УДК 517.925

О КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ВАЛЛЕ-ПУССЕНА ДЛЯ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА ВТОРОГО ПОРЯДКА

А. И. Кашпар
Белорусско-Российский университет, помощник ректора
В. Н. Лаптинский
доктор физико-математических наук, профессор
Белорусско-Российский университет

Установлена связь конструктивного метода регуляризации краевой задачи Валле-Пуссена для линейного матричного уравнения Ляпунова второго порядка с методом функций Грина. Предложены способы решения матричного интегро-алгебраического уравнения, возникающего при сведении краевой задачи к эквивалентному интегральному уравнению.

Ключевые слова: матричное дифференциальное уравнение, краевая задача.

Введение

В конечномерной банаховой алгебре $\mathcal{B}(n)$ непрерывных матричнозначных функций с нормой $\|\mathbf{X}\|_C = \max_t \|\mathbf{X}(t)\|$ рассмотрим краевую задачу [1–4]

$$\frac{d^2\mathbf{X}}{dt^2} = \mathbf{A}(t)\frac{d\mathbf{X}}{dt} + \frac{d\mathbf{X}}{dt}\mathbf{B}(t) + \lambda(\mathbf{A}_1(t)\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{B}_1(t)) + \lambda(\mathbf{A}_2(t)\frac{d\mathbf{X}}{dt} + \frac{d\mathbf{X}}{dt}\mathbf{B}_2(t)) + \mathbf{F}(t), \quad (1)$$

$$\mathbf{X}(0,\lambda) = \mathbf{M}, \quad (2)$$

$$\mathbf{X}(\omega,\lambda) = \mathbf{N}, \quad (3)$$

где $t \in [0,\omega]$, $\mathbf{F}(t), \mathbf{A}(t), \mathbf{B}(t), \mathbf{A}_i(t), \mathbf{B}_i(t)\ (i = 1, 2)$ – матрицы класса $\mathbb{C}[0,\omega]$ соответствующих размерностей; $\lambda \in \mathbb{R}, \mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $\mathbf{M}, \mathbf{N}$ – заданные вещественные матрицы.

Замечание 1. Рассмотрение уравнения более сложной структуры [5; 6]

$$\frac{d^2\mathbf{X}(t)}{dt^2} = \sum_{i=1}^{p}\mathbf{A}_i(t)\mathbf{X}(t)\mathbf{B}_i(t) + \sum_{i=1}^{q}\mathbf{A}_i(t)\frac{d\mathbf{X}(t)}{dt}\mathbf{B}_i(t) + \mathbf{F}(t)$$

не вносит принципиальных трудностей в анализ с помощью метода [7] краевой задачи типа (1) – (3).

В работе [1] на основе применения метода [7, гл. 1] задача (1) – (3) сведена к эквивалентной системе матричных интегральных уравнений

$$\mathbf{X}(t,\lambda) = \mathbf{M} + \int_0^t \mathbf{Y}(\tau,\lambda)d\tau\,, \quad (4)$$

$$\mathbf{Y}(t,\lambda) = \mathbf{U}(t)\left(\mathbf{\Phi}^{-1}(\mathbf{N}-\mathbf{M})\right)\mathbf{V}(t) +$$

$$+\mathbf{U}(t)\mathbf{\Phi}^{-1}\left(\int_0^{\omega}\mathbf{U}(\tau)\left(\int_{\tau}^{t}\mathbf{U}^{-1}(s)\mathbf{H}(s,\lambda)\mathbf{V}^{-1}(s)ds\right)\mathbf{V}(\tau)d\tau\right)\mathbf{V}(t), \tag{5}$$

где $\mathbf{U}(t), \mathbf{V}(t)$ – интегральные матрицы уравнений соответственно

$$\frac{d\mathbf{U}(t)}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{U}(t), \quad \mathbf{U}(0) = \mathbf{E}_n, \tag{6}$$

$$\frac{d\mathbf{V}(t)}{dt} = \mathbf{V}(t)\mathbf{B}(t), \quad \mathbf{V}(0) = \mathbf{E}_m, \tag{7}$$

$\mathbf{E}_k$ – единичная матрица порядка k, $\mathbf{Y}(t,\lambda) = d\mathbf{X}(t,\lambda)/dt$,

$\mathbf{H}(t,\lambda) = \lambda(\mathbf{A}_1(t)\mathbf{X}(t,\lambda) + \mathbf{X}(t,\lambda)\mathbf{B}_1(t)) + \lambda(\mathbf{A}_2(t)\mathbf{Y}(t,\lambda) + \mathbf{Y}(t,\lambda)\mathbf{B}_2(t)) + \mathbf{F}(t)$,

$\mathbf{\Phi}$ — матричный оператор,

$$\mathbf{\Phi}\mathbf{Z}(t) = \int_0^{\omega}\mathbf{U}(\tau)\mathbf{Z}(t)\mathbf{V}(\tau)d\tau.$$

В дальнейшем для удобства изложения опускаем индексы n, m в матрицах $\mathbf{E}_n, \mathbf{E}_m$.

На основе анализа системы (4), (5) получены коэффициентные достаточные условия ее однозначной разрешимости и выведены конструктивные оценки области локализации решения и его производной.

Важным структурным элементом методики получения системы (4), (5) является использование специального матричного оператора $\mathbf{\Phi}$, при этом методы построения обратного к $\mathbf{\Phi}$ пока не разработаны.

В настоящей работе установлена связь конструктивного метода [7] с методом функций Грина, а также предложены способы построения $\mathbf{\Phi}^{-1}$.

Оператор $\mathbf{\Phi}$ относится к матричным операторам типа [8; 9], возникающим при анализе многоточечных краевых задач для матричных дифференциальных уравнений. Построение обратных для таких операторов является самостоятельной и весьма непростой задачей [8; 9]. В случае двухточечных краевых задач получены различные формулы обращения операторов такого типа, например, [10]. Многоточечный случай мало изучен. Известны, по-видимому, два способа [8; 9]. Один из них основан на чисто алгебраическом подходе, другой – на использовании метода малого параметра.

1. О связи метода регуляризации с методом функций Грина

В [7, гл. 1] установлено, что с помощью конструктивного метода можно строить соответствующие функции Грина для периодических и многоточечных краевых задач. В связи с этим возникает вопрос о связи уравнений (4), (5) с соответствующей эквивалентной системой, полученной по методу функций Грина (см., например, [11, с. 496]).

Используя (5), запишем уравнение (4) в следующем виде:

$$\mathbf{X}(t,\lambda) = \mathbf{M} + \mathbf{P}_{\mathbf{UV}}(t) +$$

$$+\int_0^t\mathbf{U}(\varphi)\mathbf{\Phi}^{-1}\left(\int_0^{\omega}\mathbf{U}(\tau)\left(\int_{\tau}^{\varphi}\mathbf{U}^{-1}(s)\mathbf{H}(s,\lambda)\mathbf{V}^{-1}(s)ds\right)\mathbf{V}(\tau)d\tau\right)\mathbf{V}(\varphi)d\varphi, \tag{8}$$

где $\mathbf{P_{UV}}(t) = \int\limits_0^t \mathbf{U}(\tau)(\mathbf{\Phi}^{-1}(\mathbf{N}-\mathbf{M}))\mathbf{V}(\tau)d\tau.$

Заметим, что функция $\mathbf{P_{UV}}(t)$ удовлетворяет условию $\mathbf{P_{UV}}(\omega) = \mathbf{N}-\mathbf{M}$, поскольку

$$\mathbf{P_{UV}}(\omega) = \int\limits_0^\omega \mathbf{U}(\tau)(\mathbf{\Phi}^{-1}(\mathbf{N}-\mathbf{M}))\mathbf{V}(\tau)d\tau = \mathbf{\Phi}\left(\mathbf{\Phi}^{-1}(\mathbf{N}-\mathbf{M})\right).$$

Далее, используя подходящее разбиение промежутка интегрирования во внутреннем интеграле правой части (8), получим

$$\mathbf{X}(t,\lambda) = \mathbf{M} + \mathbf{P_{UV}}(t) + \mathbf{S}_1(t,\mathbf{H}) + \mathbf{S}_2(t,\mathbf{H}) \equiv \mathbf{M} + \mathbf{P_{UV}}(t) + \mathbf{S_{UV}}(t,\mathbf{H}), \quad (9)$$

где

$$\mathbf{S}_1(t,\mathbf{H}) = -\int\limits_0^t \mathbf{U}(\varphi)\mathbf{\Phi}^{-1}\left(\int\limits_0^\omega \mathbf{U}(\tau)\left(\int\limits_0^\tau \mathbf{U}^{-1}(s)\mathbf{H}(s,\lambda)\mathbf{V}^{-1}(s)ds\right)\mathbf{V}(\tau)d\tau\right)\mathbf{V}(\varphi)d\varphi,$$

$$\mathbf{S}_2(t,\mathbf{H}) = \int\limits_0^t \mathbf{U}(\varphi)\mathbf{\Phi}^{-1}\left(\int\limits_0^\omega \mathbf{U}(\tau)\left(\int\limits_0^\varphi \mathbf{U}^{-1}(s)\mathbf{H}(s,\lambda)\mathbf{V}^{-1}(s)ds\right)\mathbf{V}(\tau)d\tau\right)\mathbf{V}(\varphi)d\varphi,$$

при этом $\mathbf{S}_1(0,\mathbf{H}) = \mathbf{S}_2(0,\mathbf{H}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{S}_1(\omega,\mathbf{H}) + \mathbf{S}_2(\omega,\mathbf{H}) = \mathbf{0}$; последнее равенство вытекает также из эквивалентности системы (4), (5) краевой задаче (1) – (3), а именно: из выполнимости краевых условий (2), (3).

Выражение для $\mathbf{S}_2(t,\mathbf{H})$ можно упростить, используя равенство

$$\mathbf{\Phi}^{-1}\left(\int\limits_0^\omega \mathbf{U}(\tau)\left(\int\limits_0^\varphi \mathbf{U}^{-1}(s)\mathbf{H}(s,\lambda)\mathbf{V}^{-1}(s)ds\right)\mathbf{V}(\tau)d\tau\right) =$$

$$= \mathbf{\Phi}^{-1}\left(\mathbf{\Phi}\left(\int\limits_0^\varphi \mathbf{U}^{-1}(s)\mathbf{H}(s,\lambda)\mathbf{V}^{-1}(s)ds\right)\right) = \int\limits_0^\varphi \mathbf{U}^{-1}(s)\mathbf{H}(s,\lambda)\mathbf{V}^{-1}(s)ds.$$

Тогда

$$\mathbf{S}_2(t,\mathbf{H}) = \int\limits_0^t \mathbf{U}(\varphi)\left(\int\limits_0^\varphi \mathbf{U}^{-1}(s)\mathbf{H}(s,\lambda)\mathbf{V}^{-1}(s)ds\right)\mathbf{V}(\varphi)d\varphi.$$

Аналогичные упрощения выполним в (5):

$$\mathbf{Y}(t,\lambda) = \mathbf{Q_{UV}}(t) + \mathbf{T}_1(t,\mathbf{H}) + \mathbf{T}_2(t,\mathbf{H}) \equiv \mathbf{Q_{UV}}(t) + \mathbf{T}(t,\mathbf{H}), \quad (10)$$

где

$$\mathbf{Q_{UV}}(t) = d\mathbf{P_{UV}}(t)dt = \mathbf{U}(t)\left(\mathbf{\Phi}^{-1}(\mathbf{N}-\mathbf{M})\right)\mathbf{V}(t),$$

$$\mathbf{T}_1(t,\mathbf{H}) = -\mathbf{U}(t)\mathbf{\Phi}^{-1}\left(\int\limits_0^\omega \mathbf{U}(\tau)\left(\int\limits_0^\tau \mathbf{U}^{-1}(s)\mathbf{H}(s,\lambda)\mathbf{V}^{-1}(s)ds\right)\mathbf{V}(\tau)d\tau\right)\mathbf{V}(t),$$

$$\mathbf{T}_2(t,\mathbf{H}) = \mathbf{U}(t)\mathbf{\Phi}^{-1}\left(\int_0^{\omega}\mathbf{U}(\tau)\left(\int_0^{t}\mathbf{U}^{-1}(s)\mathbf{H}(s,\lambda)\mathbf{V}^{-1}(s)ds\right)\mathbf{V}(\tau)d\tau\right)\mathbf{V}(t) =$$

$$= \mathbf{U}(t)\mathbf{\Phi}^{-1}\left(\mathbf{\Phi}\left(\int_0^{t}\mathbf{U}^{-1}(s)\mathbf{H}(s,\lambda)\mathbf{V}^{-1}(s)ds\right)\right)\mathbf{V}(t) = \mathbf{U}(t)\int_0^{t}\mathbf{U}^{-1}(s)\mathbf{H}(s,\lambda)\mathbf{V}^{-1}(s)ds\mathbf{V}(t).$$

Структура правой части (9) соответствует классической форме решения, вытекающей из метода функций Грина, основным приемом которого является отыскание начального значения искомого решения краевой задачи; затем выполняются соответствующие упрощающие выкладки. Воспользуемся этим приемом применительно к задаче (1) – (3).

Полагая в (4) $t = \omega$, получим на основании (3)

$$\int_0^{\omega}\mathbf{Y}(\tau,\lambda)d\tau = \mathbf{N} - \mathbf{M}. \tag{11}$$

Далее, используя принятое обозначение, уравнение (1) запишем в следующем виде:

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{Y} + \mathbf{Y}\mathbf{B}(t) + \mathbf{H}(t,\lambda). \tag{12}$$

На основании двусторонней формулы Коши с учетом (6), (7) имеем

$$\begin{gathered}\mathbf{Y}(t,\lambda) = \mathbf{U}(t)\mathbf{U}^{-1}(\tau)\mathbf{Y}(\tau,\lambda)\mathbf{V}^{-1}(\tau)\mathbf{V}(t) + \\ +\mathbf{U}(t)\left(\int_{\tau}^{t}\mathbf{U}^{-1}(s)\mathbf{H}(s,\lambda)\mathbf{V}^{-1}(s)ds\right)\mathbf{V}(t).\end{gathered} \tag{13}$$

Отсюда находим

$$\mathbf{Y}(\tau,\lambda) = \mathbf{U}(\tau)\mathbf{U}^{-1}(t)\mathbf{Y}(t,\lambda)\mathbf{V}^{-1}(t)\mathbf{V}(\tau) - \mathbf{U}(\tau)\left(\int_{\tau}^{t}\mathbf{U}^{-1}(s)\mathbf{H}(s,\lambda)\mathbf{V}^{-1}(s)ds\right)\mathbf{V}(\tau). \tag{14}$$

Из (14) имеем при $t = 0$

$$\mathbf{Y}(\tau,\lambda) = \mathbf{U}(\tau)\mathbf{Y}(0,\lambda)\mathbf{V}(\tau) + \mathbf{U}(\tau)\left(\int_0^{\tau}\mathbf{U}^{-1}(s)\mathbf{H}(s,\lambda)\mathbf{V}^{-1}(s)ds\right)\mathbf{V}(\tau). \tag{15}$$

Подставляя (15) в (11), получим

$$\int_0^{\omega}\mathbf{U}(\tau)\mathbf{Y}(0,\lambda)\mathbf{V}(\tau)d\tau = \mathbf{N} - \mathbf{M} - \int_0^{\omega}\mathbf{U}(\tau)\left(\int_0^{\tau}\mathbf{U}^{-1}(s)\mathbf{H}(s,\lambda)\mathbf{V}^{-1}(s)ds\right)\mathbf{V}(\tau)d\tau.$$

Отсюда находим

$$\mathbf{Y}(0,\lambda) = \mathbf{\Phi}^{-1}(\mathbf{N} - \mathbf{M}) - \mathbf{\Phi}^{-1}\left(\int_0^{\omega}\mathbf{U}(\tau)\left(\int_0^{\tau}\mathbf{U}^{-1}(s)\mathbf{H}(s,\lambda)\mathbf{V}^{-1}(s)ds\right)\mathbf{V}(\tau)d\tau\right). \tag{16}$$

На основании (16) получим из (13) при $\tau = 0$

$$\mathbf{Y}(t,\lambda) = \mathbf{U}(t)\left(\mathbf{\Phi}^{-1}(\mathbf{N}-\mathbf{M}) - \mathbf{\Phi}^{-1}\left(\int_0^{\omega}\mathbf{U}(\tau)\left(\int_0^{\tau}\mathbf{U}^{-1}(s)\mathbf{H}(s,\lambda)\mathbf{V}^{-1}(s)ds\right)\mathbf{V}(\tau)d\tau\right)\right)\mathbf{V}(t) + \\ +\mathbf{U}(t)\left(\int_0^{t}\mathbf{U}^{-1}(s)\mathbf{H}(s,\lambda)\mathbf{V}^{-1}(s)ds\right)\mathbf{V}(t). \quad (17)$$

Очевидно, соотношение (17) тождественно совпадает с (10).

Подставляя (10) в (4), получим

$$\mathbf{X}(t,\lambda) = \mathbf{M} + \int_0^t \mathbf{U}(\tau)\mathbf{\Phi}^{-1}(\mathbf{N}-\mathbf{M})\mathbf{V}(\tau)d\tau - \\ -\int_0^t \mathbf{U}(\varphi)\left(\mathbf{\Phi}^{-1}\left(\int_0^{\omega}\mathbf{U}(\tau)\left(\int_0^{\tau}\mathbf{U}^{-1}(s)\mathbf{H}(s,\lambda)\mathbf{V}^{-1}(s)ds\right)\mathbf{V}(\tau)d\tau\right)\right)\mathbf{V}(\varphi)d\varphi + \\ +\int_0^t \mathbf{U}(\varphi)\left(\int_0^{\varphi}\mathbf{U}^{-1}(s)\mathbf{H}(s,\lambda)\mathbf{V}^{-1}(s)ds\right)\mathbf{V}(\varphi)d\varphi,$$

тем самым пришли к уравнению (9). Стало быть, принципиальная связь между конструктивным методом [7] и методом функций Грина установлена. Осталось только привести уравнения (8), (9) к стандартной форме для метода функций Грина. Это можно сделать путем дальнейших весьма громоздких выкладок и упрощений. Однако суть этих упрощений более наглядная для односторонних регуляризаций и весьма прозрачна в случае, когда $\mathbf{A}(t) \equiv 0, \mathbf{B}(t) \equiv 0$. Рассмотрим именно этот случай. Тогда $\mathbf{U}(t) \equiv \mathbf{E}_n = \mathbf{E}, \mathbf{V}(t) \equiv \mathbf{E}_m = \mathbf{E}, \mathbf{\Phi Z}(t) = \omega\mathbf{Z}(t), \mathbf{\Phi}^{-1}\mathbf{Z}(t) = \dfrac{1}{\omega}\mathbf{Z}(t)$ и уравнение (10) примет вид

$$\mathbf{Y}(t,\lambda) = \frac{1}{\omega}(\mathbf{N}-\mathbf{M}) - \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega}d\tau\int_0^{\tau}\mathbf{H}(s,\lambda)ds + \int_0^t \mathbf{H}(\tau,\lambda)d\tau = \frac{1}{\omega}(\mathbf{N}-\mathbf{M}) + \\ +\int_0^t \frac{\tau}{\omega}\mathbf{H}(\tau,\lambda)d\tau + \int_t^{\omega}\left(\frac{\tau}{\omega}-1\right)\mathbf{H}(\tau,\lambda)d\tau \equiv \frac{1}{\omega}(\mathbf{N}-\mathbf{M}) + \int_0^{\omega}G'_t(t,\tau)\mathbf{H}(\tau,\lambda)d\tau. \quad (18)$$

Аналогично поступаем с уравнением (9):

$$\mathbf{X}(t,\lambda) = \mathbf{M} + \frac{t}{\omega}(\mathbf{N}-\mathbf{M}) - \frac{t}{\omega}\int_0^{\omega}d\tau\int_0^{\tau}\mathbf{H}(s,\lambda)ds + \int_0^t d\tau\int_0^{\tau}\mathbf{H}(s,\lambda)ds = \mathbf{M} + \frac{t}{\omega}(\mathbf{N}-\mathbf{M}) - \\ -\frac{t}{\omega}\int_0^{\omega}(\omega-\tau)\mathbf{H}(\tau,\lambda)d\tau + \int_0^t (t-\tau)H(\tau,\lambda)d\tau = \mathbf{M} + \frac{t}{\omega}(\mathbf{N}-\mathbf{M}) + \int_0^t \tau\left(\frac{t}{\omega}-1\right)\mathbf{H}(\tau,\lambda)d\tau + \\ +\int_t^{\omega} t\left(\frac{\tau}{\omega}-1\right)\mathbf{H}(\tau,\lambda)d\tau \equiv \mathbf{M} + \frac{t}{\omega}(\mathbf{N}-\mathbf{M}) + \int_0^{\omega}G(t,\tau)\mathbf{H}(\tau,\lambda)d\tau. \quad (19)$$

В уравнениях (18), (19) использована известная функция Грина $G(t,\tau)$ и ее производная $G_t'(t,\tau)$ [11, с. 496]. Запишем их в явном виде

$$G(t,\tau)=\begin{cases}\tau(\dfrac{t}{\omega}-1), & 0\le\tau\le t\le\omega,\\ t(\dfrac{\tau}{\omega}-1), & 0\le t\le\tau\le\omega;\end{cases}\qquad G_t'(t,\tau)=\begin{cases}\dfrac{\tau}{\omega}, & 0\le\tau\le t\le\omega,\\ \dfrac{\tau}{\omega}-1, & 0\le t<\tau\le\omega.\end{cases}$$

Из анализа структуры уравнений (18), (19) видно, что в данном случае между методом регуляризации [7] и методом функций Грина существует тесная связь не только по форме, но и по содержанию. Совпадению форм в общем случае препятствует матричная специфика задачи (1) – (3).

Теперь остается выяснить, какие интегральные уравнения целесообразно использовать для исследования разрешимости и построения решений задачи (1) – (3). Иными словами, какому методу следует отдать предпочтение при изучении этих вопросов. В [7, гл. 1] установлено, что конструктивный метод регуляризации более эффективен при построении решений рассматриваемых там краевых задач. В случае задачи (1) – (3) к этому выводу можно прийти на основе анализа структуры уравнений (4), (5). Из структуры этих уравнений видно, что они удобнее для построения решений, чем уравнения, полученные по методу функций Грина. Это должно проявиться в соответствующих алгоритмах типа [7] построения решения.

Для исследования разрешимости и получения априорных оценок решений, судя по результатам для задач, рассмотренных в [7], предпочтение следует отдать методу функций Грина.

Таким образом, метод [7] приводит к эквивалентным интегральным уравнениям двух типов, на основе которых можно выполнить анализ краевой задачи (1) – (3).

2. Способы построения оператора $\mathbf{\Phi}^{-1}$

Опишем некоторые методы решения относительно $\mathbf{Z}(t)$ соответствующего матричного алгебраического (точнее интегро-алгебраического) уравнения

$$\mathbf{\Phi}\mathbf{Z}(t)=\mathbf{K}(t)$$

или

$$\int_0^{\omega}\mathbf{U}^{-1}(\tau)\mathbf{Z}(t)\mathbf{V}^{-1}(\tau)d\tau=\mathbf{K}(t), \tag{20}$$

где $\mathbf{K}(t)$ – некоторая матрица-функция, играющая роль свободного члена, t – параметр, при этом в (20) будем использовать матрицы $\mathbf{U}^{-1}(\tau)$, $\mathbf{V}^{-1}(\tau)$, определяемые как решения дифференциальных уравнений, получаемых из (6), (7) соответственно,

$$\frac{d\mathbf{U}^{-1}(\tau)}{d\tau}=-\mathbf{U}^{-1}(\tau)\mathbf{A}(\tau), \tag{21}$$

$$\frac{d\mathbf{V}^{-1}(\tau)}{d\tau}=-\mathbf{B}(\tau)\mathbf{V}^{-1}(\tau). \tag{22}$$

При рассмотрении способов построения оператора $\mathbf{\Phi}^{-1}$ возможны три варианта: использование матриц $\mathbf{U}^{-1}(\tau)$, $\mathbf{V}^{-1}(\tau)$ одновременно и по отдельности, т. е. случаи двусторонний и односторонние.

Примем следующие обозначения:

$$\alpha = \max_t \left\|\mathbf{A}(t)\right\|, \beta = \max_t \left\|\mathbf{B}(t)\right\|, \lambda_U = \max_{0\le s\le\tau\le\omega} \left\|\mathbf{U}(\tau)\mathbf{U}^{-1}(s)\right\|, \lambda_V = \max_{0\le s\le\tau\le\omega} \left\|\mathbf{V}^{-1}(s)\mathbf{V}(\tau)\right\|, t\in[0,\omega],$$

$$\lambda_H = \max_t \left\|\mathbf{H}^{-1}(t)\right\|, \quad \gamma_H = \left\|\int_0^\omega \mathbf{H}^{-1}(\tau)d\tau\right\|, \widetilde{\alpha} = \max_t \left\|\mathbf{U}^{-1}(t)\mathbf{A}(t)\right\|, \quad \widetilde{\beta} = \max_t \left\|\mathbf{B}(t)\mathbf{V}^{-1}(t)\right\|,$$

$$p = \frac{1}{2}\left(\widetilde{\alpha} + \widetilde{\beta}\right)\omega + \frac{1}{3}\widetilde{\alpha}\widetilde{\beta}\omega^2, \quad p_U = \frac{1}{2}\gamma_U \lambda_U \widetilde{\beta}\omega^2, \quad p_V = \frac{1}{2}\gamma_V \widetilde{\alpha}\lambda_V \omega^2.$$

Рассмотрим первый вариант. Из (21), (22) имеем соответственно

$$\mathbf{U}^{-1}(\tau) = \mathbf{E} - \int_0^\tau \mathbf{U}^{-1}(s)\mathbf{A}(s)ds, \tag{23}$$

$$\mathbf{V}^{-1}(\tau) = \mathbf{E} - \int_0^\tau \mathbf{B}(s)\mathbf{V}^{-1}(s)ds. \tag{24}$$

Используя (23), (24), запишем левую часть уравнения (20) в следующем виде:

$$\int_0^\omega \left[\mathbf{E} - \int_0^\tau \mathbf{U}^{-1}(s)\mathbf{A}(s)ds\right]\mathbf{Z}(t)\left[\mathbf{E} - \int_0^\tau \mathbf{B}(s)\mathbf{V}^{-1}(s)ds\right]d\tau =$$

$$= \omega\mathbf{Z}(t) - \int_0^\omega d\tau \int_0^\tau \mathbf{U}^{-1}(s)\mathbf{A}(s)ds\mathbf{Z}(t) - \mathbf{Z}(t)\int_0^\omega d\tau \int_0^\tau \mathbf{B}(s)\mathbf{V}^{-1}(s)ds +$$

$$+\int_0^\omega \left(\int_0^\tau \mathbf{U}^{-1}(s)\mathbf{A}(s)ds\right)\mathbf{Z}(t)\left(\int_0^\tau \mathbf{B}(s)\mathbf{V}^{-1}(s)ds\right)d\tau = \omega\mathbf{Z}(t) -$$

$$-\int_0^\omega \left(\omega - \tau\right)\mathbf{U}^{-1}(\tau)\mathbf{A}(\tau)d\tau\mathbf{Z}(t) - \mathbf{Z}(t)\int_0^\omega \left(\omega - \tau\right)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{V}^{-1}(\tau)d\tau +$$

$$+\int_0^\omega \left(\int_0^\tau \mathbf{U}^{-1}(s)\mathbf{A}(s)ds\right)\mathbf{Z}(t)\left(\int_0^\tau \mathbf{B}(s)\mathbf{V}^{-1}(s)ds\right)d\tau. \tag{25}$$

На основании (25) уравнение (20) примет вид

$$\mathbf{Z}(t) = \int_0^\omega \left(1 - \frac{\tau}{\omega}\right)\mathbf{U}^{-1}(\tau)\mathbf{A}(\tau)d\tau\mathbf{Z}(t) + \mathbf{Z}(t)\int_0^\omega \left(1 - \frac{\tau}{\omega}\right)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{V}^{-1}(\tau)d\tau -$$

$$-\frac{1}{\omega}\int_0^\omega \left(\int_0^\tau \mathbf{U}^{-1}(s)\mathbf{A}(s)ds\right)\mathbf{Z}(t)\left(\int_0^\tau \mathbf{B}(s)\mathbf{V}^{-1}(s)ds\right)d\tau + \frac{1}{\omega}\mathbf{K}(t). \tag{26}$$

Запишем уравнение матричное (26) в операторном виде

$$\mathbf{Z} = \mathcal{L}(\mathbf{Z}) + \frac{1}{\omega}\mathbf{K}(t). \tag{27}$$

Для исследования разрешимости уравнения (27) воспользуемся принципом сжимающих отображений (см., например, [12, с. 605]). Очевидно, $\mathcal{L}(\mathbf{Z}) \in \mathbb{R}^{n\times m}$ для всякого $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Выясним вопрос о сжимаемости оператора $\mathcal{L}$.

Для любых $\widetilde{\mathbf{Z}}, \widetilde{\widetilde{\mathbf{Z}}} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ имеем последовательно

$$\left\|\mathcal{L}(\widetilde{\widetilde{\mathbf{Z}}})-\mathcal{L}(\widetilde{\mathbf{Z}})\right\|=\left\|\mathcal{L}(\widetilde{\widetilde{\mathbf{Z}}}-\widetilde{\mathbf{Z}})\right\|\le\left\|\int_0^{\omega}\left(1-\frac{\tau}{\omega}\right)\mathbf{U}^{-1}(\tau)\mathbf{A}(\tau)d\tau(\widetilde{\widetilde{\mathbf{Z}}}(t)-\widetilde{\mathbf{Z}}(t))\right\|+$$

$$+\left\|(\widetilde{\widetilde{\mathbf{Z}}}(t)-\widetilde{\mathbf{Z}}(t))\int_0^{\omega}\left(1-\frac{\tau}{\omega}\right)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{V}^{-1}(\tau)d\tau\right\|+$$

$$+\frac{1}{\omega}\left\|\int_0^{\omega}\left(\int_0^{\tau}\mathbf{U}^{-1}(s)\mathbf{A}(s)ds\right)(\widetilde{\widetilde{\mathbf{Z}}}(t)-\widetilde{\mathbf{Z}}(t))\left(\int_0^{\tau}\mathbf{B}(s)\mathbf{V}^{-1}(s)ds\right)d\tau\right\|\le$$

$$\le\int_0^{\omega}\left(1-\frac{\tau}{\omega}\right)\left\|\mathbf{U}^{-1}(\tau)\mathbf{A}(\tau)\right\|d\tau\left\|\widetilde{\widetilde{\mathbf{Z}}}(t)-\widetilde{\mathbf{Z}}(t)\right\|+\left\|\widetilde{\widetilde{\mathbf{Z}}}(t)-\widetilde{\mathbf{Z}}(t)\right\|\int_0^{\omega}\left(1-\frac{\tau}{\omega}\right)\left\|\mathbf{B}(\tau)\mathbf{U}^{-1}(\tau)\right\|d\tau+$$

$$+\frac{1}{\omega}\int_0^{\omega}\left\|\left(\int_0^{\tau}\mathbf{U}^{-1}(s)\mathbf{A}(s)ds\right)(\widetilde{\widetilde{\mathbf{Z}}}(t)-\widetilde{\mathbf{Z}}(t))\left(\int_0^{\tau}\mathbf{B}(s)\mathbf{V}^{-1}(s)ds\right)\right\|d\tau\le$$

$$\le\int_0^{\omega}\left(1-\frac{\tau}{\omega}\right)\left(\left\|\mathbf{U}^{-1}(\tau)\mathbf{A}(\tau)\right\|+\left\|\mathbf{B}(\tau)\mathbf{V}^{-1}(\tau)\right\|\right)d\tau\left\|\widetilde{\widetilde{\mathbf{Z}}}(t)-\widetilde{\mathbf{Z}}(t)\right\|+$$

$$+\int_0^{\omega}\left\|\int_0^{\tau}\mathbf{U}^{-1}(s)\mathbf{A}(s)ds\right\|\left\|\int_0^{\tau}\mathbf{B}(s)\mathbf{V}^{-1}(s)ds\right\|d\tau\left\|\widetilde{\widetilde{\mathbf{Z}}}(t)-\widetilde{\mathbf{Z}}(t)\right\|=$$

$$=\left\{\int_0^{\omega}\left(1-\frac{\tau}{\omega}\right)\left(\left\|\mathbf{U}^{-1}(\tau)\mathbf{A}(\tau)\right\|+\left\|\mathbf{B}(\tau)\mathbf{V}^{-1}(\tau)\right\|\right)d\tau+\frac{1}{\omega}\int_0^{\omega}\left\|\int_0^{\tau}\mathbf{U}^{-1}(s)\mathbf{A}(s)ds\right\|\left\|\int_0^{\tau}\mathbf{B}(s)\mathbf{V}^{-1}(s)ds\right\|d\tau\right\}\times$$

$$\times\left\|\widetilde{\widetilde{\mathbf{Z}}}(t)-\widetilde{\mathbf{Z}}(t)\right\|\le\int_0^{\omega}\left[\left(\widetilde{\alpha}+\widetilde{\beta}\right)\left(1-\frac{\tau}{\omega}\right)+\widetilde{\alpha}\widetilde{\beta}\tau^2\right]d\tau\left\|\widetilde{\widetilde{\mathbf{Z}}}(t)-\widetilde{\mathbf{Z}}(t)\right\|=$$

$$=\left[\frac{1}{2}\left(\widetilde{\alpha}+\widetilde{\beta}\right)\omega+\frac{1}{3}\widetilde{\alpha}\widetilde{\beta}\omega^2\right]\left\|\widetilde{\widetilde{\mathbf{Z}}}(t)-\widetilde{\mathbf{Z}}(t)\right\|=p\left\|\widetilde{\widetilde{\mathbf{Z}}}(t)-\widetilde{\mathbf{Z}}(t)\right\|. \qquad (28)$$

Согласно принципу сжимающих отображений при выполнении условия

$$\frac{1}{2}\left(\widetilde{\alpha}+\widetilde{\beta}\right)\omega+\frac{1}{3}\widetilde{\alpha}\widetilde{\beta}\omega^2<1 \qquad (29)$$

уравнение (27) имеет единственное решение, стало быть, эквивалентное ему уравнение (20) имеет только одно решение. Это означает, что оператор $\mathbf{\Phi}$ однозначно обратим в случае выполнения (29).

Используя (28), нетрудно получить оценку области локализации решения уравнения (27)

$$\left\|\mathbf{Z}(t)\right\|\le\frac{\left\|\mathbf{K}(t)\right\|}{(1-p)\omega}. \qquad (30)$$

Таким образом, справедлива

Теорема 1. *При выполнении условия (29) решение уравнения (20) существует и единственно, при этом справедлива оценка (30).*

Более простые условия однозначной разрешимости уравнения (20) получаются на основе использования матриц $\mathbf{U}^{-1}(\tau), \mathbf{V}^{-1}(\tau)$ по отдельности, т. е. в односторонних вариантах.

Рассмотрим второй вариант, согласно которому используется только решение уравнения (23). Тогда уравнение (20) примет вид

$$\int_0^{\omega}\left[\mathbf{E}-\int_0^{\tau}\mathbf{U}^{-1}(s)\mathbf{A}(s)ds\right]\mathbf{Z}(t)\mathbf{V}^{-1}(\tau)d\tau=\mathbf{K}(t) \tag{31}$$

или

$$\mathbf{Z}(t)\int_0^{\omega}\mathbf{V}^{-1}(\tau)d\tau=\int_0^{\omega}\left(\int_0^{\tau}\mathbf{U}^{-1}(s)\mathbf{A}(s)ds\right)\mathbf{Z}(t)\mathbf{V}^{-1}(\tau)d\tau+\mathbf{K}(t). \tag{32}$$

Пусть выполнено условие

$$\det\int_0^{\omega}\mathbf{V}^{-1}(\tau)d\tau\neq 0. \tag{33}$$

Тогда уравнение (32) можно записать в следующем виде:

$$\mathbf{Z}(t)=\left(\int_0^{\omega}\left(\int_0^{\tau}\mathbf{U}^{-1}(s)\mathbf{A}(s)ds\right)\mathbf{Z}(t)\mathbf{V}^{-1}(\tau)d\tau+\mathbf{K}(t)\right)\left(\int_0^{\omega}\mathbf{V}^{-1}(\tau)d\tau\right)^{-1}. \tag{34}$$

Очевидно, уравнение (34) эквивалентно уравнению (20).

Для анализа разрешимости уравнения (34) снова воспользуемся принципом сжимающих отображений, рассматривая это уравнение в операторном виде

$$\mathbf{Z}=\mathcal{L}(\mathbf{Z})+\mathbf{K}_{\mathbf{V}}(t), \tag{35}$$

где

$$\mathbf{K}_{\mathbf{V}}(t)=\mathbf{K}(t)\left(\int_0^{\omega}\mathbf{V}^{-1}(\tau)d\tau\right)^{-1}.$$

Очевидно, $\mathcal{L}(\mathbf{Z})\in\mathbb{R}^{n\times m}$ для всякого $\mathbf{Z}\in\mathbb{R}^{n\times m}$. Далее для любых $\tilde{\mathbf{Z}},\tilde{\tilde{\mathbf{Z}}}\in\mathbb{R}^{n\times m}$ получим

$$\left\|\mathcal{L}(\tilde{\tilde{\mathbf{Z}}})-\mathcal{L}(\tilde{\mathbf{Z}})\right\|=\left\|\mathcal{L}(\tilde{\tilde{\mathbf{Z}}}-\tilde{\mathbf{Z}})\right\|=$$

$$=\left\|\int_0^{\omega}\left(\int_0^{\tau}\mathbf{U}^{-1}(s)\mathbf{A}(s)ds\right)(\tilde{\tilde{\mathbf{Z}}}(t)-\tilde{\mathbf{Z}}(t))\mathbf{V}^{-1}(\tau)d\tau\left(\int_0^{\omega}\mathbf{V}^{-1}(\tau)d\tau\right)^{-1}\right\|\leq$$

$$\leq\int_0^{\omega}\left\|\left(\int_0^{\tau}\mathbf{U}^{-1}(s)\mathbf{A}(s)ds\right)(\tilde{\tilde{\mathbf{Z}}}(t)-\tilde{\mathbf{Z}}(t))\mathbf{V}^{-1}(\tau)\right\|d\tau\left\|\left(\int_0^{\omega}\mathbf{V}^{-1}(\tau)d\tau\right)^{-1}\right\|\leq$$

$$\leq\gamma_V\int_0^{\omega}\left(\int_0^{\tau}\left\|\mathbf{U}^{-1}(s)\mathbf{A}(s)\right\|ds\right)\left\|\mathbf{V}^{-1}(\tau)\right\|d\tau\left\|\tilde{\tilde{\mathbf{Z}}}(t)-\tilde{\mathbf{Z}}(t)\right\|\leq\frac{1}{2}\gamma_V\tilde{\alpha}\lambda_V\omega^2\left\|\tilde{\tilde{\mathbf{Z}}}(t)-\tilde{\mathbf{Z}}(t)\right\|=$$

$$=p_V\left\|\tilde{\tilde{\mathbf{Z}}}(t)-\tilde{\mathbf{Z}}(t)\right\|. \tag{36}$$

Согласно принципу сжимающих отображений уравнение (34) (или (35)) однозначно разрешимо, если выполняется условие

$$p_V < 1, \tag{37}$$

при этом имеет место оценка

$$\|\mathbf{Z}(t)\| \le \frac{\|\mathbf{K}_{\mathbf{V}}(t)\|}{1 - p_V}. \tag{38}$$

Оценка (38) получена на основе (34) с использованием условия (37).

Для рассмотренного способа построения решения уравнения (20) справедлива

Теорема 2. *При выполнении условий (33), (37) уравнение (20) однозначно разрешимо, при этом справедлива оценка (38).*

Наконец рассмотрим способ, согласно которому используется решение уравнения (24). Уравнение (20) примет вид

$$\int_0^{\omega} \mathbf{U}^{-1}(\tau)\mathbf{Z}(t)\left[\mathbf{E} - \int_0^{\tau} \mathbf{B}(s)\mathbf{V}^{-1}(s)ds\right]d\tau = \mathbf{K}(t)$$

или

$$\int_0^{\omega} \mathbf{U}^{-1}(\tau)d\tau\mathbf{Z}(t) = \int_0^{\omega} \mathbf{U}^{-1}(\tau)\mathbf{Z}(t)\left(\int_0^{\tau} \mathbf{B}(s)\mathbf{V}^{-1}(s)ds\right)d\tau + \mathbf{K}(t). \tag{39}$$

Пусть выполнено условие

$$\det\int_0^{\omega} \mathbf{U}^{-1}(\tau)d\tau \ne 0. \tag{40}$$

Используя (40), уравнение (39) запишем так:

$$\mathbf{Z}(t) = \left(\int_0^{\omega} \mathbf{U}^{-1}(\tau)d\tau\right)^{-1}\left\{\int_0^{\omega} \mathbf{U}^{-1}(\tau)\mathbf{Z}(t)\left(\int_0^{\tau} \mathbf{B}(s)\mathbf{V}^{-1}(s)ds\right)d\tau + \mathbf{K}(t)\right\}$$

или в операторном виде

$$\mathbf{Z} = \mathcal{L}(\mathbf{Z}) + \mathbf{K}_{\mathbf{U}}(t), \tag{41}$$

где

$$\mathbf{K}_{\mathbf{U}}(t) = \left(\int_0^{\omega} \mathbf{U}^{-1}(\tau)d\tau\right)^{-1}\mathbf{K}(t).$$

Можно установить, что уравнение (41) эквивалентно уравнению (20).

Уравнение (41) по структуре аналогично уравнению (35), при этом $\mathcal{L}(\mathbf{Z}) \in \mathbb{R}^{n\times m}$ для всякого $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Далее поступаем так же, как и во втором случае, то есть изучим вопрос о сжимаемости оператора $\mathcal{L}$. Для этого выполним оценки типа (36)

$$\left\|\mathcal{L}(\tilde{\tilde{\mathbf{Z}}}) - \mathcal{L}(\tilde{\mathbf{Z}})\right\| = \left\|\left(\int_0^{\omega} \mathbf{U}^{-1}(\tau)d\tau\right)^{-1}\left\{\int_0^{\omega} \mathbf{U}^{-1}(\tau)(\tilde{\tilde{\mathbf{Z}}}(t) - \tilde{\mathbf{Z}}(t))\left(\int_0^{\tau} \mathbf{B}(s)\mathbf{V}^{-1}(s)ds\right)d\tau\right\}\right\| \le$$

$$\le \left\|\left(\int_0^{\omega} \mathbf{U}^{-1}(\tau)d\tau\right)^{-1}\right\|\left\|\int_0^{\omega} \mathbf{U}^{-1}(\tau)(\tilde{\tilde{\mathbf{Z}}}(t) - \tilde{\mathbf{Z}}(t))\left(\int_0^{\tau} \mathbf{B}(s)\mathbf{V}^{-1}(s)ds\right)d\tau\right\| \le$$

$$\le \gamma_U \int_0^{\omega} \left\| \mathbf{U}^{-1}(\tau)(\widetilde{\widetilde{\mathbf{Z}}}(t) - \widetilde{\mathbf{Z}}(t)) \left(\int_0^{\tau} \mathbf{B}(s)\mathbf{V}^{-1}(s)ds \right) \right\| d\tau \le$$

$$\le \gamma_U \int_0^{\omega} \left\| \mathbf{U}^{-1}(\tau) \right\| \left(\int_0^{\tau} \left\| \mathbf{B}(s)\mathbf{V}^{-1}(s) \right\| ds \right) d\tau \left\| \widetilde{\widetilde{\mathbf{Z}}}(t) - \widetilde{\mathbf{Z}}(t) \right\| \le$$

$$\le \frac{1}{2}\gamma_U \lambda_U \widetilde{\beta}\omega^2 \left\| \widetilde{\widetilde{\mathbf{Z}}}(t) - \widetilde{\mathbf{Z}}(t) \right\| = p_U \left\| \widetilde{\widetilde{\mathbf{Z}}}(t) - \widetilde{\mathbf{Z}}(t) \right\|. \tag{42}$$

Согласно принципу сжимающих отображений уравнение (41) однозначно разрешимо, если выполняется соотношение

$$p_U < 1. \tag{43}$$

На основе (41), с использованием (42), нетрудно получить оценку

$$\left\| \mathbf{Z}(t) \right\| \le \frac{\left\| \mathbf{K}_{\mathbf{U}}(t) \right\|}{1 - p_U}. \tag{44}$$

Стало быть, для этого способа решения уравнения (20) справедлива

Теорема 3. *При выполнении условий (40), (43) уравнение (20) однозначно разрешимо, при этом справедлива оценка (44).*

Замечание 2. Для построения приближенных решений уравнений (26), (34), (41) может быть использован классический метод последовательных приближений (см., например, [12, с. 605]).

Замечание 3. Вместо условий (37), (43) можно принять следующие условия соответственно:

$$\frac{1}{2}\gamma_V \alpha \lambda_U \lambda_V \omega^2 < 1; \quad \frac{1}{2}\gamma_U \beta \lambda_U \lambda_V \omega^2 < 1. \tag{45}$$

Если же воспользоваться известными оценками (в подходящей норме, см., например, [13, с. 75]), то $\left\| \mathbf{U}^{-1}(t) \right\| \le e^{\alpha\omega}$, $\left\| \mathbf{V}^{-1}(t) \right\| \le e^{\beta\omega}$ и условия (37), (43) можно заменить на коэффициентные условия соответственно

$$\frac{1}{2}\gamma_V \alpha e^{(\alpha+\beta)\omega}\omega^2 < 1; \quad \frac{1}{2}\gamma_U \beta e^{(\alpha+\beta)\omega}\omega^2 < 1. \tag{46}$$

Условия (45), (46), очевидно, грубее условий (37), (43), но гораздо удобнее для применений.

Замечание 4. Из анализа соотношений (30), (38), (44) видно, что величины $\dfrac{1}{\omega(1-p)}, \dfrac{\gamma_V}{1-p_U}, \dfrac{\gamma_U}{1-p_V}$ представляют собой оценки нормы оператора $\mathbf{\Phi}^{-1}$, которые дают рассмотренные способы решения уравнения (20).

Заключение

Результаты работы заключаются в следующем:

– схематично описан метод редукции рассмотренной задачи Валле-Пуссена к эквивалентной системе интегральных уравнений;

– установлена связь используемого метода с классическим методом функций Грина;

– предложены способы обращения оператора, возникающего при сведении краевой задачи к эквивалентной интегральной задаче.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. ***Лаптинский, В. Н.*** Конструктивный анализ краевой задачи Валле-Пуссена для линейного матричного уравнения Ляпунова второго порядка Часть I. / В. Н. Лаптинский, А. И. Кашпар. – Могилев : Белорус.-Рос. ун-т, 2015. – 40 с. – (Препринт / Ин-т технол. металлов НАН Беларуси; № 39).

2. ***Кашпар, А. И.*** Исследование разрешимости краевой задачи Валле-Пуссена для линейного матричного уравнения Ляпунова второго порядка / А. И. Кашпар, В. Н. Лаптинский // Веснік МДУ імя А. А. Куляшова. Сер. B. Прыродазнаўчыя навукі (матэматыка, фізіка, біялогія). – 2016. – № 2. – С. 17–29.

3. ***Кашпар, А. И.*** О построении решения краевой задачи Валле-Пуссена для линейного матричного уравнения Ляпунова второго порядка / А. И. Кашпар // Веснік МДУ імя А. А. Куляшова. Сер. B. Прыродазнаўчыя навукі (матэматыка, фізіка, біялогія). – 2018.– № 2. – С. 45–54.

4. ***Кашпар, А. И.*** О разрешимости и построении решения задачи Валле-Пуссена для матричного уравнения Ляпунова второго порядка с параметром / А. И. Кашпар, В. Н. Лаптинский // Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фіз.-матэм. навук. – 2019. – Т. 55, № 1. – С. 50–61.

5. ***Деревенский, В. П.*** Матричные двусторонние линейные дифференциальные уравнения / В. П. Деревенский // Матем. заметки. – 1994. – Т. 55, вып. 1. – С. 35–42.

6. ***Деревенский, В. П.*** Матричные линейные дифференциальные уравнения высших порядков / В. П. Деревенский // Дифференц. уравнения – 1993. – Т.29, № 4. – С.711–714.

7. ***Лаптинский, В. Н.*** Конструктивный анализ управляемых колебательных систем / В. Н. Лаптинский. – Минск : ИМ НАН Беларуси, 1998. – 300 с.

8. ***Murty, K. N.*** Two (multi) point nonlinear Lyapunov systems – existence and uniqueness / K. N Murty, G. W. Howell, S. Sivasundaram // Journal of mathematical analysis and applications. – 1992. – Vol. 167. – P. 505–515.

9. ***Murty, K. N.*** Two (multi) point nonlinear Lyapunov systems associated with an nth order nonlinear system of differential equations – existence and uniqueness / K. N. Murty, G. W. Howell, G.V.R.L. Sarma // Mathem. Probl. in Engineering – 2000. – Vol. 6. – P. 395–410.

10. ***Гантмахер, Ф. Р.*** Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – М. : Наука, 1967. – 576 с.

11. ***Хартман, Ф.*** Обыкновенные дифференциальные уравнения / Ф. Хартман. – М. : Мир, 1970. – 720 с.

12. ***Канторович, Л. В.*** Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. – М. : Наука, 1977. – 744 с.

13. ***Демидович, Б. П.*** Лекции по математической теории устойчивости / Б. П. Демидович. – М. : Наука, 1967. – 472 с.

Поступила в редакцию 24.05.2021 г.
Контакты: alex.kashpar@tut.by (Кашпар Александр Иванович)

Kashpar A., Laptinskiy V. ON THE BOUNDARY VALUE PROBLEM OF DE LA VALLEE POUSSIN FOR THE LYAPUNOV'S SECOND-ORDER MATRIX EQUATION.

The connection is established between the constructive method of regularization of de la Vallée-Poussin boundary value problem for the Lyapunov's second-order linear matrix equation with the method of Green's functions. The methods for solving a matrix integro-algebraic equation arising when reducing a boundary value problem to an equivalent integral equation are proposed.

Keywords: matrix differential equation, boundary value problem.