta,\ \tau_0,\ h_\delta,\ h_\tau$ связаны соотношением

$$\delta^2\tau_0=\nu\mu H(x), \tag{14}$$

где $H(x)=h_\delta(x)/c_l(x)=1/\big(h_\tau(x)c_l^2(x)\big)$.

Формула (14) относится к структурным свойствам решения задачи (1)–(3) в рамках гипотезы Прандтля (8).

Установим структуру и структурные свойства по Прандтлю – Карману решения задачи (1)–(3). На основе (10), (11) получим уравнение

$$\frac{dh_\delta^2}{dx}+2\left(1+\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)\frac{U'}{U}h_\delta^2=\frac{2U}{\alpha_1\nu c_l},$$

из которого находим

$$h_\delta^2(x)=\frac{2}{\alpha_1\nu}U^r(x)\int_0^x U^{-r+1}(s)c_l^{-1}(s)ds;\quad r=-2\left(1+\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right). \tag{15}$$

Аналогично из (11), (14) имеем следующее уравнение:

$$\frac{d\delta^3}{dx}+3\left(2+\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)\frac{U'}{U}\delta^3=\frac{3\nu^2 h_\delta}{\alpha_1 c_l U^2};$$

его частный интеграл имеет вид

$$\delta^3(x)=\frac{3\nu^2}{\alpha_1}U^l(x)\int_0^x U^{-(l+2)}(s)H(s)ds;\quad l=-3\left(2+\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right). \tag{16}$$

Далее с помощью (9), (11) получим уравнение

$$\frac{d\delta}{dx}+\left(2+\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)\frac{U'}{U}\delta=\frac{h_\tau}{\alpha_1}$$

и его соответствующее решение

$$\delta(x)=\frac{1}{\alpha_1}U^m(x)\int_0^x U^{-m}(s)h_\tau(s)ds;\quad m=-\left(2+\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right). \tag{17}$$

В работе функция $\delta(x)$ подчинена условию $\delta(0)=0,$ принятому в классической теории пограничного слоя [1, 8, 9 и др.].

Формулы (16), (17) дают соотношение, связывающие структурные функции $h_\delta,\ h_\tau,\ c_l,$

$$U^{3m-l}(x)\left(\int_0^x U^{-m}(s)h_\tau(s)ds\right)^3=3\left(\alpha_1\nu\right)^2\int_0^x U^{-(l+2)}(s)H(s)ds. \tag{18}$$

Используя (14), (15), получим

$$\delta^2(x)\tau_0(x)=\frac{\mu}{c_l(x)}\left(\frac{2\nu}{\alpha_1}U^r(x)\int_0^x U^{-r+1}(s)c_l^{-1}(s)ds\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{19}$$

Теперь на основе (10)–(13) выводим формулу, определяющую идеальную ударную вязкость пограничного слоя,

$$\delta(x)\tau_0(x)=\mu U(x)h_\delta(x)h_\tau(x) \tag{20}$$

или

$$\delta(x)\tau_0(x)=\frac{\mu U(x)}{c_l(x)}. \tag{21}$$

Соотношения (10), (11) определяют структуру по Прандтлю функций $\delta(x),\ \tau_0(x)$. Формулы (18)–(21) представляют собой их структурные свойства по Прандтлю – Карману.

Заметим, что поверхностное натяжение и ударная вязкость имеют одинаковую размерность, однако они различные по физическому смыслу.

Очевидно, на основе (9)–(11) круг структурных свойств типа (19), (20) решения задачи Прандтля может быть формально расширен, однако соотношения (5), (6) более продуктивны в этом смысле, поскольку изначально на основании [6] информативно полнее.

Список использованных источников и литературы

1. *Емцев*, *Б. Т.* Техническая гидромеханика / Б. Т. Емцев. – Москва : Машиностроение, 1987. – 440 с.

2. *Лаптинский*, *В. Н.* Замкнутое решение задачи Прандтля о динамическом турбулентном пограничном слое / В. Н. Лаптинский // Материалы, оборудование и ресурсосберегающие технологии : материалы Междунар. науч.-техн. конф., Могилев, 23-24 апр. 2020 г. / Белорус.-Рос. ун-т. – Могилев, 2020. – С. 487.

3. *Лаптинский*, *В. Н.* К решению задачи о динамическом турбулентном пограничном слое / В. Н. Лаптинский // Еругинские чтения – 2019 : материалы XIX Междунар. науч. конф. по дифференц. уравнениям, Могилев, 14–17 мая 2019 г. / Белорус.-Рос. ун-т. – Могилев, 2019. – Ч. II. – С. 82–84.

4. *Лаптинский*, *В. Н.* Конструктивный метод анализа задачи о динамическом турбулентном пограничном слое / В. Н. Лаптинский // Актуальные проблемы естественных наук и их преподавание : сб. науч. статей Междунар. науч.-практ. конф., посвященной 100-летию МГУ им. А.А Кулешова, Могилев, 20–22 февраля 2013 г. / МГУ им. А. А Кулешова. – Могилев, 2013. – С. 86–89.

5. *Лаптинский*, *В. Н.* Конструктивный метод анализа задачи о ламинарном пограничном слое и его применение к расчету охлаждающей способности кристаллизаторов при непрерывном литье / В. Н. Лаптинский // Препринт ИТМ НАН Беларуси № 18. Ч. II. – Могилев: БРУ, 2010. – 28 с.

6. *Лаптинский*, *В. Н.* Об одном аналитическом методе решения задачи о динамическом ламинарном пограничном слое в автомодельном случае / В. Н. Лаптинский // Ученые записки ЦАГИ. – 2013. – Т. XLIV, № 5. – С. 72– 93.

7. *Лаптинский*, *В. Н.* Точное решение задачи Прандтля о динамическом ламинарном пограничном слое / В. Н. Лаптинский // Дифференциальные уравнения. – 2020. –Т. 56, № 4. – С. 549–552.

8. Основы теплопередачи в авиационной и ракетно-космической технике / В. С. Авдуевский [и др.]. – Москва : Машиностроение, 1975. – 624 с.

9. *Шлихтинг*, *Г.* Теория пограничного слоя / Г. Шлихтинг. – Москва : Наука, 1974. – 712 с.

Сведения об авторе

Валерий Николаевич Лаптинский, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры «Высшая математика» Белорусско-Российского университета (Республика Беларусь, г. Могилев), lavani@tut.by