МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Техническая эксплуатация автомобилей»

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ НА АВТОМОБИЛЬНОМ ТРАНСПОРТЕ

Методические рекомендации к лабораторным работам для студентов специальностей 1-37 01 06 «Техническая эксплуатация автомобилей (по направлениям)» и 1-37 01 07 «Автосервис» очной и заочной форм обучения

Могилев 2022

УДК 004.4:629.331
ББК 32.973.26-018.2:39.3
И88

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Техническая эксплуатация автомобилей» «25» ноября 2021 г., протокол № 4

Составители: ст. преподаватель О. А. Пономарева;
ст. преподаватель С. Ю. Билык

Рецензент ст. преподаватель Ю. С. Романович

Изложены рекомендации к лабораторным работам по дисциплине «Использование вычислительной техники на автомобильном транспорте» для студентов специальностей 1-37 01 06 «Техническая эксплуатация автомобилей (по направлениям)», 1-37 01 07 «Автосервис» очной и заочной форм обучения.

Учебно-методическое издание

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ
НА АВТОМОБИЛЬНОМ ТРАНСПОРТЕ

Ответственный за выпуск О. В. Билык

Корректор И. В. Голубцова

Компьютерная верстка Е. В. Ковалевская

Подписано в печать . Формат 60 × 84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 31 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.

Содержание

1 Лабораторная работа № 1. Определение уравнения регрессии на основе использования Excel

Цель работы: приобретение навыков определения уравнения регрессии на основе использования Excel.

1.1 Теоретические сведения

Часто целью исследования является определение функциональной связи между факторами и откликом (реакцией модели) по данным, полученным при экспериментах с моделью объекта или непосредственно с объектом. Такая цель достигается регрессионным анализом значений факторов x и отклика y.

Регрессионный анализ – это совокупность методов построения и исследования регрессионной зависимости между величинами (в рассматриваемом случае между факторами и откликом) по статистическим данным, которые накапливаются при проведении эксперимента.

Важным этапом регрессионного анализа является определение типа функции уравнения регрессии, с помощью которой характеризуется зависимость между признаками. На практике в качестве функции $y = f(x)$ для регрессии используются следующие виды функций (таблица 1.1).

Таблица 1.1 – Виды функций регрессии

Вид	Функция
Линейная	$y_i = ax_i + b$
Гиперболическая	$y_i = \frac{a}{x_i} + b$
Экспоненциальная	$y_i = ae^{x_i} + b$
Степенная	$y_i = ax_i^b$
Показательная	$y_i = ab^{x_i}$
Параболическая	$y_i = ax_i^2 + bx_i + c$

Для определения вида уравнения регрессии в лабораторной работе применим экспериментальный подход, при котором для нескольких наиболее подходящих функций регрессий строятся соответствующие уравнения регрессии (т. е. вычисляются коэффициенты уравнения регрессии). Выбор «наилучшего» уравнения осуществляется путем сравнения некоторых показателей, характеризующих близость уравнения регрессии к заданным значениям y_i.

В силу своей трудоемкости экспериментальный метод подразумевает применение вычислительной техники и соответствующего программного обеспечения (табличного процессора Excel). При выборе вида регрессии необходимо следовать принципу минимальной сложности: при наличии нескольких альтернативных функций $f(x)$ первоначально принимают самую простую (линейную) и, если она не адекватна заданной выборке, то переходят к более сложной функции $f(x)$ (см. таблицу 1.1). Таким образом, задача регрессионного анализа сводится к определению коэффициентов a и b.

Для определения наилучшей линии регрессии применяют метод наименьших квадратов (МНК), т. е. подбирают такую линию регрессии, чтобы общая сумма квадратов отклонений значений зависимой переменной была наименьшей. Найденные из этого условия коэффициенты a и b обеспечивают минимальные отличия значений функции от наблюдаемых ординат y_i.

Чем больше абсолютное значение коэффициента регрессии, тем значительнее влияние факторного признака на результативный признак. Знак коэффициента регрессии говорит о характере влияния на результативный признак. Если коэффициент регрессии имеет знак «плюс», то с увеличением фактора результатный признак возрастает. Если коэффициент регрессии имеет знак «минус», то с его увеличением результативный признак уменьшается.

Алгоритм определения параметров эмпирической формулы методом наименьших квадратов в Excel.

1 Перенести в таблицу Excel результаты экспериментальных данных и построить точечный график для определения вида уравнения регрессии.

2 Включить в Excel надстройку *Поиск решения*.

3 Выделить в Excel ячейки для постоянных коэффициентов регрессии и записать само уравнение регрессии, используя относительные (для x_i) и абсолютные (для a и b) ссылки.

4 Создать в Excel целевую ячейку с формулой для определения суммы наименьших квадратов.

5 Вызвать функцию *Поиск решения* и заполнить ДО *Поиск решения*.

6 Сохранить полученное решение.

7 Добавить на область *Диаграммы* полученную теоретическую линию регрессии.

8 Проверить другие зависимости из таблицы 1.1 (см. п. 3–7).

9 Сравнить результаты и сделать вывод о более подходящем уравнении регрессии.

1.2 Задания к лабораторной работе

Используя метод наименьших квадратов (МНК), подобрать уравнение регрессии для заданного варианта из таблицы 1.2.

Таблица 1.2 – Варианты заданий

Вариант	Задание									
1	Пробег самосвала, тыс. км	40	80	120	160	200	240	280	320	360
	Коэффициент подачи $K_ф$	0,98	0,97	0,96	0,92	0,87	0,75	0,58	0,47	0,41
2	Пробег автомобиля, тыс. км	50	100	200	300	400	500	600	700	800
	Количество газов	90	92	87	95	97	110	150	200	250
3	Наработка, мото-час	100	200	300	400	500	600	700	800	900
	Масса осадка, г	50	108	165	220	272	310	348	376	412
4	Высота подъема, м	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5
	Давление, МПа	4,9	6	6,8	7,5	8	7,6	6,9	4,6	1,5
5	Время уплотнения, мин	0,5	0,8	1	1,5	1,8	2	2,4	2,7	3
	Плотность асфальтобетона, т/м^3	1,5	1,8	2,1	2,2	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8
6	Количество проходов катка	4	6	8	10	12	14	16	18	20
	Плотность грунта, т/м^3	1,5	1,7	1,78	1,9	1,99	2,01	2,09	2,09	2,1
7	Наклон ротора, град	0	10	15	25	30	45	55	60	70
	Дальность отбрасывания, м	1	7	13	20	23	25	24	21	16
8	Угол подъема, град	0	2	3	4	5	7	8	9	10
	Сила сопротивления, кН	100	107	110	113	117	124	127	131	134
9	Угол поворота, град	0	15	30	45	60	90	110	130	150
	Время цикла, с	10	16	21	26	29	32	34	34	33
10	Вместимость ковша, м^3	0,2	0,4	0,5	0,7	0,8	1	1,1	1,3	1,4
	Время погрузки, с	60	80	100	120	140	160	180	200	220
11	Высота подъема, м	1,2	2,5	4	4,7	5	4,8	4	2,4	1,1
	Давление, МПа	1,6	6,6	17	23	28	23	18	6,3	1,5
12	Угол, град	1,8	2,5	9,8	16	17	14	8,6	2,5	1,8
	Сила сопротивления, Н	3,1	5,9	70	173	200	132	54	5,7	2,8
13	Время, тыс. ч	0	0,8	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
	Толщина, мм	2	1	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2
14	Пробег, тыс. км	0	25	28	29	30	31	32	34	36
	Стоимость, у. е.	0	42	70	81	89	115	120	135	142

1.3 Пример выполнения задания

1 Перенести в таблицу Excel исходные данные и построить точечный график для определения вида уравнения регрессии (рисунок 1.1).

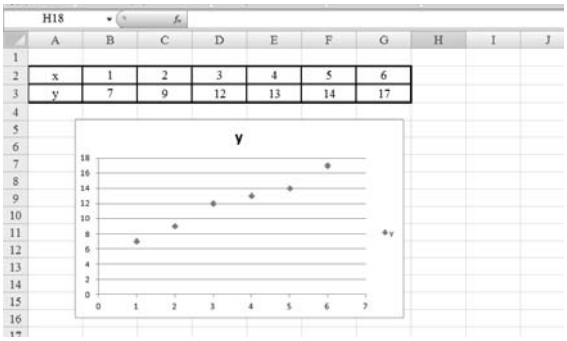


Рисунок 1.1 – Построение графика экспериментальных данных

2 Включить в Excel надстройку *Поиск решения*. Для этого переходим на вкладку *Файл→Параметры*. В открывшемся окне выбрать раздел *Надстройки*. В блоке Управление, который расположен в нижней части окна, установить переключатель в позицию Надстройки Excel и нажать на кнопку *Перейти…*. В ДО *Надстройки* поставить галочку около параметра *Поиск решения*. Нажать на кнопку *ОК*. Функция *Поиск решения* в Excel активирована, а её инструменты появились на ленте на вкладке *Данные*.

3 Выделить в Excel ячейки для постоянных коэффициентов регрессии и записать само уравнение регрессии, используя относительные (для x_i) и абсолютные (для a и b) ссылки (рисунок 1.2).

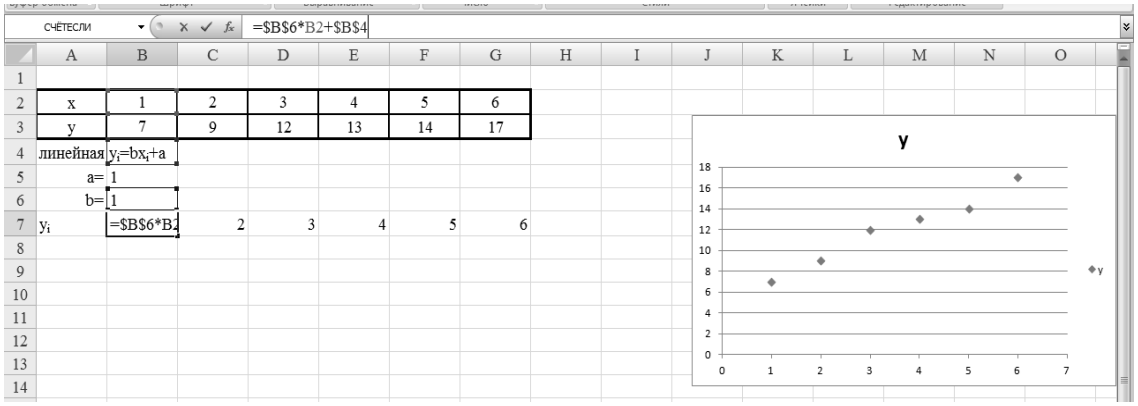


Рисунок 1.2 – Заполнение таблицы Excel

4 Создать в Excel (рисунок 1.3) целевую ячейку с формулой для определения суммы наименьших квадратов **=СУММКВРАЗН(B3:G3;B7:G7).**

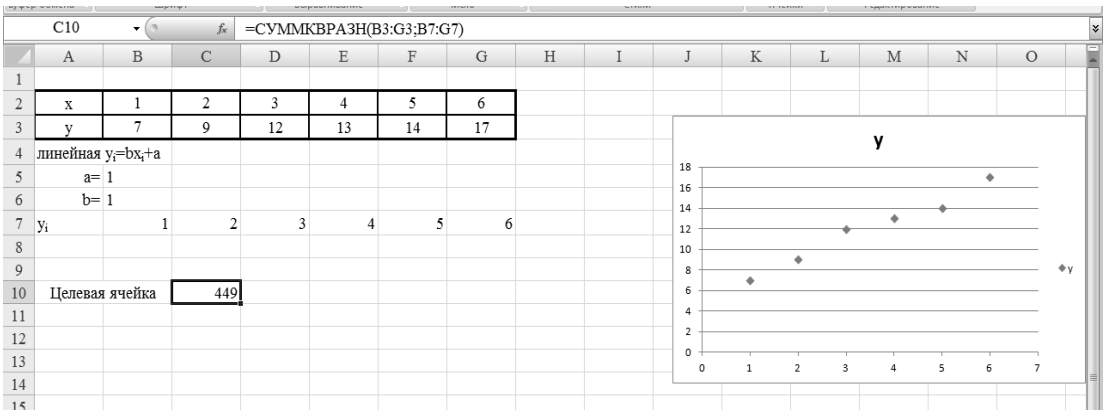


Рисунок 1.3 – Создание целевой ячейки

5 Вызвать функцию *Поиск решения* и заполнить ДО *Поиск решения* следующим образом (рисунок 1.4):

– в поле *Установить целевую ячейку* установить ссылку на целевую ячейку в Excel;

– переключатель *Равной* выставить на минимальное значение;

– в поле *Изменяя значения ячейки* ввести ссылки на ячейки с числовыми значениями коэффициентов регрессии и нажать кнопку *Выполнить*.

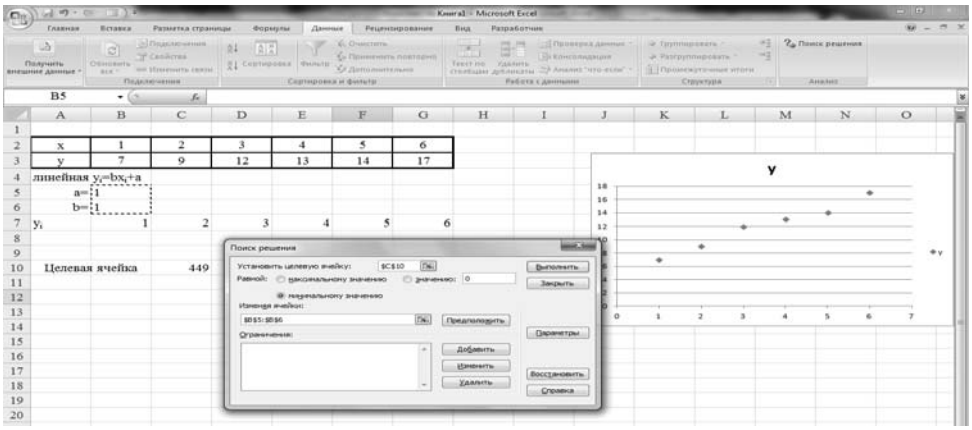


Рисунок 1.4 – Заполнение ДО *Поиск решения*

6 Сохранить полученное решение.

7 Добавить на область *Диаграммы* полученную теоретическую линию регрессии (рисунок 1.5).

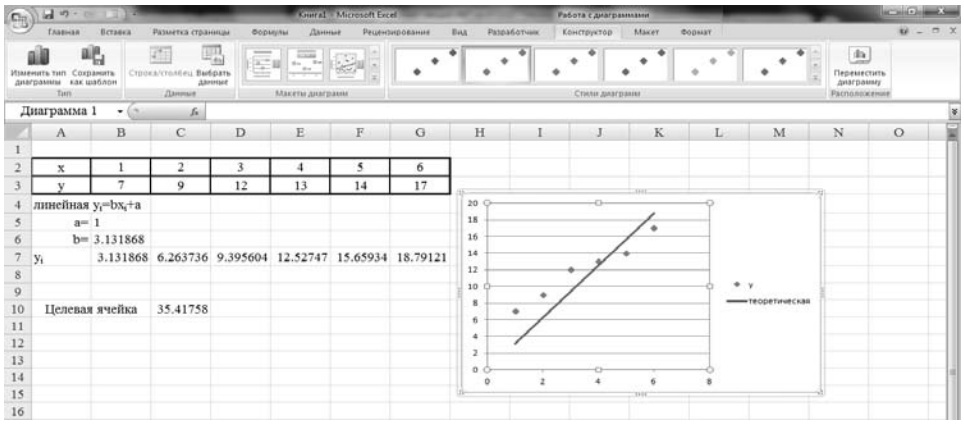


Рисунок 1.5 – Результаты построения линейной регрессии

8 Проверить квадратичную зависимость (см. п. 3–7) (рисунок 1.6).

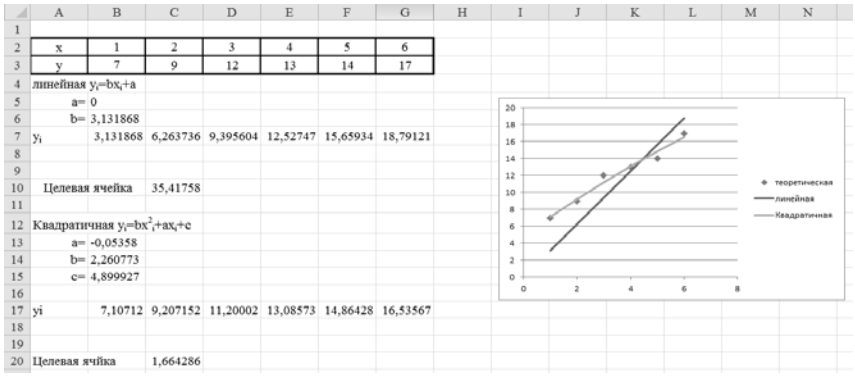


Рисунок 1.6 – Результаты построения параболической регрессии

Отчеты должны содержать

1) название лабораторной работы;
2) цель лабораторной работы;
3) задание согласно варианту, выданному преподавателем;
4) математическую модель задачи;
5) ход выполнения работы с описанием действий и рисунками;
6) вывод по лабораторной работе.

Все отчеты по лабораторным работам оформляются по ГОСТ 2.105–95 в одном файле MS Word, шрифт Times New Roman 14пт, интервал 1, абзацный отступ 10.

2 Лабораторная работа № 2. Определение уравнения регрессии с помощью встроенных функций Excel

Цель работы: приобретение навыков определения вида уравнения регрессии с помощью встроенных функций Excel.

2.1 Теоретические сведения

Так как задача отыскания регрессионной зависимости очень важна, в Excel введен набор функций, которые позволяют решать эту задачу. Эти функции основаны на методе наименьших квадратов. В качестве результата выдаются не только коэффициенты аппроксимирующей функции, но и статистические характеристики полученных результатов.

Достоинствами инструмента встроенных функций для регрессионного анализа являются: простой однотипный процесс формирования рядов данных исследуемой характеристики для всех встроенных статистических функций; стандартная методика построения линий тренда на основе сформированных рядов данных; возможность прогнозирования поведения исследуемого процесса на необходимое количество шагов вперед или назад.

К недостаткам относится то, что в Excel нет встроенных функций для создания других (кроме линейного и экспоненциального) типов линий тренда. Это обстоятельство часто не позволяет подобрать достаточно точную модель исследуемого процесса, а также получить близкие к реальности прогнозы.

Функция **ЛИНЕЙН** вычисляет коэффициенты a и b прямой линии $y = ax + b$, которая наилучшим образом аппроксимирует имеющиеся данные, а также дополнительную регрессионную статистику. Синтаксис функции:

ЛИНЕЙН(известные_y, [известные_x], [константа], [статистика])

Известные_y – обязательный аргумент. Множество значений y, которые уже известны для соотношения $y = ax + b$.

Известные_x – необязательный аргумент. Множество значений x, которые уже известны для соотношения $y = ax + b$.

Константа – необязательный аргумент. Если аргумент Константа = 0, то b принудительно полагается равным нулю, т.е. $y = ax$.

Статистика – необязательный аргумент. Если аргумент Статистика = 0 или опущен, то вычисляются только коэффициенты a и b, а если = 1, то выдаются дополнительные статистические характеристики.

Функция **НАКЛОН** вычисляет коэффициент a – тангенс угла наклона прямой регрессии. Например: **=НАКЛОН(y;x)**.

Функция **ОТРЕЗОК** вычисляет коэффициент b – отрезок, отсекаемый прямой на оси ординат. Например: **=ОТРЕЗОК(y;x)**.

Функция **ЛГРФПРИБЛ** вычисляет коэффициенты экспоненциальной кривой, а также выдает дополнительную регрессионную статистику. Поскольку данная функция возвращает массив значений, она должна вводиться как формула массива. Синтаксис функции:

ЛГРФПРИБЛ(известные_y; [известные_x]; [константа]; [статистика])

Известные_y – обязательный аргумент. Множество значений y, которые уже известны для соотношения $y = ba^x$.

Известные_x – необязательный аргумент. Множество значений x, которые уже известны для соотношения $y = ba^x$. Если аргумент опущен, то предполагается, что это массив {1;2;3;...} такого же размера, как и **известные_y**.

Константа – необязательный аргумент. Если аргумент Константа = 0, то b принудительно полагается равным единице. Если аргумент Константа опущен, то b вычисляется обычным образом.

Статистика – необязательный аргумент. Если аргумент Статистика опущен, то вычисляются только коэффициенты a и b, а если равен единице, то выдаётся ещё и дополнительная статистика по регрессии.

Функция **РОСТ** рассчитывает прогнозируемый экспоненциальный рост на основании имеющихся данных и вычисляет значения y для последовательности новых значений x, задаваемых с помощью известных x и y значений.

РОСТ(известные_y; [известные_x]; [новые_x])

Известные_y – обязательный аргумент. Множество значений y, которые уже известны для соотношения $y = ba^x$.

Известные_x – необязательный аргумент. Множество значений x, которые уже известны для соотношения $y = ba^x$. Если аргумент опущен, то предполагается, что это массив {1;2;3;...} такого же размера, как и **известные_y**.

Новые_x – необязательный аргумент. Новые значения x, для которых РОСТ возвращает соответствующие значения y.

2.2 Задания к лабораторной работе

Используя набор встроенных функций в Excel подобрать уравнение регрессии для заданного из таблицы 2.1 варианта.

Таблица 2.1 – Варианты заданий

Вариант	Задание									
1	*x*	0	0,79	0,99	1,13	1,34	1,36	1,4	1,44	1,49
	y	1,98	0,99	0,84	0,74	0,62	0,60	0,58	0,56	0,54
2	*x*	0,002	2,456	2,789	2,88	2,937	3,001	3,056	3,099	3,123
	y	0,9	42	70,9	81,9	89,4	98,8	107,7	115,3	119,7
3	*x*	1,235	2,234	2,57	2,678	2,897	2,9	2,932	3,002	3,1
	y	0,589	0,125	0,074	0,063	0,045	0,044	0,042	0,038	0,032
4	*x*	0,006	0,198	0,234	0,259	0,298	0,333	0,378	0,4	0,456
	y	1,975	1,669	1,617	1,582	1,529	1,483	1,426	1,398	1,331
5	*x*	1,789	5,677	6,324	6,789	6,899	7,123	7,199	7,324	7,399
	y	0,752	4,433	5,954	7,360	7,739	8,571	8,874	9,394	9,721
6	*x*	0	0,8	1	1,1	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7
	y	1,98	0,99	0,84	0,74	0,62	0,60	0,54	0,44	0,36
7	*x*	0	1	2	3	4	5	6	7	8
	y	0	5	10	15	24	32	36	41	49
8	*x*	5	10	15	20	25	30	35	40	45
	y	0,5	1	1,5	2	2,4	2,9	3,5	4	4,4
9	*x*	0	2	4	6	8	10	12	14	16
	y	0	18	40	59	82	100	123	142	161
10	*x*	0	0,3	0,6	0,9	1,2	1,5	1,8	2,1	2,4
	y	0	300	596	911	1222	1570	1888	2100	2412
11	*x*	100	200	300	400	500	600	700	800	900
	y	1	2	3	4	5	6	7	8	9
12	*x*	0	1,5	3,0	4,5	6,0	7,5	9,0	10,5	12,0
	y	0	30	59	91	120	152	180	210	244
13	*x*	0,001	0,002	0,003	0,004	0,005	0,006	0,007	0,008	0,009
	y	0	2	4	6	8	10	12	14	16
14	*x*	0	0,2	0,24	0,26	0,3	0,34	0,38	0,4	0,46
	y	2	1,7	1,6	1,5	1,4	1,3	1,2	1,1	1

2.3 Пример выполнения задания

1 Перенести в таблицу Excel исходные данные и построить точечный график для определения вида уравнения регрессии (рисунок 2.1).

2 Выделить в Excel ячейки для постоянных коэффициентов регрессии и записать формулу линейной регрессии, используя относительные (для x_i) и абсолютные (для *a* и *b*) ссылки (см. рисунок 2.1).

3 Построить полученную теоретическую линию регрессии (см. рисунок 2.1).

4 Применить функцию ЛИНЕЙН для нахождения коэффициентов линейной регрессии для диапазона (см. рисунок 2.1).

5 Применить функции НАКЛОН и ОТРЕЗОК для нахождения коэффициентов линейной регрессии (см. рисунок 2.1).

6 Добавить на область *Диаграммы* полученные линии регрессии.

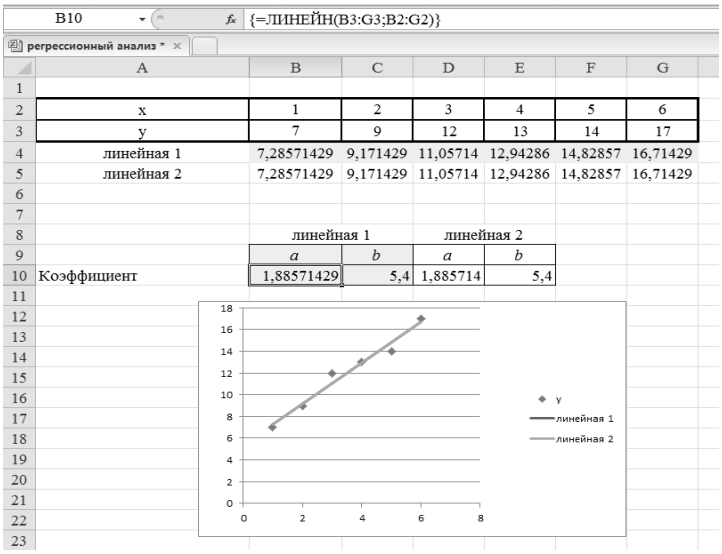


Рисунок 2.1 – Применение встроенных функций для нахождения коэффициентов линейной регрессии

7 Выделить в Excel ячейки для постоянных коэффициентов регрессии и записать экспоненциальное уравнение регрессии, используя относительные (для x_i) и абсолютные (для a и b) ссылки (рисунок 2.2).

8 Построить полученную теоретическую линию регрессии (см. рисунок 2.2).

9 Применить функцию ЛГРФПРИБЛ для нахождения коэффициентов регрессии для диапазона (см. рисунок 2.2).

10 Применить функцию РОСТИ для нахождения экспоненциальной регрессии (см. рисунок 2.2).

11 Добавить на область *Диаграммы* полученные линии регрессии (см. рисунок 2.2).

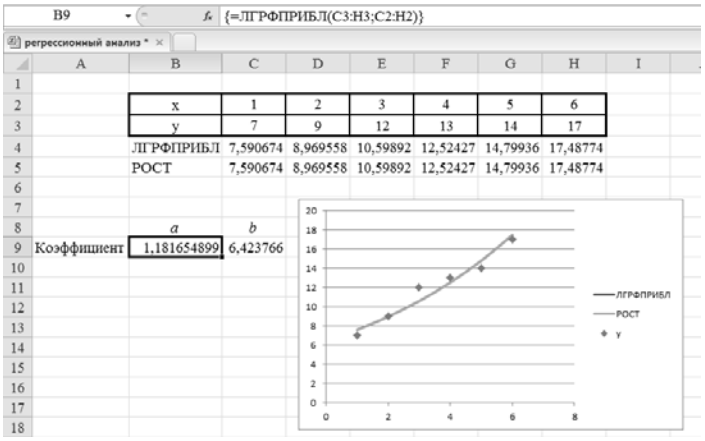


Рисунок 2.2 – Применение встроенных функций для нахождения коэффициентов экспоненциальной регрессии

3 Лабораторная работа № 3. Решение задач оптимизации с помощью Excel (задача о наилучшем использовании ресурсов)

Цель работы: получение навыков в решении задач оптимизации с помощью Excel (задача о наилучшем использовании ресурсов).

3.1 Теоретические сведения

Под *оптимизацией* понимают процесс выбора наилучшего варианта из всех возможных. С точки зрения инженерных расчетов методы оптимизации позволяют выбрать наилучший вариант конструкции, наилучшее распределение ресурсов и т. д. В процессе решения задачи оптимизации обычно необходимо найти оптимальные значения некоторых параметров, определяющих данную задачу. При решении инженерных задач их принято называть проектными параметрами.

Выбор оптимального решения или сравнение двух альтернативных решений проводится с помощью некоторой зависимой величины (функции), определяемой проектными параметрами. Эта величина называется целевой функцией (или критерием качества).

Ограничения неизбежно появляются при проектировании технических объектов и вытекают из конкретной физической и технологической реализуемости внутренних параметров элементов, ограниченности ресурсов и т. п.

Для решения задач оптимизации в MS Excel используется инструмент *Поиск решения*.

Общий алгоритм решения оптимизационных задач в MS Excel следующий:

1) составить математическую модель;

2) ввести на рабочий лист Excel условия задачи:

а) создать таблицу на рабочем листе для ввода условий задачи;

б) ввести исходные данные, целевую функцию, ограничения и граничные условия;

3) выполнить команду *Данные → Анализ → Поиск решения*;

4) указать параметры в диалоговом окне *Параметры поиска решения*, выполнить решение;

5) проанализировать полученные результаты.

При решении задач о наилучшем использовании ресурсов необходимо определить оптимальный вариант выпуска продукции или выполнения работ при определенном количестве имеющихся ресурсов с получением максимального дохода.

Допустим, например, что предприятие имеет в своём распоряжении определённое количество ресурсов: рабочую силу, деньги, сырьё, оборудование, производственные площади и т. п. При этом предприятие может выпускать продукцию известного числа видов или оказывать известное число услуг.

Информация о количестве единиц каждого ресурса, необходимых для производства одного вида продукции (услуг), и доходах, получаемых предприятием от единицы каждого вида товаров, заранее известна.

Целевая функция

$$Z = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \Rightarrow \min(\max). \tag{3.1}$$

Ограничения

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \le b_i \quad (i = 1,\ m). \tag{3.2}$$

Условие неотрицательности следует из практического смысла переменных:

$$x_{ij} \ge 0 \ (i = 1, m\ ; j = 1, n). \tag{3.3}$$

3.2 Задания для лабораторной работы

Вариант 1. Фирма производит две модели (А и В) сборных книжных полок. Их производство ограничено наличием сырья и временем машинной обработки. Для каждого изделия модели А требуется 3 м^3 досок, а для изделия модели В – 4 м^3. Фирма может получать от своих поставщиков до 1700 м^3 досок в неделю. Для каждого изделия модели А требуется 12 мин машинного времени, а для изделия модели В – 30 мин. В неделю можно использовать 160 ч машинного времени. Сколько изделий каждой модели следует выпускать фирме в неделю для получения максимальной прибыли, если каждое изделие модели А приносит прибыль 2 долл., а каждое изделие модели В – 4 долл?

Вариант 2. При изготовлении двух изделий (П1 и П2) используются токарные и фрезерные станки, а также сталь и цветные металлы. По технологическим нормам на производство единицы изделия П1 требуется 300 и 200 ед. соответственно токарного и фрезерного оборудования (в станко-часах) и 10 и 20 ед. стали и цветных металлов соответственно (в килограммах). Для производства единицы изделия П2 требуется 400, 100, 70, 50 соответствующих единиц тех же ресурсов. Цех располагает 12400 и 6800 станко-часами оборудования, 640 и 840 кг материалов. Прибыль от реализации единицы изделия П1 – 6 у. е., П2 – 16 у. е.. Требуется определить план выпуска изделий, обеспечивающих максимальную прибыль при условии, что время работы фрезерных станков должно быть использовано полностью.

Вариант 3. Фирма производит два продукта (А и В), рынок сбыта которых неограничен. Каждый продукт должен быть обработан каждой машиной I, II, III. Время обработки для каждого изделия А и В приведено в таблице 3.1.

Время работы машин I, II, III соответственно 40, 36 и 36 ч в неделю. Фирме надо определить недельные нормы выпуска изделий А и В, максимизирующие прибыль.

Таблица 3.1 – Данные для расчета

Вид продукции	Время обработки, ч			Прибыль, у. е.
	I	II	III	
A	0,5	0,4	0,2	5
B	0,25	0,3	0,4	3

Вариант 4. Фирма производит три вида продукции (A, B, C). Для выпуска каждого вида продукции требуется определенное время обработки на четырех устройствах I, II, III, IV (таблица 3.2). Время работы на устройствах соответственно 84, 42, 21 и 42 ч. Определить, какую продукцию и в каких количествах стоит производить для максимизации прибыли.

Таблица 3.2 – Данные для расчета

Вид продукции	Время обработки, ч				Прибыль, у. е.
	I	II	III	IV	
A	1	3	1	2	3
B	6	1	3	3	6
C	3	3	2	4	4

Вариант 5. При производстве продукции П1 и П2 используются четыре группы оборудования: A, B, C, D. На выпуск единицы продукции П1 расходуется в единицу времени 1; 0,5; 2 и 0 ед. оборудования A, B, C, D соответственно, а единицы продукции П2 –1; 1; 0 и 2 ед. оборудования. Фонд рабочего времени группы A – 18, B – 12, C – 24 и D – 18 ед. времени. Предприятие реализует единицу продукции П1 по цене 40 у. е., П2 – 60 у. е. Требуется найти план выпуска продукции, при котором прибыль будет максимальной.

Вариант 6. Предприятие производит сборку автомашин двух марок (A1 и A2). Для этого требуются следующие материалы: S1 – комплекс заготовок металлоконструкций в количестве b1 = 17 шт., необходимые для сборки автомашин марок A1 и A2 (соответственно 2 и 3 ед.); S2 – комплексы резиновых изделий в количестве b2 = 11 шт. (соответственно 2 и 1 ед.); S3 – двигатели с арматурой и электрооборудованием в количестве b3 = 6 комплектов, необходимых по одному для каждой автомашины марки A1; S4 – двигатели с арматурой и электрооборудованием в количестве b4 = 5 комплектов, необходимых по одному для каждой автомашины марки A1. Стоимость автомашины марки A1 – 7 тыс. у. е., а автомашины A2 – 5 тыс. у. е. Определить план выпуска, доставляющий предприятию максимальную выручку.

Вариант 7. Фирма производит два вида продукции (A и B). Объем сбыта продукции A составляет не менее 60 % общего объема реализации продукции двух видов. Для производства двух видов продукции используется одно и то же сырье, суточный запас которого ограничен величиной 100 кг. Расход на единицу продукции A составляет 2 кг, а на единицу продукции B – 4 кг. Цены продукции A и B равны 20 и 40 долл. соответственно. Определить оптимальное

распределение сырья для изготовления продукции А и В.

Вариант 8. Предприятие электронной промышленности выпускает две модели радиоприемников, причем каждая модель производится на отдельной технологической линии. Суточный объем производства первой линии – 60 изделий, второй линии – 75 изделий. На радиоприемник первой модели расходуется 10 однотипных элементов электронных схем, на радиоприемник второй модели – 8 таких же элементов. Максимальный суточный запас используемых элементов равен 800 ед. Прибыль от реализации одного радиоприемника первой и второй моделей равна 30 и 20 долл. соответственно. Определить оптимальный суточный объем производства.

Вариант 9. Процесс изготовления двух видов промышленных изделий состоит в последовательной обработке каждого из них на трех станках. Время использования этих станков для производства данных изделий ограничено десятью часами в сутки. Время обработки и прибыль от продажи одного изделия каждого вида приведены в таблице 3.3. Найти оптимальный объем производства изделий каждого вида.

Таблица 3.3 – Данные для расчета

Изделие	Время обработки, ч			Прибыль, у. е.
	Станок 1	Станок 2	Станок 3	
1	10	6	8	2
2	5	20	15	3

Вариант 10. Фирма имеет возможность рекламировать свою продукцию, используя местные радио и телевизионную сеть. Затраты на рекламу в бюджете фирмы ограничены суммой 1000 долл. в месяц. Каждая минута радиорекламы обходится в 5 долл., а каждая минута телерекламы – в 100 долл. Фирма хотела бы использовать радиосеть, по крайней мере, в два раза чаще, чем телевидение. Опыт прошлых лет показал, что объем сбыта, который обеспечивает каждая минут телерекламы, в 25 раз больше объема сбыта, обеспечиваемого одной минутой радиорекламы. Определить оптимальное распределение ежемесячно отпускаемых средств между радио- и телерекламой.

Вариант 11. Небольшая фирма производит два вида продукции: столы и стулья. Для изготовления одного стула требуется 3 м древесины, а для изготовления одного стола – 7 м. На изготовление одного стула уходит 2 ч рабочего времени, а на изготовление стола – 8 ч. Каждый стул приносит 1 у. е. прибыли, а каждый стол – 3 у. е. Сколько стульев и сколько столов должна изготовить эта фирма для получения максимальной прибыли, если она располагает 200 м древесины и 400 ч рабочего времени?

Вариант 12. Имеющийся фонд материалов b_i (i = 1…3) нужно распределить между изготовителями, чтобы получить максимальную прибыль от реализации всей продукции, произведенной из данных материалов.

Нормы $a_{i,j}$ ($i = 1…3$; $j = 1…5$) расхода на единицу продукции и прибыль c_j, полученная от реализации единицы продукции, представлены в таблице 3.4.

Таблица 3.4 – Данные для расчета

Материал	Продукция					Объем материала
	П1	П2	П3	П4	П5	
b_1	0,7	0,9	1,5	2,3	1,8	50000
b_2	1,4	0,3	0,7	2,7	2,0	28000
b_3	0,5	2,1	1,8	0,7	2,0	40000
Прибыль c_j	5	7	6	9	8	

Вариант 13. Фирма производит три модели вида картонных коробок для конфет: круглые, прямоугольные и треугольные. Их производство ограничено наличием сырья и временем ручной сборки. Для каждой круглой коробки требуется 1,5 м^3 картона, для прямоугольной – 3 м^3, а для треугольной – 2,5 м^3. Фирма получает от своих поставщиков до 6000 м^3 картона в неделю. Для каждой круглой коробки требуется 15 мин на сборку, для прямоугольной – 10 мин, а для треугольной – 13 мин. Фонд рабочего времени в неделю – 200 ч. Сколько изделий каждой модели коробок следует выпускать фирме в неделю для получения максимальной прибыли, если каждая круглая коробка приносит прибыль 5 у. е., прямоугольная – 3 у. е., треугольная – 4 у. е.?

Вариант 14. Продукция в цехе может производиться тремя технологическими способами (Т1, Т2, Т3). Объемы ресурсов b_i ($i = 1…3$) и их расход в единицу времени для каждой технологии, а также производительности технологий (в денежных единицах за единицу времени работы по данной технологии) представлены в таблице 3.5.

Таблица 3.5 – Данные для расчета

Ресурсы	Технологический способ			Объем ресурса
	Т1	Т2	Т3	
Рабочая сила, чел.-ч	15	20	25	1200
Сырье, т	2	3	2,5	150
Электроэнергия, кВт·ч	35	60	60	3000
Производительность технологического способа	300	250	450	

3.3 Пример выполнения задания

Предприятие изготавливает четыре вида продукции. Для производства продукции используются ресурсы – трудовые, материальные, финансовые. Максимальный запас ресурсов на производстве – 16, 110, 100 соответственно. Расход ресурсов на единицу производства продукции и предельно допустимые значения выпуска каждого вида даны в таблице 3.6.

Требуется определить, в каком количестве надо выпустить продукцию четырех типов: Прод1, Прод2, Прод3, Прод4, для изготовления которой требуют-

ся ресурсы трех видов: трудовые, сырье, финансы. Количество ресурсов каждого вида, необходимое для выпуска единицы продукции данного типа, называется нормой расхода. Нормы расхода, а также прибыль, получаемая от реализации единицы каждого типа продукции, приведены в таблице 3.6.

Таблица 3.6 – Исходные данные

Ресурс	Прод1	Прод2	Прод3	Прод4	Наличие
Прибыль	60	70	120	130	
Трудовые	1	1	1	1	16
Сырье	6	5	4	3	110
Финансы	4	6	10	13	100

1 Составим *математическую модель* задачи, для чего введем следующие обозначения:

x_j – количество выпускаемой продукции j-го типа, j=1…4;

b_i – количество распределяемого ресурса i -го вида, i =1…3;

a_{ij} – норма расхода i-го ресурса для выпуска единицы продукции j-го типа;

c_j – прибыль, получаемая от реализации единицы продукции j-го типа.

Математическая модель.

Целевая функция – это прибыль от реализации продукции, которая составит по формуле (3.1)

$$F=60x_1+70x_2+120x_3+130x_4 \rightarrow max.$$

То есть среди всех неотрицательных решений системы линейных неравенств требуется найти такое, при котором функция F принимает максимальное значение.

Ограничения по формулам (3.2) и (3.3)

$$x_1+x_2+x_3+x_4 \leq 16;$$

$$6x_1+5x_2+4x_3+3x_4 \leq 110;$$

$$4x_1+6x_2+10x_3+13x_4 \leq 100;$$

$$x_j \geq 0;\ \ j=1\ldots4,$$

где x_1, x_2, x_3, x_4 – количество выпускаемой Прод1, Прод2, Прод3, Прод4.

2 Создадим на листе Excel таблицу для ввода данных. На рисунке 3.1 блок ячеек C4:F4 содержит оптимальное решение, значение этих ячеек будет получено в результате решения задачи. Блок ячеек C3:F3 содержит значения прибыли от реализации продукции. В ячейках C8: F10 отображен расход ресурсов на единицу производства продукции каждого вида.

Для вычисления целевой функции в ячейке G4 используем функцию **=СУММПРОИЗВ(C3:F3; C4:F4)** (см. рисунок 3.1).

В ячейку G8 (см. рисунок 3.1) введена формула для расчета ограничений по ресурсам с использованием функции **=СУММПРОИЗВ($C$4:$F$4; C8:F8)**. Далее, воспользовавшись встроенной возможностью автозаполнения в Excel, формула протянута до ячейки G10.

G8 =СУММПРОИЗВ($C$4:$F$4;C8:F8)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2			*Прод1*	*Прод2*	*Прод3*	*Прод4*	Доход		
3		цена за единицу, у.е.	60	70	120	130			
4		объем производства, шт					0		
5									
6									
7		Нормы расхода ресурсов на производство единицы продукции, ед	*Прод1*	*Прод2*	*Прод3*	*Прод4*	Ограничения по ресурсам, ед	Имеющиеся запасы, ед	
8		**Трудовые**	1	1	1	1	0	16	
9		**Сырье**	6	5	4	3	0	110	
10		**Финансы**	4	6	10	13	0	100	
11									

Рисунок 3.1 – Ввод исходных данных, целевой функции и ограничений

3 На вкладке *Данные* в группе *Анализ* выберем команду *Поиск решения*.

На экране отобразится ДО *Параметры поиска решения*, в котором установим следующие параметры (рисунок 3.2):

– в поле *Оптимизировать целевую функцию* указываем адрес ячейки со значением целевой функции – **$G$4**;

– переключатель *До* устанавливаем на максимум целевой функции;

– в поле *Изменяя ячейки переменных* указываем адреса ячеек со значениями искомых переменных – **B4:F4**;

– в области *В соответствии с ограничениями* с помощью кнопки *Добавить* размещаем все ограничения задачи;

– устанавливаем флажок в поле *Сделать переменные без ограничений неотрицательными*;

– в списке *Выберите метод решения* указываем **Поиск решения линейных задач симплекс-методом** и нажимаем кнопку *Выполнить*.

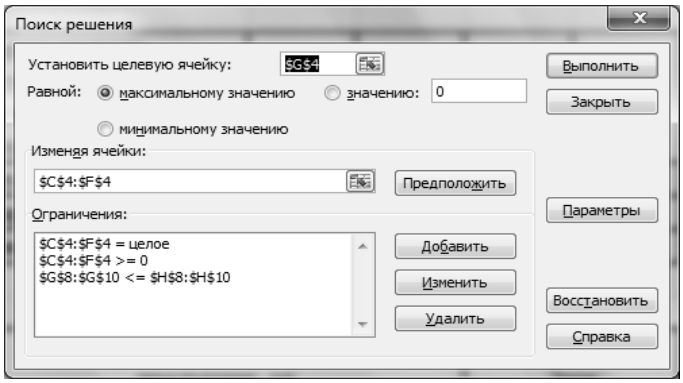


Рисунок 3.2 – Заполнение ДО *Поиск решения*

Все ограничения указаны в системе при составлении математической модели задачи. Для добавления ограничения необходимо выбрать кнопку *Добавить*, при этом отобразится ДО *Добавление ограничения* (рисунок 3.3).

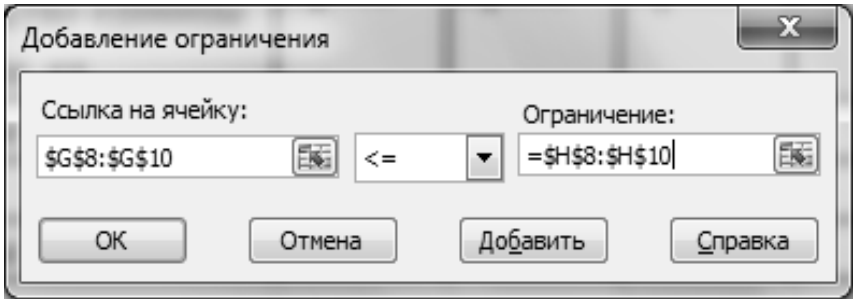
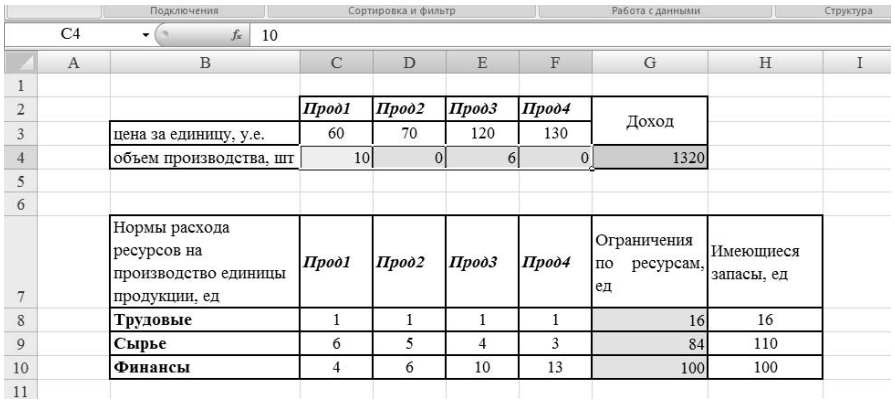


Рисунок 3.3 – Добавление ограничений

Заполнить ДО *Добавление ограничения* необходимо следующим образом: в поле *Ссылка на ячейки* указываем адрес диапазона G8:G10, выбираем в раскрывающемся списке знак неравенства ≤, в поле *Ограничение* выделяем диапазон H8:H10 и нажимаем кнопку *Добавить* (см. рисунок 3.3). В результате текущее ограничение будет добавлено в список ограничений, поля окна *Добавление ограничения* будут очищены для ввода следующего ограничения. Вводим ограничения на неотрицательные целые значения объема выпуска продукции. Порядок ввода ограничений не имеет значения. Для принятия последнего ограничения и возврата к ДО *Параметры поиска* решения нажимаем кнопку *ОК*.

4 Результат выполнения *Поиска решений* представлен на рисунке 3.4.



		Прод1	Прод2	Прод3	Прод4	Доход
	цена за единицу, у.е.	60	70	120	130	
	объем производства, шт	10	0	6	0	1320

Нормы расхода ресурсов на производство единицы продукции, ед	Прод1	Прод2	Прод3	Прод4	Ограничения по ресурсам, ед	Имеющиеся запасы, ед
Трудовые	1	1	1	1	16	16
Сырье	6	5	4	3	84	110
Финансы	4	6	10	13	100	100

Рисунок 3.4 – Результаты *Поиска решения*

5 Таким образом, максимальная прибыль при реализации продукции будет получена в размере 1320 у. е. при следующем плане производства:

10 – объем продукции типа 1;

0 – объем продукции типа 2;

6 – объем продукции типа 3;

0 – объем продукции типа 4.

4 Лабораторная работа № 4. Решение задач оптимизации с помощью Excel (задача о размещении заказа)

Цель работы: получение навыков в решении задач оптимизации с помощью Excel (задача о размещении заказа).

4.1 Теоретические сведения

В таких оптимизационных задачах речь идет о размещении заказа (загрузке взаимозаменяемых групп оборудования) между предприятиями (цехами, станками и т. д.) с различными производственными и технологическими характеристиками, но взаимозаменяемыми в смысле выполнения заказа. Требуется составить план размещения заказа (загрузки оборудования), при котором с имеющимися производственными возможностями заказ был бы выполнен, а показатель эффективности достигал бы экстремального значения.

Для решения задач оптимизации в MS Excel используется инструмент *Поиск решения*. Общий алгоритм решения оптимизационных задач в MS Excel представлен в лабораторной работе № 3.

Математическую модель задач данного типа можно представить в общем виде следующим образом.

Имеем ***m*** однородных взаимозаменяемых групп оборудования, на котором нужно выполнить заказ на выпуск ***n*** видов продукции в объемах x_j (j=1, n) ед. Мощность оборудования каждого вида ограничена T_i (i=1, m) (например, фондом рабочего времени).

Производительность оборудования каждого вида задана коэффициентом a_{ij}, который показывает, сколько единиц продукции j-го вида можно произвести на i-м оборудовании в единицу времени.

Кроме того, известны затраты c_{ij}, отображающие все затраты, вызванные изготовлением на i-м оборудовании в единицу времени продукции j-го вида.

Требуется найти план x_{ij} размещения заказа (загрузки оборудования), т. е. установить, сколько времени i-я группа оборудования будет занята изготовлением j-й продукции.

Целевая функция (суммарные затраты на выполнение заказа)

$$Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \Rightarrow \min. \tag{4.1}$$

Ограничения:

1) по мощности оборудования

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le T_i \qquad (i = 1,\ m); \tag{4.2}$$

2) по соответствию плану:

а) если по некоторым видам продукции допускается перевыполнение плана:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq x_j \ \ (j = 1,\ n_1); \tag{4.3}$$

б) для продукции, выпуск которой должен соответствовать плану,

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = x_j \ \ (j = n_1 + 1,\ n_2); \tag{4.4}$$

в) для продукции, заказ на которую принимается для более полной загрузки оборудования,

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq x_j \ \ (j = 1,\ n); \tag{4.5}$$

3) условие неотрицательности следует из практического смысла переменных:

$$x_{ij} \geq 0 \ (i = 1,\ m\ ;\ j = 1,\ n). \tag{4.6}$$

4.2 Задания для лабораторной работы

Вариант 1. Выполнить заказ по производству 32 изделий А1 и 4 изделий А2 взялись бригады Б1 и Б2. Производительность бригады Б1 по производству изделий А1 и А2 составляет соответственно 4 и 2 изделия в единицу времени, фонд рабочего этой бригады – 9,5 ед. Производительность бригады Б2 – соответственно 1 и 3, а ее фонд рабочего времени – 4 ед. Затраты, связанные с производством единицы изделия, для бригады Б1 равны соответственно 9 и 20 у. е., для бригады Б2 – 15 и 30 у. е. Найти оптимальный план размещения заказа при дополнительном требовании: фонд рабочего времени бригады Б2 должен быть полностью использован.

Вариант 2. Бригада приняла заказ на выполнение 50 ед. продукции П1, 30 ед. продукции П2 и 45 ед. продукции П3. Продукция производится на станках А и В. Для изготовления на станке А единицы продукции П1 требуется 4 ед. времени, единицы продукции П2 – 40 ед., единицы продукции П3 – 10 ед. На станке В – соответственно 6, 8 и 20 ед. времени. Найти план использования оборудования, т. е. указать сколько продукции и какого вида следует изготовить на станках А и В, чтобы заказ был выполнен в минимальное время.

Вариант 3. Двум погрузчикам разной мощности за 24 ч нужно погрузить на первой площадке 230 т, на второй 168 т. Первый погрузчик на первой площадке может погрузить 10 т в час, на второй – 12 т. Второй на каждой площадке может погрузить по 13 т в час. Стоимость работ, связанных с погрузкой 1 т первым погрузчиком на первой площадке, – 8 у. е., на второй – 7 у. е., вторым погрузчиком на первой площадке – 12 у. е., на второй – 13 у. е. Составить план

работы, т. е. найти, какой объем работы должен выполнить каждый погрузчик на каждой площадке, чтобы стоимость всех работ была минимальной.

Вариант 4. Организации необходимо выполнить заказ на выполнение трех типов изделий: И1 – 70 ед., И2 – 40 ед., И3 – 15 ед. Изделия изготавливаются на станках А и В. Для изготовления на станке А единицы изделия И1 требуется 2 мин, единицы изделия И2 – 10 мин, единицы изделия И3 – 8 мин. На станке В – соответственно 4, 13 и 10 ед. времени. Фонд машинного времени станка А – 12 ч, станка В – 5 ч. Найти план использования оборудования, т. е. указать, сколько изделий и какого вида следует изготовить на станках А и В, чтобы заказ был выполнен в минимальное время и фонд времени станка В был использован полностью.

Вариант 5. Выполнить заказ по производству 20 изделий А1 и 54 изделий А2 взялись бригады Б1 и Б2. Производительность бригады Б1 по производству изделий А1 и А2 составляет соответственно 8 и 5 изделий в единицу времени, фонд рабочего этой бригады – 3 ед. Производительность бригады Б2 – соответственно 6 и 9, а ее фонд рабочего времени – 10 ед. Затраты, связанные с производством единицы изделия, для бригады Б1 равны соответственно 5 и 9 у. е., для бригады Б2 – 20 и 10 у. е. Найти оптимальный план размещения заказа.

Вариант 6. Выполнить заказ по производству 54 изделий А1 и 36 изделий А2 взялись бригады Б1 и Б2. Производительность бригады Б1 по производству изделий А1 и А2 составляет соответственно 3 и 8 изделий в единицу времени, фонд рабочего этой бригады – 4 ед. Производительность бригады Б2 – соответственно 9 и 2, а ее фонд рабочего времени – 8 ед. Затраты, связанные с производством единицы изделия, для бригады Б1 равны соответственно 9 и 11 у. е., для бригады Б2 – 7 и 4 у. е. Найти оптимальный план размещения заказа при условии, что фонд времени бригады Б1 был израсходован полностью.

Вариант 7. Выполнить заказ по производству 36 изделий А1 и 60 изделий А2 взялись бригады Б1 и Б2. Производительность бригады Б1 по производству изделий А1 и А2 составляет соответственно 2 и 5 изделий в единицу времени, фонд рабочего этой бригады – 7 ед. Производительность бригады Б2 – соответственно 7 и 9, а ее фонд рабочего времени – 9 ед. Затраты, связанные с производством единицы изделия, для бригады Б1 равны соответственно 15 и 8 у. е., для бригады Б2 – 15 и 9 у. е. Найти оптимальный план размещения заказа при условии, что фонд рабочего обеих бригад был израсходован полностью.

Вариант 8. Выполнить заказ по производству 89 изделий А1 и 39 изделий А2 взялись бригады Б1 и Б2. Производительность бригады Б1 по производству изделий А1 и А2 составляет соответственно 7 и 8 изделий в единицу времени, фонд рабочего этой бригады – 13 ед. Производительность бригады Б2 – соответственно 8 и 7, а ее фонд рабочего времени – 15 ед. Затраты, связанные с производством единицы изделия, для бригады Б1 равны соответственно 2 и 5 у. е., для бригады Б2 – 5 и 2 у. е. Найти оптимальный план размещения заказа.

Вариант 9. Бригада приняла заказ на выполнение 60 ед. продукции П1, 10 ед. продукции П2 и 90 ед. продукции П3. Продукция производится на станках А и В. Для изготовления на станке А единицы продукции П1 требуется 2 ед. времени, единицы продукции П2 – 19 ед., единицы продукции П3 – 30 ед. На станке В соответственно 5, 15 и 30 ед. времени. Составить математическую модель задачи и на ее основе найти план использования оборудования,

т. е. указать сколько продукции и какого вида следует изготовить на станках А и В, чтобы заказ был выполнен в минимальное время.

Вариант 10 Бригада приняла заказ на выполнение 55 ед. продукции П1, 30 ед. продукции П2 и 10 ед. продукции П3. Продукция производится на станках А и В. Для изготовления на станке А единицы продукции П1 требуется 7 ед. времени, единицы продукции П2 – 12 ед., единицы продукции П3 – 4 ед. На станке В – соответственно 10, 5 и 20 ед. времени. Составить план использования оборудования, то есть указать, сколько продукции и какого вида следует изготовить на станках А и В, чтобы заказ был выполнен в минимальное время.

Вариант 11. Двум погрузчикам разной мощности за 24 ч нужно погрузить на первой площадке 600 т, на второй – 300 т. Первый погрузчик на первой площадке может погрузить 20 т в час, на второй – 15 т. Второй на каждой площадке может погрузить по 25 т в час. Стоимость работ, связанных с погрузкой 1 т первым погрузчиком на первой площадке, – 12 у. е., на второй – 15 у. е., вторым погрузчиком на первой площадке – 10 у. е., на второй – 13 у. е. Составить план работы погрузчиков.

Вариант 12. Бригада приняла заказ на выполнение 60 ед. продукции П1, 10 ед. продукции П2 и 90 ед. продукции П3. Продукция производится на станках А и В. Для изготовления на станке А единицы продукции П1 требуется 2 ед. времени, единицы продукции П2 – 19 ед., единицы продукции П3 – 30 ед. На станке В – соответственно 5, 15 и 30 ед. времени. Найти план использования оборудования., т. е. указать, сколько продукции и какого вида следует изготовить на станках А и В, чтобы заказ был выполнен в минимальное время.

Вариант 13. Двум погрузчикам разной мощности за 24 ч нужно погрузить на первой площадке 224 т, на второй – 645 т. Первый погрузчик на первой площадке может погрузить 13 т в час, на второй – 11 т. Второй на каждой площадке может погрузить по 18 т в час. Стоимость работ, связанных с погрузкой 1 т, первым погрузчиком на первой площадке, – 2 у. е., на второй – 9 у. е., вторым погрузчиком на первой площадке – 3 у. е., на второй – 8 у. е. Составить такой план работы, чтобы стоимость всех работ по погрузке была минимальной.

Вариант 14. Двум погрузчикам разной мощности за 48 ч нужно погрузить на первой площадке 150 т, на второй – 420 т. Первый погрузчик на первой площадке может погрузить 12 т в час, на второй – 10 т. Второй на каждой площадке может погрузить по 15 т в час. Стоимость работ, связанных с погрузкой 1 т первым погрузчиком на первой площадке, – 6 у. е., на второй – 10 у. е., вторым погрузчиком на первой площадке 7 у. е., на второй – 12 у. е. Составить план работы, чтобы стоимость всех работ по погрузке была минимальной.

4.3 Пример выполнения задания

Поступил заказ на производство 48 ед. продукции Прод1 и 10 ед. продукции Прод2 двумя бригадами. Производительность бригады Б1 по производству продукции Прод1 и Прод2 составляет соответственно 3 и 1 изделия в единицу времени, фонд рабочего этой бригады – 15 ед. Производительность бригады Б2 – соответственно 2 и 4, а ее фонд рабочего времени – 5 ед. Затраты, связанные с производством единицы изделия, для бригады Б1 равны соответственно 5 и 12 у. е.,

для бригады Б2 – 10 и 22 у. е. Требуется найти оптимальный план размещения заказа при условии что фонд рабочего времени бригады Б1 должен быть полностью использован.

1 Составляем математическую модель задачи.

Имеем две взаимозаменяемые бригады, которым нужно выполнить заказ на выпуск двух видов продукции в заданных объемах x_j (j =1, 2) (48, 10) ед. Мощность оборудования каждого вида ограничена T_i (i=1, 2) (фондом рабочего времени 15 и 5).

Производительность оборудования каждого вида задана коэффициентом a_{ij}, который показывает, сколько единиц продукции j-го вида можно произвести на i-м оборудовании в единицу времени. Кроме того, известны затраты c_{ij}, отображающие все затраты, вызванные изготовлением на i-м оборудовании в единицу времени продукции j-го вида.

Требуется найти план x_{ij} размещения заказа (загрузки оборудования), т. е. определить время, необходимое для изготовления одной единицы продукции каждого вида для каждой бригады.

Целевая функция будет отображать суммарные затраты на выполнение заказа и находится по формуле (4.1).

$$Z = 5x_{11} + 12x_{12} + 10x_{21} + 22x_{22} \Rightarrow \min.$$

Ограничения (формулы (4.2) – (4.4)):

1) по мощности оборудования:

– для бригады Б1

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = T_i \ (i = 1),\ x_{11} + x_{12} = 15;$$

– для бригады Б2

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le T_i \ (i = 2),\ x_{21} + x_{22} \le 5;$$

2) по соответствию плану:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_{ij} = x_j \ (j = 1,\ 2);$$

$$3x_{11} + 2x_{21} = 48;$$

$$x_{21} + 4x_{22} = 10;$$

3) условие неотрицательности

$$x_{ij} \ge 0 \ (i = 1,\ 2;\ j = 1,\ 2).$$

2 Заполняем таблицу Excel исходными данными (рисунок 4.1).

Блок ячеек C4:D5 содержит оптимальное решение, значение этих ячеек будет получено в результате решения задачи. Блок ячеек E4:F5 содержит значения производительности каждой из бригад при изготовлении продукции каждого вида. В ячейках G4:H5 отображены затраты на изготовление единицы продукции каждого вида. В ячейки I4:I5 заносим показатели по фонду рабочего времени. В ячейки C9:D10 вводим формулу для определения объема продукции по каждому виду и бригаде (для ячейки C9 вводится формула **=C4*E4** и протягивается на весь диапазон). И, наконец, в ячейки C11 и D11 заносим суммарный объем выпуска продукции каждого вида.

3 Для вычисления целевой функции в ячейке C12 используем функцию **=СУММПРОИЗВ(C4:D5;G4:H5)** (см. рисунок 4.1).

4 Вводим ограничения (см. рисунок 4.1): по мощности в ячейки C14:D14 **(=СУММ(C4:D4))** и по соответствию плану в ячейки C15:D15 (**=СУММ(C8:C9)**).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2			время производства единицы		Производительность в единицу времени		Затраты на единицу		Фонд времени
3			*Прод1*	*Прод2*					
4		Бригада 1			3	1	5	12	15
5		Бригада 2			2	4	10	22	5
6									
7			объем						
8		Бригада 1	0	0					
9		Бригада 2	0	0					
10		Суммарный объем производства	48	10					
11									
12		***Цель***	0	min					
13		***ограничения***	*Прод1*	*Прод2*					
14		по мощности	0	0					
15		по соответствию плану	0	0					
16									

Рисунок 4.1 – Ввод исходных данных, целевой функции и ограничений

5 На вкладке *Данные* в группе *Анализ* выберем команду *Поиск решения*.

На экране отобразится ДО *Параметры поиска решения*, в котором установим следующие параметры (рисунок 4.2):

– в поле *Оптимизировать целевую функцию* указываем адрес ячейки со значением целевой функции – **C12**;

– переключатель *До* устанавливаем на минимум целевой функции;

– в поле *Изменяя ячейки переменных* указываем адреса ячеек со значениями искомых переменных – **C4:D5**;

– в области *В соответствии с ограничениями* с помощью кнопки *Добавить* размещаем все ограничения задачи;

– устанавливаем флажок в поле *Сделать переменные без ограничений неотрицательными*;

– в списке *Выберите метод решения* указываем **Поиск решения линейных задач симплекс-методом**;

– нажимаем кнопку *Найти решение*.

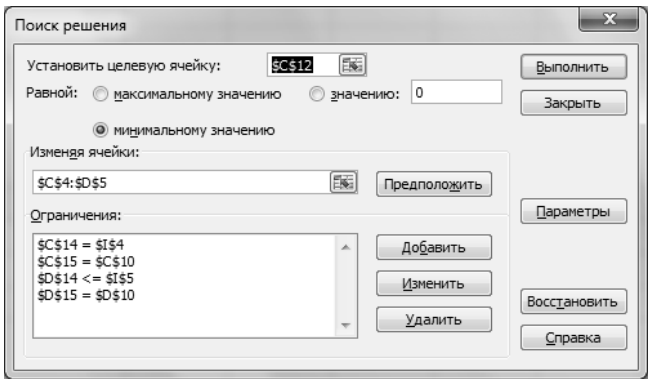
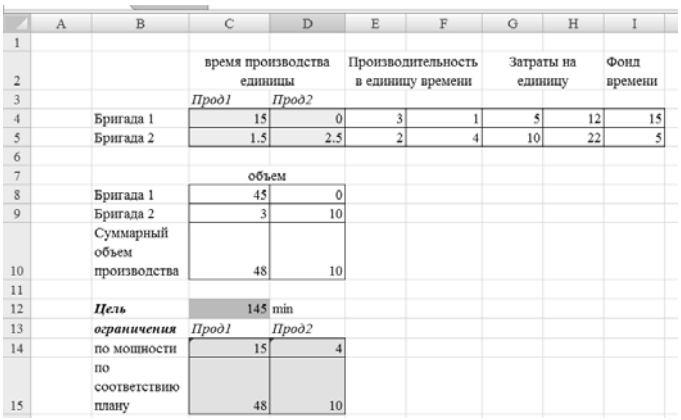


Рисунок 4.2 – Заполнение ДО *Поиск решения*

Все ограничения указаны в системе при составлении математической модели задачи. Для добавления ограничения необходимо выбрать кнопку *Добавить*, отобразится ДО *Добавление ограничения*, в которое последовательно вводятся все ограничения из математической модели.

Результат выполнения *Поиска решений* представлен на рисунке 4.3.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2			время производства единицы		Производительность в единицу времени		Затраты на единицу		Фонд времени
3			*Прод1*	*Прод2*					
4		Бригада 1	15	0	3	1	5	12	15
5		Бригада 2	1.5	2.5	2	4	10	22	5
6									
7			объем						
8		Бригада 1	45	0					
9		Бригада 2	3	10					
10		Суммарный объем производства	48	10					
11									
12		***Цель***	145	min					
13		***ограничения***	*Прод1*	*Прод2*					
14		по мощности	15	4					
15		по соответствию плану	48	10					

Рисунок 4.3 – Результаты расчета

Вывод. Для выполнения заказа при оптимальной загрузке рабочих бригад с минимальными затратами необходимо, чтобы бригада Б1 изготовила 45 ед. продукции Прод1, а бригада Б2 – 3 ед. продукции Прод1 и 10 ед. продукции Прод2.

5 Лабораторная работа № 5. Решение задач оптимизации с помощью Excel (задача о назначениях)

Цель работы: получение навыков решения задач оптимизации с помощью Excel (задача о назначениях).

5.1 Теоретические сведения

Задача о назначениях – это так называемая распределительная задача, в которой на выполнение каждой работы требуется только один ресурс и каж-

дый ресурс может быть использован только на одной работе. То есть ресурсы неделимы между работами, а работы неделимы между ресурсами. К задачам о назначениях относятся задачи распределения людей на должности или работы, автомашин на маршруты, групп по аудиториям, тематики работ по лабораториям и т. д.

Для решения задач оптимизации в MS Excel используется инструмент *Поиск решения*. Общий алгоритм решения оптимизационных задач в MS Excel представлен в лабораторной работе № 3.

Математическая модель задачи.

Предположим, что имеется ***n*** различных работ, каждую которых может выполнить любой из ***m*** привлеченных исполнителей. Стоимость (либо эффективность) выполнения ***i***-й работы ***j***-м исполнителем известна и равна c_{ij}. Необходимо распределить исполнителей по работам (назначить одного исполнителя на каждую работу) так, чтобы минимизировать суммарные затраты, связанные с выполнением (либо достичь максимальной эффективности) всего комплекса работ.

Введем переменные x_{ij}, принимающие значение 1 в случае, когда ***i***-ю работу выполняет ***j***-й исполнитель, и значение 0 во всех остальных случаях.

Целевая функция

$$Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \Rightarrow \min\ (\max). \tag{5.1}$$

Ограничения имеют вид:

а) что каждый работник назначается только на одну работу:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1\ \ (j = 1,\ m); \tag{5.2}$$

б) один работник выполняет только одну работу:

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1\ \ (i = 1,\ n);. \tag{5.3}$$

5.2 Задания для лабораторной работы

Стоимость c_{ij} выполнения i-м рабочим j-й работы для заданного варианта приведена в таблице 5.1. Составить план выполнения работ так, чтобы их суммарная стоимость была минимальной.

Таблица 5.1 – Варианты заданий

Вариант 1		Виды работ				
		1	2	3	4	5
Рабочий	1	3	6	2	5	11
	2	1	2	7	-	3
	3	5	12	11	9	1
	4	-	4	2	10	5

Вариант 2		Виды работ		
		1	2	3
Рабочий	1	50	30	70
	2	20	40	70
	3	40	70	50

Вариант 3		Виды работ			
		1	2	3	4
Рабочий	1	10	4	6	3
	2	9	-	7	9
	3	4	15	11	7
	4	8	7	8	5

Вариант 4		Виды работ				
		1	2	3	4	5
Рабочий	1	2	5	-	9	4
	2	4	3	1	9	5
	3	7	4	6	5	2
	4	3	5	7	-	8

Вариант 5		Виды работ				
		1	2	3	4	5
Рабочий	1	3	3	4	4	5
	2	1	1	2	2	3
	3	8	7	6	5	4
	4	3	2	1	9	8

Вариант 6		Виды работ				
		1	2	3	4	5
Рабочий	1	9	–	8	2	7
	2	6	3	5	4	1
	3	9	2	8	3	–
	4	4	5	6	8	2

Вариант 7		Виды работ			
		1	2	3	4
Рабочий	1	15	13	11	–
	2	17	6	14	11
	3	–	11	17	13
	4	10	12	17	14

Вариант 8		Виды работ			
		1	2	3	4
Рабочий	1	9	9	8	8
	2	3	4	5	6
	3	2	2	3	7
	4	1	–	9	8
	5	6	6	7	7

Окончание таблицы 5.1

Вариант 9		Виды работ			
		1	2	3	4
Рабочий	1	2	3	–	8
	2	5	2	1	9
	3	–	3	7	6
	4	2	8	6	7
	5	1	3	2	1
Вариант 10		Виды работ			
		1	2	3	4
Рабочий	1	1	1	2	2
	2	7	–	9	1
	3	5	6	8	4
	4	3	3	4	4
	5	9	8	7	–
Вариант 11		Виды работ			
		1	2	3	4
Рабочий	1	11	12	9	10
	2	9	17	13	11
	3	11	–	17	9
	4	10	9	12	11
Вариант 12		Виды работ			
		1	2	3	4
Рабочий	1	1	12	9	10
	2	19	17	6	11
	3	7	–	7	9
	4	10	9	12	4
Вариант 13		Виды работ			
		1	2	3	4
Рабочий	1	11	12	9	4
	2	9	8	13	11
	3	15	–	7	9
	4	10	9	12	11
Вариант 14		Виды работ			
		1	2	3	4
Рабочий	1	2	13	–	8
	2	5	2	11	19
	3	–	13	7	6
	4	2	8	16	7
	5	11	3	2	11

5.3 Пример выполнения задания

Мастер должен назначить на пять типовых операций семь рабочих. Время, которое затрачивают рабочие на выполнение каждой операции, приведено в таблице 5.2. Необходимо определить расстановку рабочих по операциям, при которой суммарное время на выполнение всех работ будет наименьшим.

Знак «минус» означает, что рабочий не может выполнять данную операцию.

1 Математическая модель задачи

Число рабочих (7) превышает количество операций, которое они должны выполнить (5). Следовательно, вводятся две фиктивные операции – О6 и О7, время на выполнение которых равно нулю, т. к. они фактически не выполняются. В ячейки, в которых был знак «минус», вместо него помещены числа, существенно превышающие другие затраты времени (1000), чтобы при решении задачи соответствующие значения переменных оказались заведомо равными нулю. Таким образом, данные для расчета представлены в виде таблицы 5.3

Таблица 5.2 – Исходные данные

Рабочий	Операция				
	О1	О2	О3	О4	О5
Р1	25	22	30	24	31
Р2	32	–	14	34	30
Р3	35	–	32	31	28
Р4	36	27	14	24	30
Р5	35	25	30	22	–
Р6	34	33	26	14	19
Р7	34	27	30	37	37

Таблица 5.3 – Данные для расчета

Рабочий	Операция				
	О1	О2	О3	О4	О5
Р1	25	22	30	24	31
Р2	32	1000	14	34	30
Р3	35	1000	32	31	28
Р4	36	27	14	24	30
Р5	35	25	30	22	1000
Р6	34	33	26	14	19
Р7	34	27	30	37	37

Обозначим через $\boldsymbol{x_{ij}}$ факт назначения i-го рабочего на выполнение j-й операции (1 – если рабочий назначен, 0 – если не назначен). Найти такие значения $\boldsymbol{x_{ij}}$, чтобы суммарное время на выполнение всех работ было наименьшим.

Целевая функция

$$Z = \sum_{i=1}^{7}\sum_{j=1}^{7} c_{ij}x_{ij} \Rightarrow \min .$$

Ограничения имеют вид:

а) что каждый работник назначается только на одну работу:

$$\sum_{i=1}^{7} x_{ij} = 1 \ \ (j = 1,\ 7);$$

б) один работник выполняет только одну работу:

$$\sum_{j=1}^{7} x_{ij} = 1 \ (i = 1,\ 7).$$

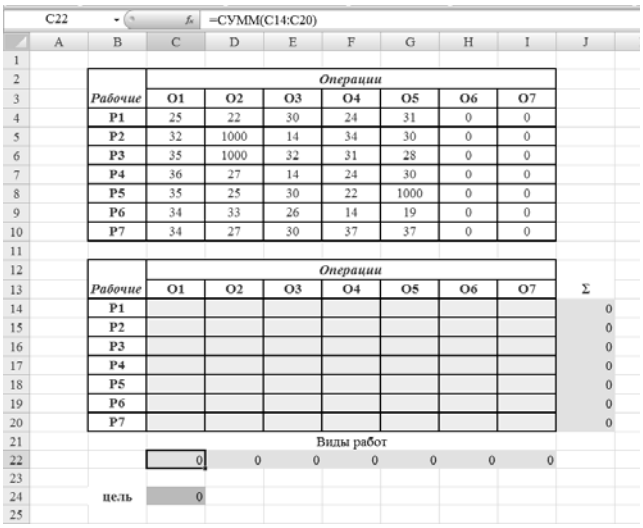
2 Заполняем таблицу Excel исходными данными (рисунок 5.1).

Блок ячеек C14:I20 содержит оптимальное решение, значение этих ячеек будет получено в результате решения задачи.

Блок ячеек C4:I10 содержит значения затрат времени на выполнение операций каждого рабочего для каждой операции.

3 Для вычисления целевой функции в ячейке C24 используем функцию **=СУММПРОИЗВ(C4:I10;C14:I20)** (см. рисунок 5.1).

4 Вводим ограничения (см. рисунок 5.1): по виду работ (каждый работник назначается только на одну работу) в ячейки C22:I22 **(=СУММ(C14:C20)**) и по выполнению (один работник выполняет только одну работу) в ячейки J14:J20 (**=СУММ(C14:I14)**).



C22 =СУММ(C14:C20)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2			Операции							
3		Рабочие	O1	O2	O3	O4	O5	O6	O7	
4		P1	25	22	30	24	31	0	0	
5		P2	32	1000	14	34	30	0	0	
6		P3	35	1000	32	31	28	0	0	
7		P4	36	27	14	24	30	0	0	
8		P5	35	25	30	22	1000	0	0	
9		P6	34	33	26	14	19	0	0	
10		P7	34	27	30	37	37	0	0	
11										
12			Операции							
13		Рабочие	O1	O2	O3	O4	O5	O6	O7	Σ
14		P1								0
15		P2								0
16		P3								0
17		P4								0
18		P5								0
19		P6								0
20		P7								0
21			Виды работ							
22			0	0	0	0	0	0	0	
23										
24		цель	0							
25										

Рисунок 5.1 – Ввод исходных данных, целевой функции и ограничений

5 На вкладке *Данные* в группе *Анализ* выберем команду *Поиск решения*. На экране отобразится ДО *Параметры поиска решения*, в котором установим следующие параметры (рисунок 5.2):

– в поле *Оптимизировать целевую функцию* указываем адрес ячейки со значением целевой функции – **C24**;

– переключатель *До* устанавливаем на минимум целевой функции;

– в поле *Изменяя ячейки переменных* указываем адреса ячеек со значениями искомых переменных **C14:I20**;

– в области *В соответствии с ограничениями* с помощью кнопки *Добавить* размещаем все ограничения задачи.

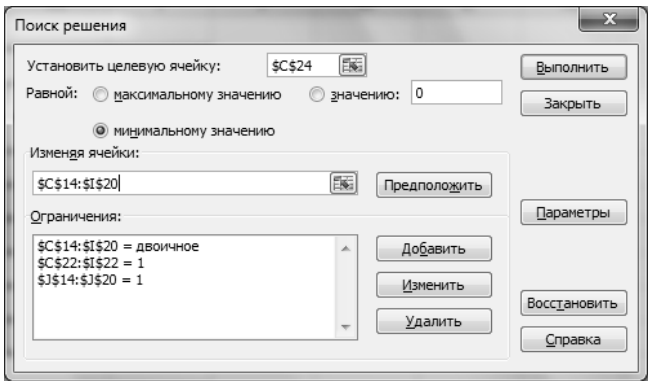
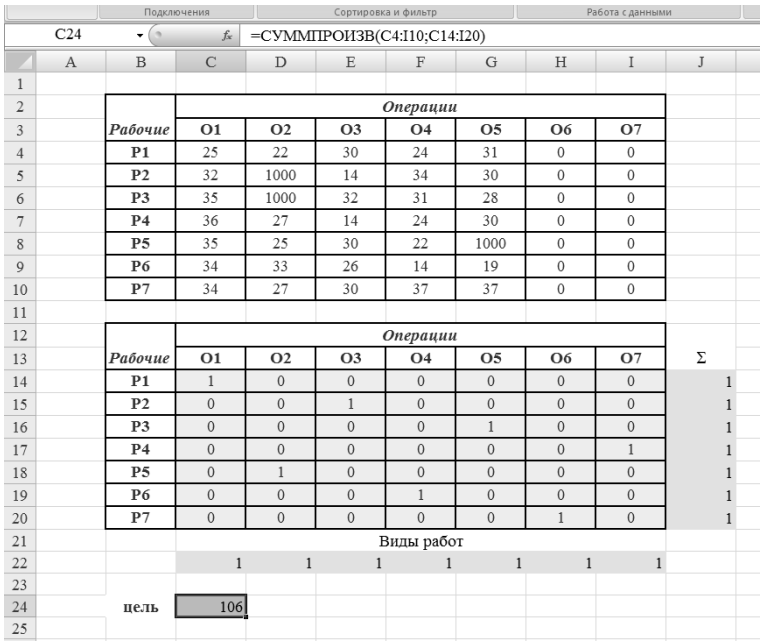


Рисунок 5.2 – Заполнение ДО *Поиск решения*

Результат выполнения *Поиска решений* представлен на рисунке 5.3.



C24 =СУММПРОИЗВ(C4:I10;C14:I20)

		Операции							
	Рабочие	O1	O2	O3	O4	O5	O6	O7	
4	P1	25	22	30	24	31	0	0	
5	P2	32	1000	14	34	30	0	0	
6	P3	35	1000	32	31	28	0	0	
7	P4	36	27	14	24	30	0	0	
8	P5	35	25	30	22	1000	0	0	
9	P6	34	33	26	14	19	0	0	
10	P7	34	27	30	37	37	0	0	
12		Операции							
13	Рабочие	O1	O2	O3	O4	O5	O6	O7	Σ
14	P1	1	0	0	0	0	0	0	1
15	P2	0	0	1	0	0	0	0	1
16	P3	0	0	0	0	1	0	0	1
17	P4	0	0	0	0	0	0	1	1
18	P5	0	1	0	0	0	0	0	1
19	P6	0	0	0	1	0	0	0	1
20	P7	0	0	0	0	0	1	0	1
21		Виды работ							
22		1	1	1	1	1	1	1	
24	цель	106							

Рисунок 5.3 – Результаты расчета

Вывод. Минимальное время на выполнение всех операций составит 106 ч при следующих назначениях:

– рабочего 1 на выполнение операции 1;
– рабочего 2 на выполнение операции 3;
– рабочего 3 на выполнение операции 5;
– рабочего 4 на выполнение фиктивной операции 6;
– рабочего 5 на выполнение операции 2;
– рабочего 6 на выполнение операции 4;
– рабочего 7 на выполнение фиктивной операции 7.

Рабочие 4 и 7, назначенные на выполнение фиктивных операций, фактически не работают.

6 Лабораторная работа № 6. Решение задач оптимизации с помощью Excel (закрытая модель транспортной задачи).

Цель работы: получение навыков решения закрытой модели транспортной задачи оптимизации с помощью Excel.

6.1 Теоретические сведения

Данная задача связана с распределением товаров между поставщиками (находящимися в пунктах производства) и потребителями (находящимися в пунктах назначения) таким образом, чтобы общая стоимость этого распределения была минимальной.

В общем виде транспортную задачу можно представить следующим образом: в m пунктах производства $A_1, A_2, ..., A_m$ имеется *однородный* груз в количествах соответственно $a_1, a_2, ..., a_m$. Этот груз необходимо доставить в n пунктов назначения $B_1, B_2, ..., B_m$ в количествах соответственно $b_1, b_2,..., b_n$. Стоимость перевозки 1 ед. груза (*тариф*) из пункта A_i в пункт B_j равна c_{ij} у. е.

Требуется составить план перевозок, позволяющий вывезти все грузы, полностью удовлетворить потребителей и имеющий минимальную стоимость.

Транспортная задача называется ***закрытой***, если сумма запасов груза равна суммарной потребности в нем, т. е.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \ .$$

Обозначим через x_{ij} количество единиц груза, запланированных к перевозке от i-го поставщика к j-му потребителю. Так как от i-го поставщика к j-му потребителю запланировано к перевозке x_{ij} единиц груза, то стоимость перевозки составит $c_{ij}x_{ij}$.

Математическая модель закрытой транспортной задачи.

Целевая функция

$$Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \Rightarrow \min . \qquad (6.1)$$

Систему ограничений получаем из следующих условий задачи:

а) все грузы должны быть перевезены

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \ \ (i = 1,\ m); \qquad (6.2)$$

б) все потребности должны быть удовлетворены:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_i \quad (j = 1,\ n); \tag{6.3}$$

в) условие неотрицательности

$$x_{ij} \geq 0 (i = 1, m\ ; j = 1,\ n). \tag{6.4}$$

Оптимальным решением задачи является матрица размерностью ***m*** × ***n***, удовлетворяющая системе ограничений и доставляющая минимум целевой функции.

6.2 Задания для лабораторной работы

Решить закрытую модель транспортной задачи для заданного варианта из таблицы 6.1.

Таблица 6.1 – Варианты заданий

Вариант 1	Стоимость перевозки единицы продукции				Объем производства
	1	3	4	5	20
	5	2	10	3	30
	3	2	1	4	50
	6	4	2	6	20
Объем распределения	30	20	60	10	
Вариант 2	Стоимость перевозки единицы продукции				Объем производства
	2	7	7	6	20
	1	1	1	2	50
	5	5	3	1	10
	2	8	1	4	20
	3	2	1	5	10
Объем распределения	40	30	20	20	
Вариант 3	Стоимость перевозки единицы продукции				Объем производства
	6	3	4	5	20
	5	2	3	3	70
	3	4	2	4	25
	5	6	2	7	30
Объем распределения	15	30	80	20	

Продолжение таблицы 6.1

Вариант 4	Стоимость перевозки единицы продукции				Объем производства
	5	1	7	6	30
	1	5	8	1	40
	5	6	3	3	10
	2	5	1	4	20
	3	7	9	1	10
Объем распределения	20	40	30	20	
Вариант 5	Стоимость перевозки единицы продукции				Объем производства
	6	1	3	1	20
	3	4	5	8	30
	5	9	3	2	20
	2	4	8	4	20
	3	2	1	5	30
Объем распределения	50	30	20	20	
Вариант 6	Стоимость перевозки единицы продукции				Объем производства
	5	9	4	5	30
	1	5	5	6	20
	2	2	10	4	30
	3	7	2	6	40
Объем распределения	20	50	20	30	
Вариант 7	Стоимость перевозки единицы продукции				Объем производства
	7	1	3	2	30
	8	4	5	8	20
	5	2	3	7	10
	5	5	8	4	40
	1	9	7	5	30
Объем распределения	30	40	50	10	
Вариант 8	Стоимость перевозки единицы продукции				Объем производства
	5	9	3	10	10
	3	10	5	9	30
	7	2	3	8	20
	8	5	11	2	20
	5	9	10	5	20
Объем распределения	50	10	30	10	

Окончание таблицы 6.1

Вариант 9	Стоимость перевозки единицы продукции				Объем производства
	7	9	1	5	20
	2	7	5	6	30
	3	5	10	8	40
	3	7	4	5	30
Объем распределения	40	30	30	20	
Вариант 10	Стоимость перевозки единицы продукции				Объем производства
	1	7	5	3	20
	6	2	9	4	20
	4	9	2	8	50
	8	3	6	9	40
	9	5	7	1	10
Объем распределения	50	30	30	30	
Вариант 11	Стоимость перевозки единицы продукции				Объем производства
	4	2	2	2	20
	2	8	4	6	30
	2	2	4	2	20
	1	5	7	7	20
	1	3	3	3	10
Объем распределения	10	20	30	40	
Вариант 12	Стоимость перевозки единицы продукции				Объем производства
	5	3	1	1	10
	4	1	1	4	10
	6	2	5	7	20
	3	2	2	3	20
	2	2	1	5	20
Объем распределения	20	10	10	40	
Вариант 13	Стоимость перевозки единицы продукции				Объем производства
	8	8	7	7	30
	9	9	1	1	20
	6	2	1	1	10
	7	1	1	1	10
Объем распределения	30	20	10	10	
Вариант 14	Стоимость перевозки единицы продукции				Объем производства
	3	9	4	5	40
	1	8	5	3	10
	7	2	1	4	30
	2	4	10	6	25
Объем распределения	50	10	35	10	

6.3 Пример выполнения задания

Допустим, у нас есть 6 продавцов и 7 покупателей. Предложение продавцов составляет 36, 51, 32, 44, 35 и 38 ед. Спрос покупателей следующий: 33, 48, 30, 36, 33, 24 и 32 ед. Суммарные количества по спросу и предложению равны, следовательно, это транспортная задача закрытого типа. Также мы имеем данные по издержкам перевозок из одного пункта в другой (таблица 6.2).

Таблица 6.2 – Исходные данные

	Стоимость перевозки единицы продукции							Объем производства
Исходные данные	10	7	8	11	7	9	5	36
	4	8	9	10	3	7	8	51
	6	12	4	7	8	15	14	32
	1	7	13	3	9	2	4	44
	9	4	1	8	7	3	5	35
	5	9	9	7	4	6	5	38
Объем распределения	33	48	30	36	33	24	32	

1 Составляем математическую модель задачи:

Целевая функция

$$Z = \sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{7} c_{ij}x_{ij} \Rightarrow \min.$$

Систему ограничений получаем из следующих условий задачи:

а) все грузы должны быть перевезены:

$$\sum_{j=1}^{7} x_{ij} = a_i \quad (i = 1,\ 6);$$

б) все потребности должны быть удовлетворены:

$$\sum_{i=1}^{6} x_{ij} = b_i \quad (j = 1, 7);$$

в) условие не отрицательности

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1,\ 6;\ j = 1,\ 7).$$

Оптимальным решением задачи будет являться матрица размерностью 6 × 7, удовлетворяющая системе ограничений и доставляющая минимум целевой функции.

2 Заполняем таблицу Excel исходными данными (рисунок 6.1).

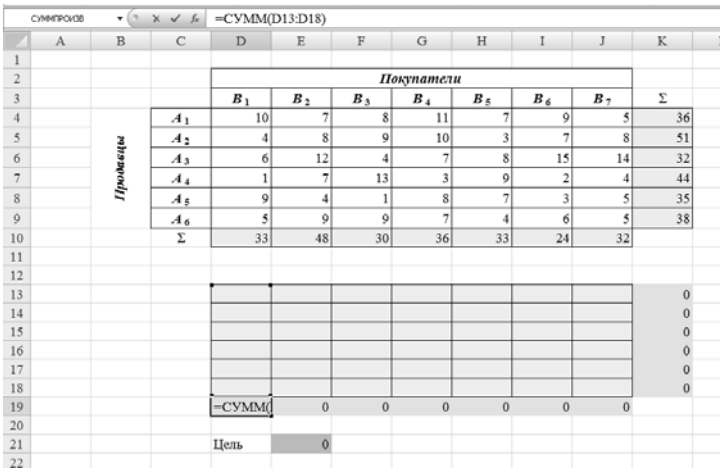
Блок ячеек **D13:J18** содержит оптимальное решение, значение этих ячеек будет получено в результате решения задачи. Блок ячеек **D4:J9** содержит значения по издержкам перевозок из одного пункта в другой. Блок ячеек **К4:К9** содержит значения по имеющимся предложениям (объемам производства). Блок ячеек **D10:J10** содержит значения по спросу (объемам поставок).

3 Для вычисления целевой функции в ячейке **E21** используем функцию **=СУММПРОИЗВ(D4:J9;D13:J18)** (см. рисунок 6.1).

4 Вводим ограничения (см. рисунок 6.1):

– по продавцам (все грузы должны быть перевезены) в ячейку К13 (**=СУММ(D13:J13)**) и растягиваем формулу до ячейки К18;

– по покупателям (все потребности должны быть удовлетворены) в ячейку D19 (**=СУММ(D13:D18)**) и растягиваем формулу до ячейки J19.



	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	Σ
A_1	10	7	8	11	7	9	5	36
A_2	4	8	9	10	3	7	8	51
A_3	6	12	4	7	8	15	14	32
A_4	1	7	13	3	9	2	4	44
A_5	9	4	1	8	7	3	5	35
A_6	5	9	9	7	4	6	5	38
Σ	33	48	30	36	33	24	32	

Рисунок 6.1 – Ввод исходных данных, целевой функции и ограничений

5 На вкладке *Данные* в группе *Анализ* выберем команду *Поиск решения*. На экране отобразится ДО *Параметры поиска решения*, в котором установим следующие параметры (рисунок 6.2):

– в поле *Оптимизировать целевую функцию* указываем адрес ячейки со значением целевой функции – **E21**;

– переключатель *До* устанавливаем на минимум целевой функции;

– в поле *Изменяя ячейки переменных* указываем адреса ячеек со значениями искомых переменных **D13:J18**;

– в области *В соответствии с ограничениями* с помощью кнопки *Добавить* размещаем ссылки на все ограничения задачи;

– проверяем, чтобы обязательно была поставлена галочка напротив опции *“Сделать переменные без ограничений неотрицательными”*, а также, чтобы в качестве метода решения стояло значение *“Поиск решения симплекс методом”* и нажимаем кнопку *Выполнить*.

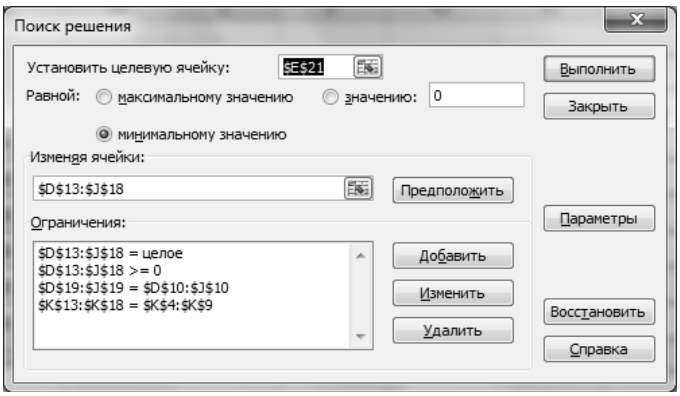
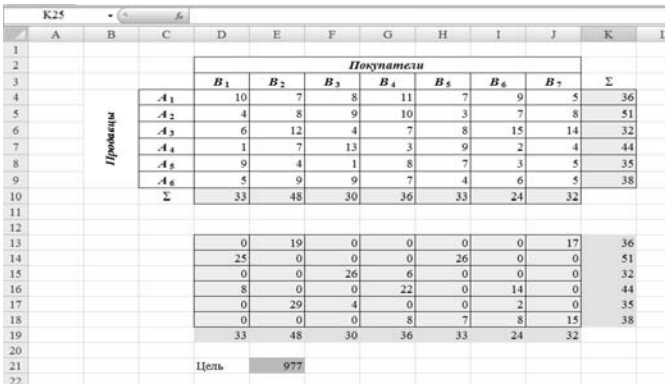


Рисунок 6.2 – Заполнение ДО *Поиск решения*

Результат выполнения *Поиска решений* представлен на рисунке 6.3.



		Покупатели							
		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	Σ
Продавцы	A_1	10	7	8	11	7	9	5	36
	A_2	4	8	9	10	3	7	8	51
	A_3	6	12	4	7	8	15	14	32
	A_4	1	7	13	3	9	2	4	44
	A_5	9	4	1	8	7	3	5	35
	A_6	5	9	9	7	4	6	5	38
	Σ	33	48	30	36	33	24	32	

0	19	0	0	0	0	17	36
25	0	0	0	26	0	0	51
0	0	26	6	0	0	0	32
8	0	0	22	0	14	0	44
0	29	4	0	0	2	0	35
0	0	0	8	7	8	15	38
33	48	30	36	33	24	32	

Цель 977

Рисунок 6.3 – Результаты расчета

Вывод. Таким образом, для получения минимальных издержек по доставке грузов получен план доставок 6 наименований товаров по 7 покупателям.

7 Лабораторная работа № 7. Решение задач оптимизации с помощью Excel (открытая модель транспортной задачи)

Цель работы: получение навыков решения открытой модели транспортной задачи оптимизации с помощью Excel.

7.1 Теоретические сведения

Транспортная задача называется ***открытой***, если сумма запасов груза не равна суммарной потребности в нем, т. е.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j .$$

Обозначим через x_{ij} количество единиц груза, запланированных к перевозке от i-го поставщика к j-му потребителю. Так как от i-го поставщика к j-му потре-

бителю запланировано к перевозке x_{ij} единиц груза, то стоимость перевозки составит $c_{ij}x_{ij}$.

Математическая модель открытой транспортной задачи.

Для открытой модели может быть два случая:

1) суммарные запасы превышают суммарные потребности:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j;$$

2) суммарные потребности превышают суммарные запасы:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

Целевая функция одинакова в обоих случаях, изменяется только вид системы ограничений.

В *первом случае*, когда суммарные запасы превышают суммарные потребности, вводится фиктивный потребитель B_{n+1}, потребность которого

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j .$$

Во *втором случае*, когда суммарные потребности превышают суммарные запасы, вводится фиктивный поставщик A_{k+1}, запасы которого

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i .$$

Как стоимость перевозки единицы груза до фиктивного потребителя, так и стоимость перевозки груза от фиктивного поставщика полагаются равными нулю, т. к. груз в обоих случаях не перевозится.

Целевая функция

$$Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \Rightarrow \min. \qquad (7.1)$$

Ограничения:

– первый случай:

а) все грузы должны быть перевезены:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i \ (i = 1,\ m); \qquad (7.2)$$

б) все потребности должны быть удовлетворены:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_i \ (j = 1,\ n); \qquad (7.3)$$

в) условие неотрицательности

$$x_{ij} \geq 0 \ (i = 1,\ m;\ j = 1,\ n). \tag{7.4}$$

– второй случай

а) все грузы должны быть перевезены

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \ (i = 1,\ m); \tag{7.5}$$

б) все потребности должны быть удовлетворены

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq b_i \ (j = 1,\ n); \tag{7.6}$$

в) условие неотрицательности

$$x_{ij} \geq 0 \ (i = 1,\ m;\ j = 1,\ n). \tag{7.7}$$

Транспортная задача имеет ***m*** + ***n*** уравнений с ***m·n*** неизвестными. Оптимальным решением задачи является матрица размерностью ***m*** × ***n***, удовлетворяющая системе ограничений и доставляющая минимум целевой функции.

7.2 Задания для лабораторной работы

Решить закрытую модель транспортной задачи для заданного варианта из таблицы 7.1.

Таблица 7.1 – Варианты заданий

Исходные данные					
Вариант 1	Стоимость перевозки единицы продукции				Объем производства
	1	3	4	5	20
	5	2	10	3	30
	3	2	1	4	50
	6	4	2	6	20
Объем распределения	30	20	60	15	
Вариант 2	Стоимость перевозки единицы продукции				Объем производства
	2	7	7	6	20
	1	1	1	2	50
	5	5	3	1	10
	2	8	1	4	20
	3	2	1	5	10
Объем распределения	40	30	20	20	

Продолжение таблицы 7.1

Вариант 3	Стоимость перевозки единицы продукции				Объем производства
	6	3	4	5	20
	5	2	3	3	70
	3	4	2	4	25
	5	6	2	7	17
Объем распределения	15	30	80	20	
Вариант 4	Стоимость перевозки единицы продукции				Объем производства
	5	1	7	6	30
	1	5	8	1	40
	5	6	3	3	10
	2	5	1	4	20
	3	7	9	1	10
Объем распределения	15	40	30	20	
Вариант 5	Стоимость перевозки единицы продукции				Объем производства
	3	9	4	5	40
	1	8	5	3	10
	7	2	1	4	30
	2	4	10	6	25
Объем распределения	50	10	35	10	
Вариант 6	Стоимость перевозки единицы продукции				Объем производства
	6	1	3	1	20
	3	4	5	8	30
	5	9	3	2	20
	2	4	8	4	20
	3	2	1	5	35
Объем распределения	50	30	20	20	
Вариант 7	Стоимость перевозки единицы продукции				Объем производства
	5	9	4	5	30
	1	5	5	6	20
	2	2	10	4	30
	3	7	2	6	40
Объем распределения	20	42	20	30	
Вариант 8	Стоимость перевозки единицы продукции				Объем производства
	7	1	3	2	30
	8	4	5	8	20
	5	2	3	7	15
	5	5	8	4	40
	1	9	7	5	30
Объем распределения	30	40	50	10	
Вариант 9	Стоимость перевозки единицы продукции				Объем производства
	7	9	1	5	20
	2	7	5	6	30
	3	5	10	8	40
	3	7	4	5	30
Объем распределения	40	30	33	20	

Окончание таблицы 7.1

Вариант 10	Стоимость перевозки единицы продукции				Объем производства
	5	9	3	10	10
	3	10	5	9	30
	7	2	3	8	20
	8	5	11	2	25
	5	9	10	5	20
Объем распределения	50	10	30	10	
Вариант 11	Стоимость перевозки единицы продукции				Объем производства
	1	7	5	3	20
	6	2	9	4	20
	4	9	2	8	50
	8	3	6	9	40
	9	5	7	1	10
Объем распределения	50	30	30	15	
Вариант 12	Стоимость перевозки единицы продукции				Объем производства
	4	2	2	2	20
	2	8	4	6	30
	2	2	4	2	20
	1	5	7	7	20
	1	3	3	3	15
Объем распределения	10	20	30	40	
Вариант 13	Стоимость перевозки единицы продукции				Объем производства
	5	3	1	1	10
	4	1	1	4	10
	6	2	5	7	20
	3	2	2	3	20
	2	2	1	5	20
Объем распределения	20	15	10	40	
Вариант 14	Стоимость перевозки единицы продукции				Объем производства
	8	8	7	7	35
	9	9	1	1	20
	6	2	1	1	10
	7	1	1	1	10
Объем распределения	30	20	10	10	

7.3 Пример выполнения задания

Допустим, у нас есть 6 продавцов и 7 покупателей. Предложение продавцов составляет 36, 51, 32, 44, 35 и 38 ед. Спрос покупателей следующий: 33, 48, 30, 36, 33, 24 и 32 ед. Суммарные количества по спросу и предложению равны, следовательно, это транспортная задача закрытого типа. Также мы имеем данные по издержкам перевозок из одного пункта в другой (таблица 7.2).

Таблица 7.2 – Исходные данные

	Стоимость перевозки единицы продукции							Объем производства
Исходные данные	10	7	8	11	7	9	5	36
	4	8	9	10	3	7	8	51
	6	12	4	7	8	15	14	32
	1	7	13	3	9	2	4	44
	9	4	1	8	7	3	5	45
	5	9	9	7	4	6	5	38
Объем распределения	33	48	30	36	33	24	32	

Чтобы сбалансировать спрос и предложение, вводим в данном случае еще одного, фиктивного покупателя $\boldsymbol{B_8}$ с потребностью в 10 ед. При этом матрица стоимости перевозок для данного фиктивного пункта назначения заполняется нулями (таблица 7.3).

Таблица 7.3 – Данные для ввода

	Стоимость перевозки единицы продукции								Объем производства
Исходные данные	10	7	8	11	7	9	5	0	36
	4	8	9	10	3	7	8	0	51
	6	12	4	7	8	15	14	0	32
	1	7	13	3	9	2	4	0	44
	9	4	1	8	7	3	5	0	45
	5	9	9	7	4	6	5	0	38
Объем распределения	33	48	30	36	33	24	32	10	

1 Составляем математическую модель задачи.

Целевая функция (формула (7.1))

$$Z = \sum_{i=1}^{6} \sum_{j=1}^{8} c_{ij} x_{ij} \Rightarrow \min .$$

Ограничения получаем из условий задачи (формулы (7.2) –(7.4)):

а) все грузы должны быть перевезены:

$$\sum_{j=1}^{8} x_{ij} \le a_i \ (i = 1,\ 6);$$

б) все потребности должны быть удовлетворены:

$$\sum_{i=1}^{8} x_{ij} \le b_i \ \ (j = 1,\ 6);$$

в) условие неотрицательности

$$x_{ij} \ge 0 \ \ (i = 1,\ 6;\ j = 1,\ 8).$$

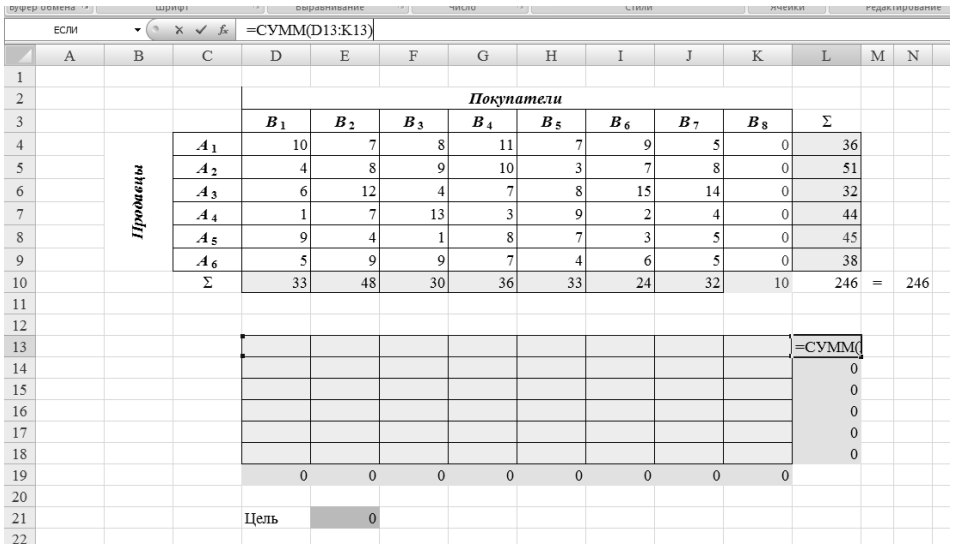
Оптимальным решением задачи является матрица размерностью 6 × 8, удовлетворяющая системе ограничений и доставляющая минимум целевой функции.

2 Заполняем таблицу Excel исходными данными (рисунок 7.1).

Блок ячеек **D13:К18** содержит оптимальное решение, значение этих ячеек будет получено в результате решения задачи. Блок ячеек **D4:К9** содержит значения по издержкам перевозок из одного пункта в другой. Блок ячеек **L4:L9** содержит значения по имеющимся предложениям (объемам производства). Блок ячеек **D10:К10** содержит значения по спросу (объемам поставок).

3 Для вычисления целевой функции в ячейке **Е21** используем функцию **=СУММПРОИЗВ(D4:К9;D13:К18)** (см. рисунок 7.1).

4 Вводим ограничения (см. рисунок 7.1): по продавцам (все грузы должны быть перевезены) в ячейки L13:L18 **(=СУММ(D14:К13)**) и по покупателям (все потребности должны быть удовлетворены) в ячейки D19:К19 (**=СУММ(D13:D18)**).



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1														
2				*Покупатели*										
3				B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8	Σ		
4			A_1	10	7	8	11	7	9	5	0	36		
5			A_2	4	8	9	10	3	7	8	0	51		
6		*Продавцы*	A_3	6	12	4	7	8	15	14	0	32		
7			A_4	1	7	13	3	9	2	4	0	44		
8			A_5	9	4	1	8	7	3	5	0	45		
9			A_6	5	9	9	7	4	6	5	0	38		
10			Σ	33	48	30	36	33	24	32	10	246	=	246
11														
12														
13												=СУММ(		
14												0		
15												0		
16												0		
17												0		
18												0		
19				0	0	0	0	0	0	0	0			
20														
21				Цель	0									
22														

Рисунок 7.1 – Ввод исходных данных, целевой функции и ограничений

5 На вкладке *Данные* в группе *Анализ* выберем команду *Поиск решения*. На экране отобразится ДО *Параметры поиска решения*, в котором установим следующие параметры (рисунок 7.2):

– в поле *Оптимизировать целевую функцию* указываем адрес ячейки со значением целевой функции – **E21**;

– переключатель *До* устанавливаем на минимум целевой функции;

– в поле *Изменяя ячейки переменных* указываем адреса ячеек со значениями искомых переменных – **D13:K18**;

– в области *В соответствии с ограничениями* с помощью кнопки *Добавить* размещаем все ограничения задачи;

– проверяем, чтобы обязательно была поставлена галочка напротив опции *Сделать переменные без ограничений неотрицательными*, а также чтобы в качестве метода решения стояло значение *Поиск решения нелинейных задач методов ОПГ* и нажимаем кнопку *Выполнить*.

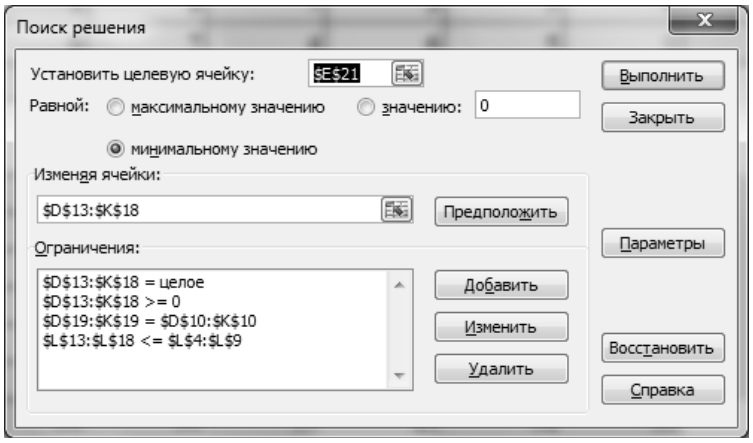
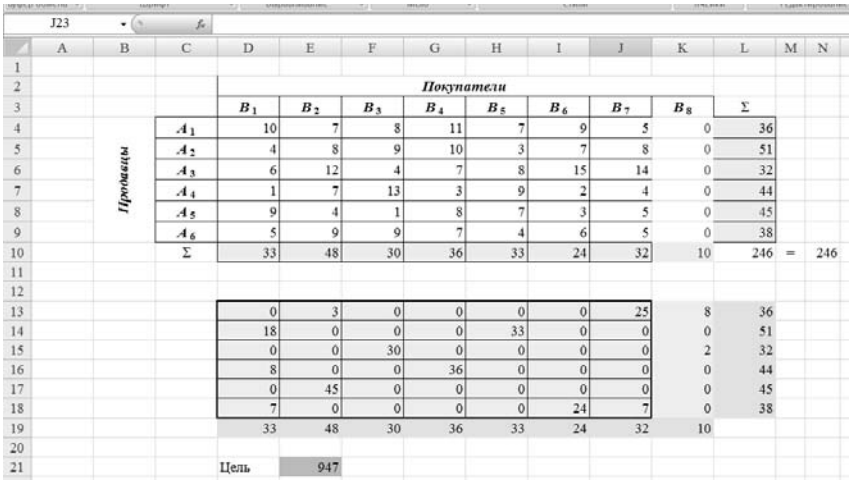


Рисунок 7.2 – Заполнение ДО *Поиск решения*

Результат выполнения *Поиска решений* представлен на рисунке 7.3.



		Покупатели										
		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8	Σ		
Продавцы	A_1	10	7	8	11	7	9	5	0	36		
	A_2	4	8	9	10	3	7	8	0	51		
	A_3	6	12	4	7	8	15	14	0	32		
	A_4	1	7	13	3	9	2	4	0	44		
	A_5	9	4	1	8	7	3	5	0	45		
	A_6	5	9	9	7	4	6	5	0	38		
	Σ	33	48	30	36	33	24	32	10	246	=	246
		0	3	0	0	0	0	25	8	36		
		18	0	0	0	33	0	0	0	51		
		0	0	30	0	0	0	0	2	32		
		8	0	0	36	0	0	0	0	44		
		0	45	0	0	0	0	0	0	45		
		7	0	0	0	0	24	7	0	38		
		33	48	30	36	33	24	32	10			
		Цель	947									

Рисунок 7.3 – Результаты расчета

Вывод. Таким образом, для получения минимальных издержек по доставке грузов получен план доставок 6 наименований товаров по 7 покупателям. При этом фиктивный покупатель не учитывается в реальном плане доставки.

Список литературы

1 Подготовка и редактирование документов в MS WORD: учебное пособие / Е. А. Баринова [и др.]. – Москва: КУРС; ИНФРА-М, 2017. – 184 с.

2 **Яшин, В. Н.** Информатика: программные средства персонального компьютера: учебное пособие / В. Н. Яшин. – Москва: ИНФРА-М, 2018. – 236 с.

3 **Гуриков, С. Р.** Информатика: учебник / С. Р. Гуриков. – 2-е изд., перераб. и доп. – Москва: ИНФРА-М; Форум, 2020. – 630 с.