

## ТРАНСПОРТ

УДК 629.015

Д. А. Дубовик, канд. техн. наук

### ГИПОТЕЗА ЛИНЕЙНОГО ЗАКОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОПОРНЫХ РЕАКЦИЙ КОЛЕС МНОГООСНЫХ КОЛЕСНЫХ МАШИН ПРИ ДЕЙСТВИИ АКТИВНЫХ СИЛ

В статье излагается гипотеза линейного закона распределения опорных реакций колес многоосной колесной машины в случае приложения к ней активных сил.

В ранее опубликованных статьях настоящего сборника была изложена гипотеза о линейном законе распределения опорных реакций колес многоосных колесных машин под действием силы тяжести, позволяющая раскрывать статическую неопределенность опорных реакций колес. В реальных условиях движения на многоосную колесную машину действуют различные силы: сила сопротивления воздуха, инерционные силы, силы сопротивления качению колес и реакции опор колес, подлежащие определению.

В настоящей работе приводится метод раскрытия статической неопределенности опорных реакций колес многоосных колесных машин, находящихся под действием силы тяжести и активных сил.

Рассмотрим колесную машину, находящуюся под действием силы тяжести и активных сил (рис. 1). На рис. 1 представлены:  $\vec{Z}_1, \vec{Z}_2, \vec{Z}_3, \vec{Z}_4$  – вертикальные реакции;  $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \vec{X}_3, \vec{X}_4$  – поперечные реакции;  $\vec{Y}_1, \vec{Y}_2, \vec{Y}_3, \vec{Y}_4$  – продольные реакции колес.

Возможны следующие случаи статической неопределенности опорных реакций колес машины.

1. Машина находится под действием силы тяжести и активной силы, направленной параллельно опорной

плоскости. При условии, что векторы опорных реакций колес машины симметричны относительно вектора силы тяжести колесной машины, продольные реакции колес линейно-зависимы и равны между собой, т. е.

$$Y_1 = Y_2 = Y_3 = Y_4.$$

В направлении движения имеем лишь одно уравнение статического равновесия, а другие дополнительные уравнения, необходимые для определения продольных реакций, получим из гипотезы о линейном законе их распределения.

2. Машина находится под действием продольной и поперечной сил.

Полагая, что нормальные реакции (см. рис. 1) не зависят от углов поворота управляемых колес, можно составить известные условия статического равновесия:

$$\begin{cases} \sum m_{A_1 X} = 0; \\ \sum m_{A_4 X} = 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} Ga - Z_2 l_1 - Z_3 (l_1 + l_2) - \\ - Z_4 (l_1 + l_2 + l_3) - P_z L_1 + P_y h = 0; \\ Gb - Z_3 l_3 - Z_2 (l_2 + l_3) - \\ - Z_1 (l_1 + l_2 + l_3) - P_z L_2 + P_y h = 0. \end{cases}$$

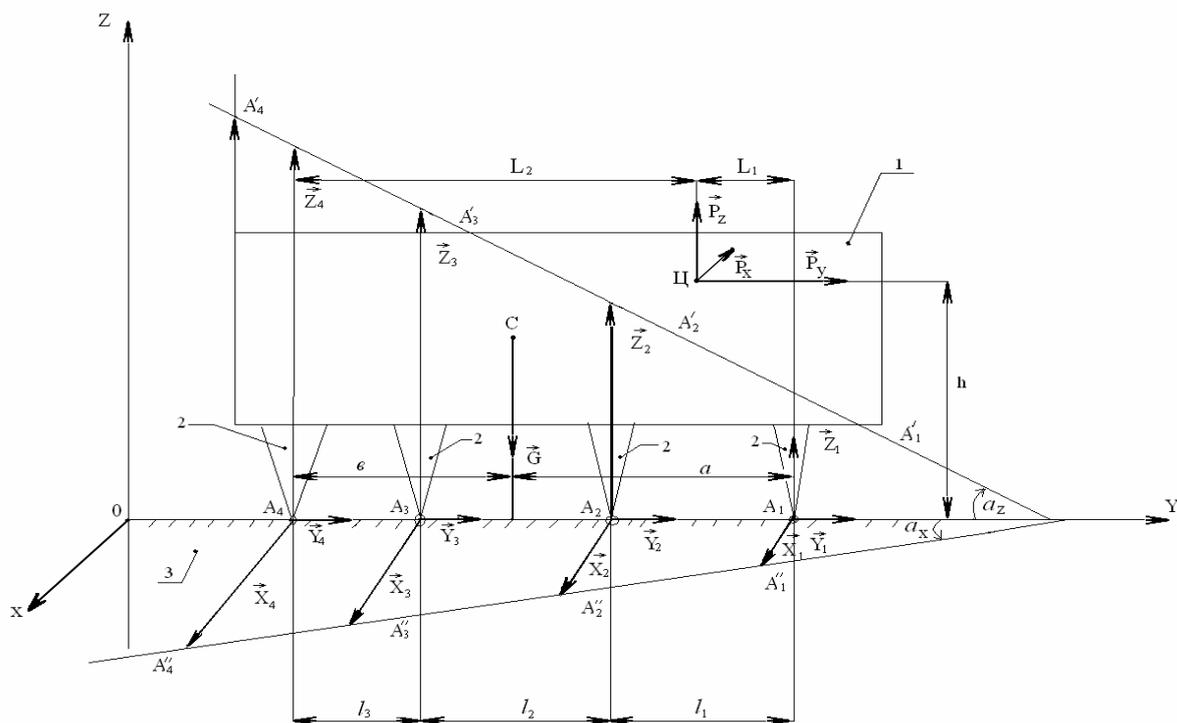


Рис. 1. Схема распределения опорных реакций колес при действии силы, приложенной под углом к корпусу колесной машины: 1 – корпус автомобиля; 2 – условные опоры колес; 3 – опорная поверхность (дорога)

Из гипотезы о линейном законе распределения опорных реакций колес многоосной машины имеем дополнительные уравнения:

$$\frac{Z_2 - Z_1}{l_1} = \operatorname{tg} l_Z; \quad \frac{Z_3 - Z_2}{l_2} = \operatorname{tg} l_Z; \\ \frac{Z_4 - Z_3}{l_3} = \operatorname{tg} l_Z$$

или

$$\begin{cases} \frac{Z_2 - Z_1}{l_1} = \frac{Z_3 - Z_2}{l_2}; \\ \frac{Z_3 - Z_1}{l_2} = \frac{Z_4 - Z_3}{l_3}. \end{cases}$$

Замкнутую систему уравнений статического равновесия представим в виде

$$A_Z = \begin{pmatrix} 0 & l_1 & l_1 + l_2 & l_1 + l_2 + l_3 \\ l_1 + l_2 + l_3 & l_2 + l_3 & l_3 & 0 \\ -l_2 & l_1 + l_2 & -l_1 & 0 \\ 0 & -l_3 & l_2 + l_3 & -l_2 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

$$\begin{cases} 0Z_1 + l_1Z_2 + (l_1 + l_2)Z_4 + \\ + (l_1 + l_2 + l_3)Z_4 = Ga - P_ZL_1 + P_Yh; \\ (l_1 + l_2 + l_3)Z_1 + (l_2 + l_3)Z_2 + \\ + l_3Z_3 + 0Z_4 = Gb - P_ZL_2 + P_Yh; \\ -l_2Z_1 + (l_1 + l_2)Z_2 - l_1Z_3 + 0Z_4 = 0; \\ 0Z_1 + l_3Z_2 + (l_1 + l_3)Z_3 - l_2Z_4 = 0, \end{cases} \quad (1)$$

имея в виду, что

$$L_Z = \arctg \left( \frac{Z_2 - Z_1}{l_1} \right). \quad (2)$$

Матрица коэффициентов уравнений (1) может быть представлена в виде

Матрица правых частей системы уравнений (1) имеет вид:

$$B_Z = \begin{pmatrix} Ga & -P_Z L_1 & +P_y h \\ Gb & -P_Z L_2 & +P_y h \\ 0 & & \\ 0 & & \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Предположим, что все управляемые колеса колесной машины поверну-

ты на углы  $\alpha_1, \alpha_2$  и  $\alpha_3$  (рис. 2).

Пусть на колесную машину кроме силы тяжести действует некоторая наклонная сила

$$\vec{P} = \vec{P}_x + \vec{P}_y + \vec{P}_z,$$

где  $\vec{P}_x, \vec{P}_y, \vec{P}_z$  – составляющие вектора  $\vec{P}$  вдоль ортогональных координат.

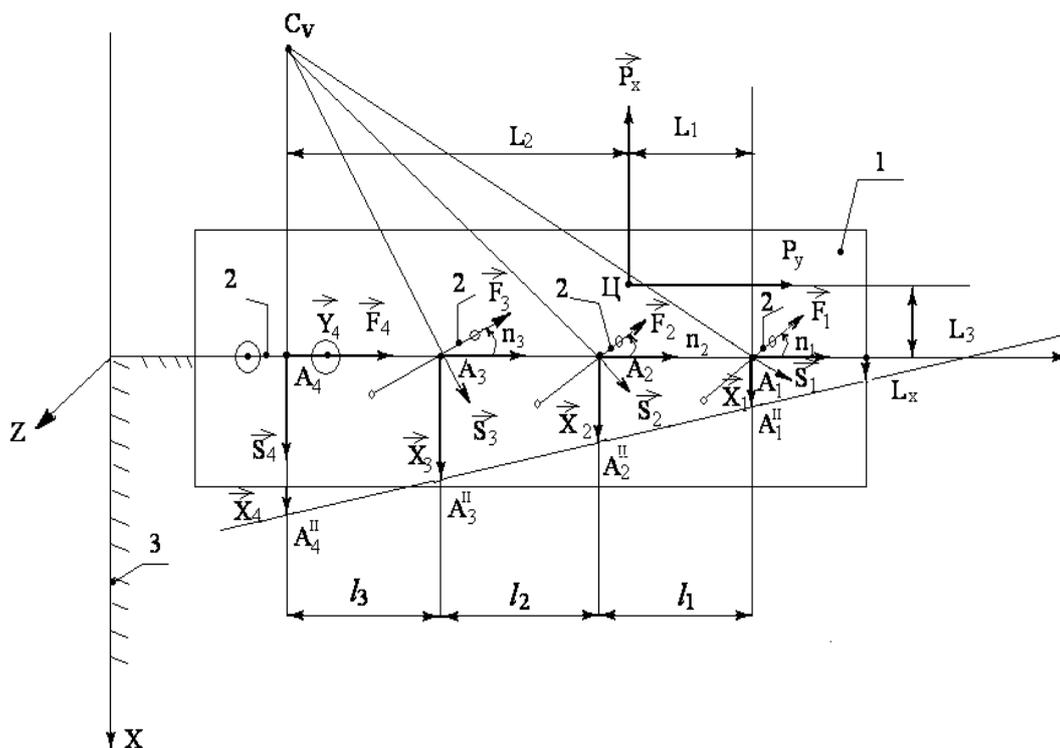


Рис. 2. Схема направлений векторов опорных реакций колес многоосной колесной машины, активной силы и поворотов управляемых колес: 1 – кузов; 2 – колеса; 3 – дорога

Полагаем, реакции  $\vec{Z}_1, \vec{Z}_2, \vec{Z}_3, \vec{Z}_4$  не зависят от углов поворота управляемых колес. Тогда данные реакции можно определить из условия (1).

Кроме активной силы, на рис. 2 представлены:  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$  – окружные силы колес, зависящие от условий их сцепления с дорогой;  $\vec{S}_1, \vec{S}_2, \vec{S}_3, \vec{S}_4$  – боковые реакции колес, перпендикулярные продольным плоскостям колес. Поперечные реакции  $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \vec{X}_3, \vec{X}_4$

подчинены гипотезе о линейном законе распределения опорных реакций колес и дают два уравнения равновесия. Продольные реакции  $\vec{Y}_1, \vec{Y}_2, \vec{Y}_3, \vec{Y}_4$  также подчинены гипотезе и дают еще одно уравнение равновесия.

Уравнения связи между векторами сил можно представить в виде

$$\begin{cases} \vec{R} = \vec{X} + \vec{Y}; \\ \vec{R} = \vec{F} + \vec{S}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{F}_1 + \vec{S}_1 = \vec{X}_1 + \vec{Y}_1; \\ \vec{F}_2 + \vec{S}_2 = \vec{X}_2 + \vec{Y}_2; \\ \vec{F}_3 + \vec{S}_3 = \vec{X}_3 + \vec{Y}_3; \\ \vec{F}_4 + \vec{S}_4 = \vec{X}_4 + \vec{Y}_4, \end{cases} \quad (5)$$

где  $\vec{X}$  – поперечная реакция;  $\vec{Y}$  – продольная реакция;  $\vec{F}$  – касательная реакция;  $\vec{S}$  – боковая реакция.

Спроектируя векторы сил системы уравнений (5) на направления  $\vec{F}$  и  $\vec{S}$  (см. рис. 2), получим

$$\begin{cases} F_1 = -X_1 \sin \alpha_1 + Y_1 \cos \alpha_1; \\ S_1 = X_1 \cos \alpha_1 + Y_1 \sin \alpha_1; \\ F_2 = -X_2 \sin \alpha_2 + Y_2 \cos \alpha_2; \\ S_2 = X_2 \cos \alpha_2 + Y_2 \sin \alpha_2; \\ F_3 = -X_3 \sin \alpha_3 + Y_3 \cos \alpha_3; \\ S_3 = X_3 \cos \alpha_3 + Y_3 \sin \alpha_3; \\ F_4 = Y_4; \\ S_4 = X_4. \end{cases} \quad (6)$$

Из данной системы уравнений можно определить касательные и боковые опорные реакции колес.

Уравнения равновесия поперечных и продольных сил (см. рис. 2) имеют вид:

$$\begin{cases} \sum M_{A1} = 0; \\ \sum \omega_{A4} = 0; \\ \sum Y = 0; \\ \frac{X_2 - X_1}{l_1} = \frac{X_3 - X_2}{l_2}; \\ \frac{X_3 - X_2}{l_2} = \frac{X_4 - X_3}{l_3}; \\ Y_1 = Y_2 = Y_3 = Y_4. \end{cases} \quad (7)$$

Распишем систему уравнений (7) в виде

$$\begin{cases} X_2 l_1 + X_3 (l_1 + l_2) + \\ + X_4 (l_1 + l_2 + l_3) - P_x L_3 = 0; \\ X_1 (l_1 + l_2 + l_3 + l_4) + X_2 (l_2 + l_3) + \\ + X_3 l_3 - P_x L_2 + P_y L_3 = 0; \\ Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 + P_y = 0; \\ l_2 X_2 - l_2 X_1 = l_1 X_3 - l_1 X_2; \\ l_3 X_3 - l_3 X_2 = l_2 X_4 - l_2 X_3; \\ Y_1 = Y_2 = Y_3 = Y_4. \end{cases}$$

Условия равновесия машины представляются в виде

$$\begin{cases} 0X_1 + l_1 X_2 + (l_1 + l_2) X_3 + \\ + (l_1 + l_2 + l_3) X_4 = P_x L_1 + P_y L_3; \\ (l_1 + l_2 + l_3) X_1 + (l_2 + l_3) X_2 + \\ + l_3 X_3 + 0X_4 = P_x L_2 - P_y L_3; \\ -l_2 X_1 + (l_1 + l_2) X_2 - l_1 X_3 + 0X_4 = 0; \\ 0X_1 + (l_1 + l_2) X_2 - l_1 X_3 + 0X_4 = 0; \\ 0X_1 - l_3 X_2 + (l_2 + l_3) X_3 - l_2 X_4 = 0; \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} Y_1 = -\frac{1}{4} P_y; \\ Y_2 = -\frac{1}{4} P_y; \\ Y_3 = -\frac{1}{4} P_y; \\ Y_4 = -\frac{1}{4} P_y. \end{cases} \quad (9)$$

Представим систему уравнений (8) в форме матрицы:

$$A_x = \begin{pmatrix} 0 & l_1 & l_1 + l_2 & l_1 + l_2 + l_3 \\ l_1 + l_2 + l_3 & l_2 + l_3 & l_3 & 0 \\ -l_2 & l_1 + l_2 & -l_1 & 0 \\ 0 & -l_3 & l_2 + l_3 & -l_2 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Матрицу правых частей системы уравнений (8) представим в виде

$$B_x = \begin{pmatrix} P_x L_1 + P_y L_3 \\ P_x L_2 + P_y L_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Следует заметить, что для рассматриваемого случая матрица коэффициентов правых частей уравнений равновесия остается неизменной при любых вариантах приложения активной силы.

Как известно, модули и направления опорных реакций колес во многом зависят от характеристик их опорных поверхностей, которые определяют характер кинематических связей колес машины.

Обобщим классификационные признаки связей колес колесных машин по следующим характеристикам:

- опорная поверхность деформируема, тогда между реакциями и деформацией опор существуют математи-

ческая, экспериментальная, линейная (нелинейная) зависимости;

- опорная поверхность пластична, и функциональная зависимость между опорными реакциями колес машины отсутствует;

- опорная поверхность обладает реологическим свойством, и функциональная зависимость между опорными реакциями колес машины и реологическими характеристиками отсутствует.

Для колесных машин с одинаковыми характеристиками подвесок и размерами колес возможны следующие варианты раскрытия статических неопределенностей.

1. Колеса многоосной колесной машины поддресорены и оснащены шинами, совершают качение по недеформируемой опорной поверхности (рис. 3). В этом случае задача определения опорных реакций решается с помощью уравнений линейных деформаций упругих элементов при условии линейного характера их изменений.

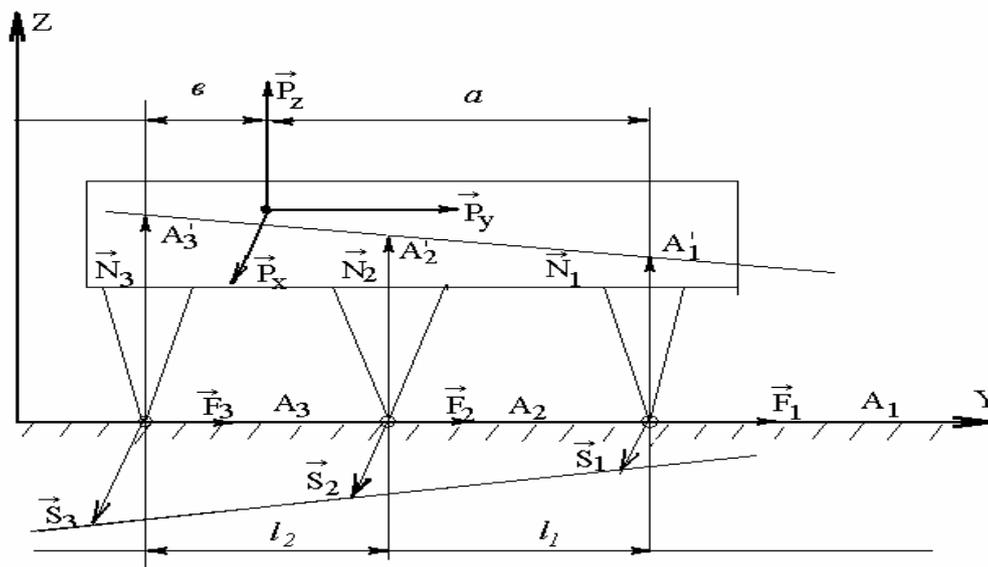


Рис. 3. Опоры корпуса колесной машины на поверхности с недеформируемой опорной поверхностью

2. Поверхность качения колес деформируема, колеса в поперечном и продольном направлениях не деформируемы (рис. 4).

В этом случае задача определения реакций требует использования гипотезы о линейном законе распределения.

3. Колеса в продольном направлении не деформируемы, а поверхность качения деформируема, тогда движение колесной машины характеризуется эффектом «плавучести» (рис. 5). Для рас-

крытия статической неопределенности, в первом приближении, возникает необходимость использования гипотезы о линейном законе распределения опорных реакций.

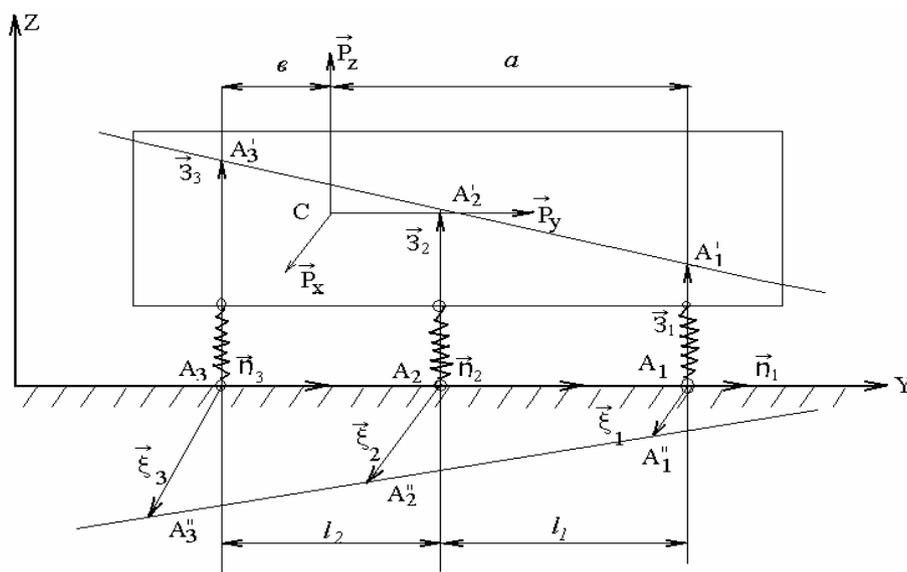


Рис. 4. Балка на упругих (линейных или нелинейных) опорах (недеформируемая опорная поверхность)

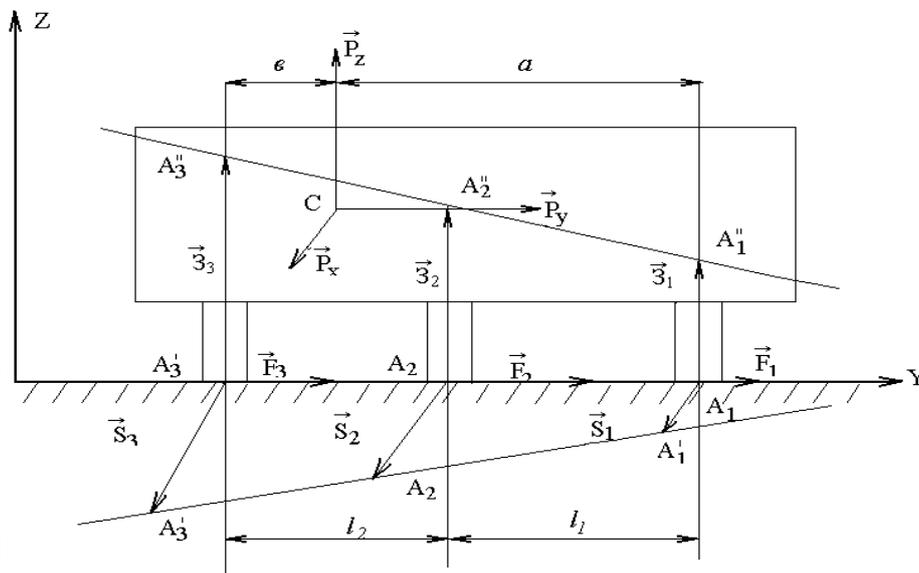


Рис. 5. Опоры упругой балки на поверхности с реологическим эффектом (вязкий торфяник)

Рассмотрим способы раскрытия статической неопределенности опорных реакций для перечисленных условий качения колес машины.

Для первого варианта качения ко-

лес условие статического равновесия и гипотеза о линейном законе распределения опорных реакций колес дают следующие уравнения статического равновесия:

$$\begin{aligned}\Sigma m_{A_1 X} &= 0; \\ \Sigma m_{A_3 X} &= 0;\end{aligned}\quad (12)$$

$$\Sigma m_{A_1 Z} = 0;\quad (13)$$

$$\Sigma m_{A_3 Z} = 0;\quad (14)$$

$$\Sigma y = 0;\quad (15)$$

$$\frac{S_3 - S_2}{l_2} = \frac{S_2 - S_1}{l_1};\quad (16)$$

$$\frac{N_3 - N_2}{l_2} = \frac{N_2 - N_1}{l_1}.\quad (17)$$

Дополнительные уравнения, полученные из гипотезы о линейном законе распределения опорных реакций, можно представить в виде

$$F_3 = F_2;\quad (18)$$

$$F_2 = F_1.\quad (19)$$

При линейных характеристиках упругих шин зависимость между их вертикальными и поперечными деформациями можно представить в виде

$$\frac{z_3 - z_2}{l_2} = \frac{z_2 - z_1}{l_1}; \quad \frac{\xi_3 - \xi_2}{l_2} = \frac{\xi_2 - \xi_1}{l_1}.$$

Тогда (см. рис. 4)

$$\frac{z_3 - z_2}{l_2} = \frac{z_2 - z_1}{l_1}.$$

Из проведенных рассуждений следует, что  $F_3 = F_2$ ;  $F_2 = F_1$ .

Совокупность полученных уравнений раскрывает статическую неопределенность опорных реакций колес многоосных колесных машин в различных условиях их эксплуатации.

### Выводы

1. Гипотеза о линейном законе распределения опорных реакций колес многоосных колесных машин позволяет определять опорные реакции колес при наличии активных сил, действующих на машину, и может быть использована для колесных машин с любым числом осей.

2. Раскрытие статической неопределенности опорных реакций приводной многоосной колесной машины, находящейся под действием активных сил, представляет собой основу исследований возникновения циркуляции мощности в трансмиссии.

3. При использовании в многоосных колесных машинах подвесок и шин с разными характеристиками гипотеза линейного распределения опорных реакций колес дает несколько ломанных прямых линий распределения реакций. Построение этих линий требует дополнительного использования метода виртуальных перемещений, изложенного в [1].

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Феодосьев, В. И.** Сопротивление материалов / В. И. Феодосьев. – М. : Изд-во физ.-мат. лит-ры, 1963. – 297 с.

Объединенный институт машиностроения НАН Беларуси  
Материал поступил 20.04.2010

**D. A. Doubovik**

**The hypothesis of the linear law of distribution of support reactions of wheels of multi-axle wheeled motor vehicles under the action of active forces**

The paper presents the hypothesis of the linear law of distribution of support reactions of wheels of a multi-axle wheeled motor vehicle when active forces are applied to it.