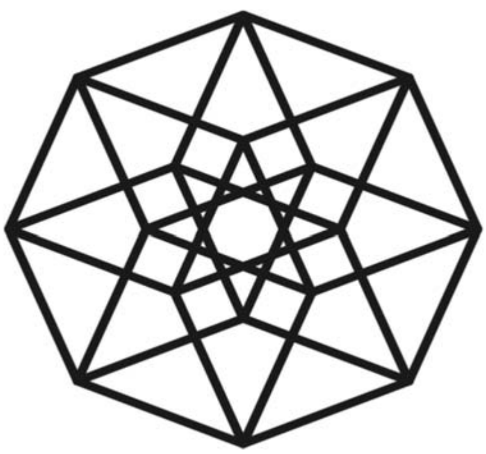
МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Высшая математика»

ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОЕКТНЫХ РЕШЕНИЙ

Методические рекомендации к лабораторным работам для студентов специальности 1-40 05 01 «Информационные системы и технологии (по направлениям)» дневной и заочной форм обучения

Часть 1



Могилев 2022

УДК 519.6
ББК 22.19
О-62

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Высшая математика» «30» декабря 2021 г., протокол № 4

Составители: ст. преподаватель А. Н. Бондарев;
ст. преподаватель А. М. Бутома;
ст. преподаватель А. Г. Козлов;
доц. Д. В. Роголев

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доц. И. И. Маковецкий

Методические рекомендации к лабораторным работам по дисциплине «Оптимизация проектных решений» предназначены для студентов специальности 1-40 05 01 «Информационные системы и технологии (по направлениям)» дневной и заочной форм обучения.

Учебно-методическое издание

ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОЕКТНЫХ РЕШЕНИЙ

Часть 1

Ответственный за выпуск В. Г. Замураев

Корректор Т. А. Рыжикова

Компьютерная вёрстка Е. В. Ковалевская

Подписано в печать . Формат 60 × 84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 56 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.

Содержание

Требования к составлению отчётов

Отчёты к лабораторным работам оформляются с использованием текстовых редакторов (LibreOffice и т. п.) и должны включать следующее:

– название и цель работы;
– постановку задачи для своего варианта;
– выведенные вспомогательные формулы и (или) функции;
– таблицы с результатами расчётов;
– анализ полученных результатов и выводы.

1 Лабораторная работа № 1. Задача оптимального выбора. Параметрическая оптимизация

Цель работы: изучение этапов формализации задач и построения оптимизационных моделей.

1 Постановка задачи.

Предприятие выпускает продукцию двух видов: P_1 и P_2. При этом используется два вида ресурсов: R_1 и R_2. На производство единицы продукции P_1 требуется a_1 единиц ресурса R_1 и b_1 единиц ресурса R_2. На производство единицы продукции P_2 требуется a_2 и b_2 единиц тех же ресурсов. Объём ресурсов R_1 и R_2 составляет соответственно c_1 и c_2 единиц. Прибыль от реализации единиц продукции P_1 и P_2 составляет соответственно d_1 и d_2 денежных единиц. Требуется:

– составить математическую модель задачи по показателю эффективности – прибыли от реализации продукции;
– построить графически множество допустимых значений D.

2 Теоретические сведения.

При решении различных задач важным является этап формализации задачи, когда составляется её математическая модель и выбирается критерий, по которому производится оптимизация.

В процессе проектирования обычно ставится задача определения наилучших, в некотором смысле, значений параметров или структуры объектов. Такая задача называется ***оптимизационной***. Если оптимизация связана с расчётом оптимальных значений параметров при заданной структуре объекта, то она называется ***параметрической оптимизацией***. Задача выбора оптимальной структуры является ***структурной оптимизацией***.

Стандартная математическая задача оптимизации формулируется следующим образом: среди элементов $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, образующих множество допустимых значений D, найти такой элемент X^*, который доставляет экстремальное значение $f(X^*)$ заданной целевой функции $f(X)$.

Для того чтобы поставить задачу оптимизации, необходимо задать:

1) допустимое множество – множество $D = \left\{ X \mid g_i(X) \le 0,\ i = \overline{1, m} \right\} \subset \mathbb{R}^n$, где $g_i(X)$ – заданные функции;

2) целевую функцию – отображение $f : D \to \mathbb{R}$;

3) критерий поиска – $\max$ или $\min$.

3 Варианты заданий.

Варианты заданий к лабораторной работе № 1 представлены в таблице 1.1.

Таблица 1.1

Вариант	a_1	a_2	b_1	b_2	c_1	c_2	d_1	d_2
1	4	2	1	2	16	10	2	2
2	8	5	2	5	60	20	2	3
3	3	7	9	7	42	84	3	3
4	2	5	7	5	30	55	3	4
5	4	6	8	6	48	90	4	4
6	3	4	9	4	28	52	3	2
7	6	7	9	7	63	75	5	3
8	2	3	6	3	18	30	2	2
9	3	7	8	7	35	84	4	3
10	3	5	6	5	25	40	2	2
11	6	4	2	4	40	24	3	2
12	3	3	9	3	24	42	2	1
13	6	4	2	4	44	28	4	4
14	1	3	7	3	21	39	3	2
15	3	5	9	5	25	55	2	2
16	7	4	3	4	48	32	3	3
17	4	6	8	6	72	96	5	5
18	7	5	3	5	70	50	4	4
19	9	6	4	6	90	60	4	3
20	2	4	7	4	32	52	3	2

Контрольные вопросы

1 Какая задача называется оптимизационной?

2 Какая оптимизация называется параметрической?

3 Что такое целевая функция?

4 Что такое множество допустимых значений?

2 Лабораторная работа № 2. Аналитические и имитационные модели

Цель работы: изучение этапов аппроксимации таблично заданной функции методом наименьших квадратов.

1 Постановка задачи.

Заменить таблично заданную функцию многочленом второй степени.

2 Теоретические сведения.

Одним из наиболее универсальных видов моделирования является математическое, которое ставит в соответствие моделируемому процессу систему математических соотношений, решение которой позволяет получить ответ на вопрос о поведении объекта без создания физической модели.

Математическая модель является приближенным представлением реальных объектов, процессов или систем, выраженным в математических терминах и сохраняющим существенные черты оригинала. Математические модели в количественной форме с помощью логико-математических конструкций описывают основные свойства объекта, процесса или системы, его параметры, внутренние и внешние связи.

По принципам построения математические модели разделяют на ***аналитические*** и ***имитационные***.

В аналитических моделях процессы функционирования реальных объектов, процессов или систем записываются в виде явных функциональных зависимостей. Аналитическое представление подходит лишь для простых и сильно идеализированных задач и объектов, которые, как правило, имеют мало общего с реальной действительностью, но обладают высокой общностью. По мере усложнения объекта моделирования построение аналитической модели превращается в трудноразрешимую проблему, что приводит к использованию имитационного моделирования.

В имитационном моделировании функционирование объектов, процессов или систем описывается набором алгоритмов. Алгоритмы имитируют реальные элементарные явления, составляющие процесс или систему с сохранением их логической структуры и последовательности протекания во времени. Имитационное моделирование позволяет по исходным данным получить сведения о состояниях процесса или системы в определенные моменты времени.

Одним из простых примеров математического моделирования является ***аппроксимация***, которая позволяет исследовать числовые характеристики и качественные свойства объекта, сводя задачу к изучению более простых или более удобных объектов.

Например, при обработке экспериментальных данных получен ряд значений переменных x и y, однако характер функциональной зависимости между ними остаётся неизвестным. Требуется по полученным данным найти аналитическое выражение зависимости между x и y.

Пусть экспериментальные результаты представлены таблицей или графиком, который напоминает параболу (рисунок 2.1).

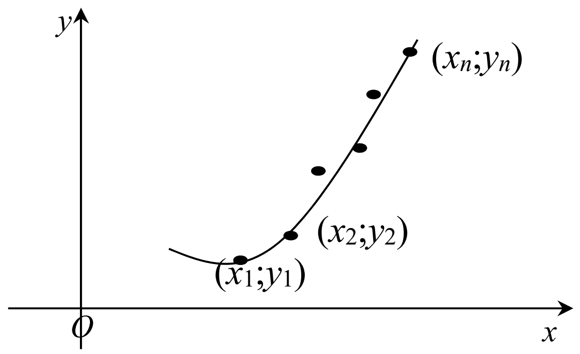


Рисунок 2.1

Запишем эмпирическую зависимость y от x, т. е. уравнение параболы

$$y = ax^2 + bx + c. \tag{2.1}$$

Найдём коэффициенты a, b, c такие, что $y_k \approx ax_k^2 + bx_k + c \ \left(k = \overline{1, n}\right)$.

Возникают невязки (погрешности) $y_k - \left(ax_k^2 + bx_k + c\right)$. Рассмотрим квадраты невязок $\left(y_k - ax_k^2 - bx_k - c\right)^2$ и сумму квадратов невязок

$$S\left(a,b,c\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(y_k - ax_k^2 - bx_k - c\right)^2. \tag{2.2}$$

Подберём коэффициенты a, b, c так, чтобы сумма квадратов невязок оказалась минимальной, т. е. функция (2.2) приняла наименьшее значение. В этом заключается суть ***метода наименьших квадратов*** при построении эмпирических формул.

Стационарную точку функции $S\left(a,b,c\right)$ найдём из необходимого условия экстремума:

$$\begin{cases} S'_a = 0, \\ S'_b = 0, \\ S'_c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n} 2\left(y_k - ax_k^2 - bx_k - c\right)\cdot\left(-x_k^2\right) = 0, \\ \sum\limits_{k=1}^{n} 2\left(y_k - ax_k^2 - bx_k - c\right)\cdot\left(-x_k\right) = 0, \\ \sum\limits_{k=1}^{n} 2\left(y_k - ax_k^2 - bx_k - c\right)\cdot\left(-1\right) = 0. \end{cases}$$

Запишем последнюю систему уравнений следующим образом:

$$\begin{cases} a\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}x_k^4+b\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}x_k^3+c\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}x_k^2=\sum\limits_{k=1}^{n}y_k\cdot x_k^2, \\ a\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}x_k^3+b\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}x_k^2+c\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}x_k=\sum\limits_{k=1}^{n}y_k\cdot x_k, \\ a\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}x_k^2+b\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}x_k+c\cdot n=\sum\limits_{k=1}^{n}y_k. \end{cases} \qquad (2.3)$$

Решив СЛАУ (2.3) методом Гаусса, найдём стационарную точку (a,b,c), в которой функция (2.2) принимает наименьшее значение. Подставив найденные значения a, b, c в (2.1), получим искомую эмпирическую формулу.

3 Варианты заданий.

Варианты заданий к лабораторной работе № 2 представлены в таблице 2.1.

Таблица 2.1

x_k	Номер варианта									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0,1	2,05	2,09	2,02	1,99	2,23	2,07	–0,10	–0,16	2,09	2,15
0,2	1,94	2,05	1,98	2,03	2,29	2,17	–0,21	0,01	2,31	2,41
0,3	1,92	2,19	1,67	2,2	2,27	2,21	0,01	0,1	2,72	2,58
0,4	1,87	2,18	1,65	2,39	2,62	2,31	0,05	0,16	2,77	2,84
0,5	1,77	2,17	1,57	2,19	2,72	2,1	–0,13	0,05	2,78	3,28
0,6	1,88	2,27	1,42	2,61	2,82	2,09	–0,23	0,35	2,97	3,46
0,7	1,71	2,58	1,37	2,35	3,13	2,12	–0,21	0,19	3	4,02
0,8	1,6	2,73	1,07	2,6	3,49	1,63	–0,43	0,5	3,51	4,11
0,9	1,56	2,82	0,85	2,55	3,82	1,78	–0,57	0,74	3,43	4,61
1	1,4	3,04	0,48	2,49	3,95	1,52	–0,44	1,03	3,58	5,03
1,1	1,5	3,03	0,35	2,5	4,22	1,16	–0,44	1,06	3,59	5,34
1,2	1,26	3,45	–0,30	2,52	4,48	1,07	–0,83	1,49	3,54	5,86
1,3	0,99	3,62	–0,61	2,44	5,06	0,85	–0,78	1,79	3,82	6,33
1,4	0,97	3,85	–1,20	2,35	5,5	0,56	–0,81	2,03	3,9	6,81
1,5	0,91	4,19	–1,39	2,26	5,68	0,1	–1,06	2,22	3,77	7,21
1,6	0,71	4,45	–1,76	2,19	6,19	–0,25	–1,41	2,5	3,81	7,67
1,7	0,43	4,89	–2,28	2,24	6,42	–0,65	–1,40	2,88	4	8,23
1,8	0,54	5,06	–2,81	2,34	7,04	–1,06	–1,70	3,21	3,97	8,68
1,9	0,19	5,63	–3,57	1,96	7,57	–1,66	–1,96	3,63	4,08	9,35
2	0,01	5,91	–4,06	2,19	8,1	–2,01	–1,91	3,9	4,08	9,93

Продолжение таблицы 2.1

x_k	Номер варианта									
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0,1	0,1	0,17	0,8	0,04	0,08	–0,02	0,14	–1,86	–1,65	–1,89
0,2	–0,01	0,07	0,29	0,47	0,14	0,44	0,23	–1,95	–2,00	–2,07
0,3	–0,19	0,17	0,52	0,78	0,37	0,51	0,44	–2,12	–1,87	–2,30
0,4	–0,11	0,05	0,77	1,01	0,36	0,67	0,54	–2,06	–1,89	–2,26
0,5	–0,31	0,12	0,93	1,19	0,44	0,69	0,72	–2,15	–1,75	–2,34
0,6	–0,78	0	1,2	1,6	0,48	1,04	0,76	–2,00	–1,59	–2,66
0,7	–0,64	0,01	1,2	1,93	0,27	1,14	0,37	–2,12	–1,44	–2,88
0,8	–0,85	–0,05	1,35	2,22	0,39	1,37	0,64	–2,31	–1,51	–2,85
0,9	–1,18	–0,21	1,39	2,5	0,5	1,77	0,57	–2,29	–1,00	–3,16
1	–1,39	–0,50	1,48	3,01	0,48	2	0,44	–2,57	–1,17	–3,49
1,1	–1,79	–0,50	1,52	3,22	0,69	2,12	0,41	–2,56	–0,87	–3,88
1,2	–2,02	–0,86	1,71	3,71	0,5	2,47	0,3	–2,86	–0,47	–4,22
1,3	–2,48	–1,24	1,72	4,23	0,31	2,9	–0,01	–2,85	–0,33	–4,45
1,4	–2,90	–1,47	1,87	4,78	0,37	3,5	–0,03	–3,03	–0,01	–4,99
1,5	–3,26	–1,79	1,86	5,27	0,43	3,99	–0,47	–3,25	0,34	–5,36
1,6	–3,91	–2,25	1,89	5,75	0,33	4,06	–0,68	–3,08	0,49	–5,71
1,7	–4,41	–2,55	2,04	6,16	0,31	4,54	–0,93	–3,29	0,81	–6,51
1,8	–4,91	–3,18	1,73	6,76	0,09	4,99	–1,28	–3,67	1,37	–6,76
1,9	–5,30	–3,60	2,04	7,3	0,08	5,36	–1,53	–3,70	1,72	–7,35
2	–6,00	–3,93	2,03	8	0,03	5,99	–1,93	–3,85	2,03	–8,02

Контрольные вопросы

1 Что такое математическое моделирование?
2 Какие модели называют аналитическими?
3 Какие модели называют имитационными?
4 В чём состоит метод наименьших квадратов?
5 Как найти параметры функции в методе наименьших квадратов?

3 Лабораторная работа № 3. Законы распределения случайных величин

Цель работы: изучение этапов статистической обработки данных эксперимента и установления закона распределения случайной величины.

1 Постановка задачи.

В результате проведения эксперимента получена выборка с числовыми данными. По данному статистическому материалу необходимо:

– составить дискретный статистический ряд распределения частот;

– построить полигон частот;

– построить эмпирическую функцию распределения и её график;

– найти несмещённые и состоятельные точечные оценки математического ожидания и дисперсии генеральной совокупности;

– на основании полученных результатов выдвинуть гипотезу о законе распределения генеральной совокупности.

2 Теоретические сведения.

Пусть требуется изучить данную совокупность объектов относительно некоторого признака. Каждый такой признак (или их комбинации) образует случайную величину, за которой производятся наблюдения.

Совокупность всех подлежащих изучению объектов или возможных результатов всех мыслимых наблюдений, производимых в неизменных условиях над одним объектом, называется ***генеральной совокупностью***. Совокупность объектов, случайным образом отобранных из генеральной совокупности, называется ***выборочной совокупностью*** (или ***выборкой***). Число объектов в генеральной или выборочной совокупности называется её объёмом.

Пусть по генеральной совокупности изучается случайная величина X. С этой целью из генеральной совокупности извлечена выборка объёма n. Расположение значений случайной величины X по неубыванию называется ***ранжированием статистических данных***. Полученная таким образом последовательность значений называется ***дискретным вариационным рядом***.

Предположим, что случайная величина X приняла n_1 раз значение x_1, n_2 раз – значение x_2, …, n_k раз – значение x_k; при этом $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$. Значения x_1, x_2, …, x_k называются ***вариантами***. Числа n_1, n_2, …, n_k, показывающие, сколько раз встречаются соответствующие им варианты, называются ***частотами***, а числа $\omega_i = \dfrac{n_i}{n}$ – ***относительными частотами***.

Перечень вариант и соответствующих им частот называется ***статистическим распределением выборки по частотам*** или ***статистическим рядом***. Статистическое распределение записывается в виде таблицы, первая строка которой содержит варианты, а вторая – соответствующие им частоты.

Полигоном частот называют ломаную, отрезки которой соединяют точки с координатами (x_1, n_1), (x_2, n_2), ... , (x_k, n_k). Для построения полигона частот на оси абсцисс откладывают варианты x_i, а на оси ординат – соответствующие им частоты n_i. Затем точки (x_i, n_i) последовательно соединяют отрезками прямых.

Эмпирической функцией распределения называется функция $F^*(x)$, определяющая для каждого значения x относительную частоту события $X < x$. Эмпирическую функцию распределения удобно находить в виде $F^*(x) = \dfrac{n_x}{n}$, где n – объём выборки, n_x – число наблюдений, меньших $x \in \mathbb{R}$.

Несмещённой и состоятельной точечной оценкой математического ожидания $M(X)$ генеральной совокупности является ***выборочная средняя*** $\overline{x}_B$, которая вычисляется по формуле

$$\overline{x}_B = \frac{1}{n} \cdot \left(x_1 \cdot n_1 + x_2 \cdot n_2 + x_3 \cdot n_3 + ... + x_k \cdot n_k \right) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{k} x_i n_i.$$

Несмещённой и состоятельной оценкой дисперсии $D(X)$ генеральной совокупности является ***исправленная выборочная дисперсия*** S^2, которая вычисляется по формуле

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{k} \left(x_i - \overline{x}_B \right)^2 n_i.$$

3 Варианты заданий.

Для формирования выборки выбрать из таблицы 3.1 указанные строки:

1) строки 1–10;
2) строки 2–11;
3) строки 3–12;
4) строки 4–13;
5) строки 5–14;
6) строки 6–15;
7) строки 7–16;
8) строки 8–17;
9) строки 9–18;
10) строки 10–19;
11) строки 11–20;
12) строки 12–21;
13) строки 13–22;
14) строки 14–23;
15) строки 15–24;
16) строки 16–25;
17) строки 17–25;
18) строки 18–27;
19) строки 19–28;
20) строки 20–29.

Таблица 3.1

Номер строки	Экспериментальные данные																			
1	15	19	10	18	11	14	12	11	11	18	19	13	14	19	17	16	13	12	18	13
2	12	13	14	14	19	10	17	18	12	14	17	12	13	18	10	13	14	19	20	13
3	20	14	16	12	20	13	12	15	18	18	15	15	14	20	19	10	12	15	18	15
4	13	16	18	12	12	11	13	17	12	19	11	10	14	11	10	19	16	13	16	15
5	17	19	19	14	14	13	11	19	11	20	16	13	19	16	11	10	10	13	15	15
6	13	14	19	16	10	17	13	16	13	18	14	16	13	18	19	13	10	20	19	19
7	12	12	13	11	16	16	12	11	10	18	10	19	11	10	12	15	17	10	10	16
8	18	13	18	15	14	20	18	13	13	10	14	15	19	19	18	20	12	16	20	12
9	15	11	19	12	12	11	16	11	20	12	17	17	18	20	17	19	12	14	10	16
10	18	16	14	13	12	13	20	11	12	10	15	18	16	20	20	12	14	18	19	13
11	16	14	19	10	20	20	15	13	11	20	12	20	10	19	15	19	14	20	16	16
12	15	13	13	15	14	19	10	16	15	16	20	15	11	13	13	12	19	17	13	10
13	15	18	19	16	18	16	20	10	10	14	16	18	10	16	12	16	15	16	14	10
14	13	16	15	18	10	12	13	16	19	12	10	10	14	20	13	16	17	18	16	12
15	13	17	13	16	11	10	19	10	19	13	13	17	16	16	19	15	15	18	20	12
16	15	17	15	14	18	13	15	11	20	11	11	17	13	19	10	11	10	19	15	19
17	15	13	18	16	13	14	12	14	19	12	17	18	15	19	15	14	19	10	20	12
18	13	19	14	15	18	10	11	18	13	14	12	14	17	15	13	19	14	19	10	19
19	15	14	10	14	19	12	17	12	16	20	19	20	15	13	19	20	19	15	17	12
20	14	13	19	11	14	10	10	18	10	17	19	17	15	13	17	15	13	11	15	17
21	14	18	13	11	14	18	14	16	14	20	17	17	15	19	14	20	18	17	18	11
22	16	20	17	14	11	14	15	17	15	11	20	18	14	17	15	16	14	18	17	10
23	20	15	18	20	12	13	12	15	20	13	14	15	18	13	13	19	16	19	14	16
24	13	18	15	12	18	17	10	19	18	12	15	12	16	17	16	14	13	16	10	14
25	17	11	17	13	17	13	11	20	14	20	20	14	12	17	14	18	11	16	10	14
26	13	20	15	10	18	14	14	12	17	11	17	13	16	19	15	20	20	12	15	18
27	15	11	19	20	18	13	20	10	19	15	20	12	19	14	11	13	20	14	13	11
28	13	13	17	19	13	12	18	13	17	14	17	11	15	17	19	17	16	16	17	20
29	15	11	17	15	14	13	11	18	16	17	15	16	18	20	15	18	16	11	17	17

Контрольные вопросы

1 Что называется генеральной и выборочной совокупностями?
2 Что называется статистическим рядом?
3 Как построить полигон частот?
4 Что называется эмпирической функцией распределения?

4 Лабораторная работа № 4. Линейный поиск

Цель работы: изучение методов одномерной оптимизации.

1 Постановка задачи.

Найти минимум функции $y = f(x)$ на заданном отрезке методом дихотомии с точностью $\varepsilon = 0{,}01$ и методом Фибоначчи при $N = 30$.

2 Теоретические сведения.

Пусть на интервале неопределённости $[a,b]$ функция $y = f(x)$ имеет единственный экстремум, причём слева и справа от экстремума она либо строго убывающая, либо строго возрастающая. Требуется с заданной точностью ε на отрезке $[a,b]$ найти экстремум функции $f(x)$. Такая задача называется ***оптимизацией функции***, а поиск минимума функции называется её ***минимизацией*** (рисунок 4.1).

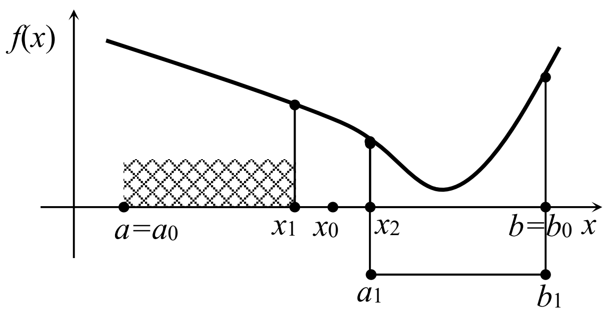


Рисунок 4.1

Простейшим методом одномерной безусловной оптимизации функций является ***метод дихотомии***. Он является методом прямого поиска, в котором при поиске экстремума целевой функции используются только вычисленные значения целевой функции.

Алгоритм метода дихотомии

1 Находим координату центра интервала неопределённости $x_0 = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$.

2 Находим точки, равноотстоящие от x_0 на $\dfrac{\varepsilon}{2}$: $x_1 = x_0 - \dfrac{\varepsilon}{2}$, $x_2 = x_0 + \dfrac{\varepsilon}{2}$.

3 Находим значения функции в точках x_1 и x_2: $y_1 = f(x_1)$ и $y_2 = f(x_2)$. Пусть $y_1 > y_2$.

4 Отбрасываем часть отрезка левее x_2, т. к. там минимума нет, т. е. рассматриваем интервал от $a_1 = x_2$ до $b_1 = b_0$.

5 Повторяем процесс, пока длина интервала $[a_n, b_n]$ больше 2ε.

6 В качестве результата берётся значение $f\left(\dfrac{a_n + b_n}{2}\right)$.

Ещё одним простым методом одномерной безусловной оптимизации функций является ***метод Фибоначчи***. Он относится к симметричным методам, в которых на каждом шаге используются данные, полученные ранее. При этом вычисляется значение целевой функции в двух точках x_1 и x_2, симметричных относительно середины отрезка $\left[a,b\right]$. Далее выбирается один из отрезков $\left[a,x_2\right]$ и $\left[x_1,b\right]$, содержащий вторую точку. Для выбора точки x_1 используются числа Фибоначчи: F_0, F_1, F_2, $F_3,\ldots$, где $F_0=F_1=1$, $F_i=F_{i-2}+F_{i-1}$ $\left(i=2,3,\ldots\right)$.

Точка x_1 определяется из соотношения $\dfrac{x_1-a}{b-a}=\dfrac{F_{N-2}}{F_N}$, где количество чисел N задаётся заранее. Отсюда получаем $x_1=a+\left(b-a\right)\cdot\dfrac{F_{N-2}}{F_N}$. Точка x_1 делит отрезок $\left[a,b\right]$ на две неравные части, при этом отношение меньшей части к большей равно $\dfrac{F_{N-2}}{F_{N-1}}$.

Из условия симметричности точек x_1 и x_2 получаем $x_2=b-\left(b-a\right)\cdot\dfrac{F_{N-2}}{F_N}=a+\left(b-a\right)\cdot\dfrac{F_{N-1}}{F_N}$ и $x_1<x_2$. После сравнения значений $y_1=f\left(x_1\right)$ и $y_2=f\left(x_2\right)$ остаётся отрезок $\left[a,x_2\right]$ с внутренней точкой x_1 или отрезок $\left[x_1,b\right]$ с внутренней точкой x_2. Причём эта точка делит новый отрезок на такие части, что отношение меньшей части к большей равно $\dfrac{F_{N-3}}{F_{N-2}}$.

Таким образом, остающаяся точка каждый раз делит отрезок на части в пропорциях, определяемых числами Фибоначчи. На k-м шаге это отношение есть $\dfrac{F_{N-k-2}}{F_{N-k}}$, а длины меньшей и большей частей соответственно равны $l_k=\dfrac{F_{N-k-1}}{F_N}\cdot\left(b-a\right)$ и $L_k=\dfrac{F_{N-k}}{F_N}\cdot\left(b-a\right)$.

Алгоритм метода Фибоначчи

1 Задаём количество N чисел и малое положительное число δ.

2 Вычисляем числа Фибоначчи F_0, $F_1,\ldots,F_N$.

3 Вычисляем $x_1=a+\left(b-a\right)\cdot\dfrac{F_{N-2}}{F_N}$, $x_2=a+\left(b-a\right)\cdot\dfrac{F_{N-1}}{F_N}$, а затем $y_1=f\left(x_1\right)$, $y_2=f\left(x_2\right)$.

4 Если $y_1\le y_2$, то полагаем $b=x_2$, $x_2=x_1$, $y_2=y_1$ и находим $x_1=a+b-x_2$, $y_1=f\left(x_1\right)$. Если $y_1>y_2$, то полагаем $a=x_1$, $x_1=x_2$, $y_1=y_2$ и находим $x_2=a+b-x_1$, $y_2=f\left(x_2\right)$.

Повторяем 4-й шаг $(N-3)$ раз.

5 Если $y_1 < y_2$, то полагаем $b = x_2$, $x_2 = x_1$, $y_2 = y_1$, иначе $a = x_1$.

6 Вычисляем $x_1 = x_2 - \delta$, $y_1 = f(x_1)$.

7 Находим итоговый отрезок: если $y_1 < y_2$, то $b = x_2$, иначе $a = x_1$.

8 Вычисляем $x_{\min} = \dfrac{a+b}{2}$ и $y_{\min} = f(x_{\min})$.

3 Варианты заданий.

1) $y = 0,95x^2 - 5,225x + 9,36$, $[1;6]$;
2) $y = 1,72x^2 - 6,02x + 6,76$, $[0;5]$;
3) $y = 0,22x^2 - 0,995x + 5,06$, $[1;6]$;
4) $y = 0,79x^2 - 4,661x + 9,88$, $[1;6]$;
5) $y = 0,25x^2 - 1,365x + 5,30$, $[1;6]$;
6) $y = 0,22x^2 - 1,21x + 5,13$, $[1;6]$;
7) $y = 0,85x^2 - 4,148x + 7,71$, $[1;6]$;
8) $y = 2,24x^2 - 7,392x + 8,96$, $[0;5]$;
9) $y = 1,17x^2 - 6,435x + 10,73$, $[1;6]$;
10) $y = 1,36x^2 - 4,488x + 5,82$, $[0;5]$;
11) $y = 0,98x^2 - 5,782x + 10,68$, $[1;6]$;
12) $y = 2,48x^2 - 9,176x + 11,68$, $[0;5]$;
13) $y = 0,53x^2 - 3,763x + 10,13$, $[2;7]$;
14) $y = 0,18x^2 - 0,4x + 2,44$, $[0;5]$;
15) $y = 0,29x^2 - 1,305x + 2,52$, $[1;6]$;
16) $y = 0,22x^2 - 1,474x + 5,79$, $[2;7]$;
17) $y = 0,45x^2 - 4,995x + 15,08$, $[3;8]$;
18) $y = 0,13x^2 - 0,559x + 1,56$, $[1;6]$;
19) $y = 0,16x^2 - 0,4x + 2,62$, $[0;5]$;
20) $y = 0,96x^2 - 6,432x + 12,18$, $[2;7]$.

Контрольные вопросы

1 Что такое минимизация функции?
2 Каким условиям должна удовлетворять минимизируемая функция?
3 В чём заключается метод дихотомии?
4 В чём заключается метод Фибоначчи?

5 Лабораторная работа № 5. Многомерный поиск

Цель работы: изучение методов многомерной оптимизации.

1 Постановка задачи.

Методом наискорейшего спуска найти минимум функции $f(x,y) = x^2 + \mu y^2$ двух переменных с оврагом, пологость которого определяется параметром μ.

При $\mu = 1$ функция $f(x,y)$ есть круговой параболоид. При $\mu > 1$ параболоид становится эллиптическим, «вытягиваясь» вдоль оси *x*, а при $\mu < 1$ – вдоль оси *y*.

2 Теоретические сведения.

2.1 Изучим свойства минимизируемой функции по её графику.

Необходимо провести следующие операции:

а) задать значение параметра μ;

б) задать число точек отсчёта по осям *x*, *y* и пронумеровать эти точки;

в) определить формулу расчёта координат x и y по заданному номеру точек (иными словами, задать величины дискретных отсчётов Δx, Δy между точками);

г) записать формулу функции $f(x,y) = x^2 + \mu y^2$;

д) подготовить матрицу значений функции в точках дискретных отсчётов;

е) вывести трёхмерный график (рисунок 5.1);

ж) преобразовать график в чертёж линий равного уровня (проекций сечений поверхности $f(x,y)$ плоскостями $f(x,y) = \text{const}$) (рисунок 5.2);

з) «поэкспериментировать» с графиком, изменяя μ, убедиться в появлении оврага.

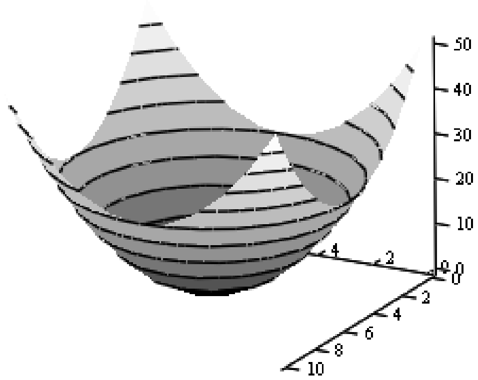


Рисунок 5.1

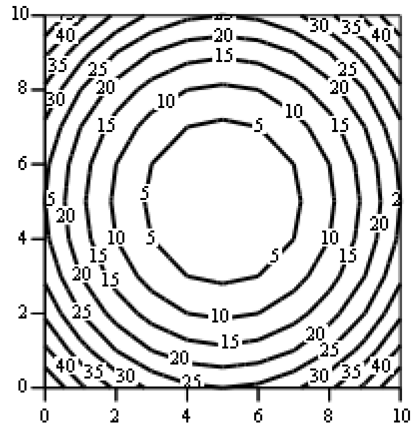


Рисунок 5.2

Проделаем вышеописанные операции, выбрав:

– $\mu = 1$ – значение параметра, определяющего пологость оврага;

– $i = 0\ldots10$ – точки отсчёта по оси x;

– $j = 0\ldots10$ – точки отсчёта по оси y;

– $x_i = -5 + i$, $y_j = -5 + j$ – расчёт координаты x, соответствующей точке i, и координаты y, соответствующей точке j;

– $f(x,y) = x^2 + \mu y^2$ – формула для расчёта квадратической функции;

– $M_{i,j} = f(x_i, y_j)$ – формула для вычисления точек $f(x,y)$ по значениям дискретных аргументов (элементов [*i j*] матрицы *M*).

На каждой линии уровня показаны значения, которые принимает функция. Видно, что линии равного уровня являются ***проекциями сечений*** поверхности $f(x,y)$ плоскостями $f(x,y) = \text{const}$ на плоскость *Oxy*.

2.2 Подготовка данных для алгоритма наискорейшего спуска.

Для алгоритма требуются следующие исходные данные:

а) координаты точки начального приближения $\vec{x}^{(0)} = \left(x^{(0)}; y^{(0)}\right)$;

б) значение минимизируемой функции в этой точке $f\left(x^{(0)}; y^{(0)}\right)$;

в) значение длины шага λ;

г) максимальное число $v_{\max}$ итераций процесса движения к точке минимума.

2.3 Параметры и расчётные формулы для градиентного метода.

$v_{\max} = 20$ – максимальное число итераций процесса движения к минимуму.

$v = 0 \ldots v_{\max}$ – диапазон изменения номера итераций.

$x_0 = 2$, $y_0 = -1$ – начальные значения аргументов x и y.

$f_0 = f\left(x_0, y_0\right)$ – значение минимизируемой функции в начальной точке.

$\lambda_0 = 0{,}3$ – начальное значение шага к экстремуму.

Найдём элементы вектора градиента (частные производные $f(x, y)$):

$g_x\left(x, y\right) = 2x$ – частная производная по x после переобозначения;

$g_y\left(x, y\right) = 2\mu y$ – частная производная по y после переобозначения.

Запишем формулы для определения элементов вектора – единичного шага в сторону, обратную направлению градиента:

а) длина вектора (корень из суммы квадратов его элементов)

$$L\left(x, y\right) = \sqrt{g_x^2\left(x, y\right) + g_y^2\left(x, y\right)};$$

б) проекции $s_x\left(x, y\right)$ и $s_y\left(x, y\right)$ на оси x и y шага единичной длины в направлении, противоположном направлению вектора градиента:

$$s_x\left(x, y\right) = \frac{-g_x\left(x, y\right)}{L\left(x, y\right)};\ s_y\left(x, y\right) = \frac{-g_y\left(x, y\right)}{L\left(x, y\right)}.$$

Формула для зависимости длины шага от номера такта (в первом задании шаг постоянен)

$$\mathrm{Step}\left(v\right) = \alpha \cdot \frac{\lambda_0}{\beta + \gamma \cdot v};\ \lambda\left(x, y\right) = \mathrm{Step}\left(v\right).$$

Для постоянного шага возьмём $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\gamma = 0$.

Определяем вектор начальных значений для итеративной градиентной процедуры. Компоненты вектора:

1) итеративно изменяющееся значение аргумента x;

2) итеративно изменяющееся значение аргумента y;

3) значение минимизируемой функции.

Получим

$$x_0 = x^{(0)},\ y_0 = y^{(0)},\ ff_0 = f\left(x_0, y_0\right).$$

Записываем формулы для изменения компонентов вектора в ходе градиентной процедуры:

$$\begin{bmatrix} x_{(v+1)} \\ y_{(v+1)} \\ ff_{(v+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_v + \lambda\left(x_v, y_v\right) \cdot s_x\left(x_v, y_v\right) \\ y_v + \lambda\left(x_v, y_v\right) \cdot s_y\left(x_v, y_v\right) \\ f\left(x_v + \lambda\left(x_v, y_v\right) \cdot s_x\left(x_v, y_v\right), y_v + \lambda\left(x_v, y_v\right) \cdot s_y\left(x_v, y_v\right)\right) \end{bmatrix}.$$

Выведя значения аргументов и минимизируемой функции, заметим, что начиная с 7-го шага при исходном сочетании параметров ($\mu = 1$, $\lambda = 0{,}3$) имеют место автоколебания (+0,122…–0,147 по оси x, –0,061…+0,073 по оси y и +0,019…+0,027 для $f(x, y)$).

Определим точку минимума:

$$x^* = \frac{0{,}122 - 0{,}147}{2} = -0{,}125\,,\ y^* = \frac{0{,}073 - 0{,}061}{2} = 0{,}006\,,\ f\left(x^*, y^*\right) = 0{,}015661\,.$$

Очевидно, что точное значение минимума функции $f_{\min} = f(0,0) = 0$, поскольку вершина кругового параболоида лежит в точке (0,0).

Рассчитаем амплитуду колебаний по аргументам:

$$\sqrt{(0{,}122 + 0{,}147)^2 + (0{,}061 + 0{,}073)^2} = 0{,}301\,.$$

Как и следовало ожидать, с точностью до вычислительной погрешности значение амплитуды совпадает с величиной шага $\lambda = 0{,}3$.

Выведем графики, показывающие зависимости аргументов x и y (рисунок 5.3) и значений функции $f(x, y)$ (рисунок 5.4) от номера итерации.

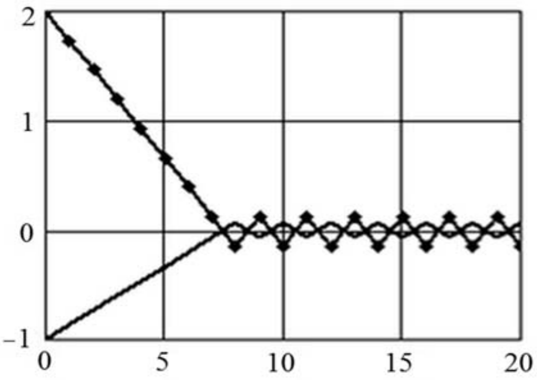


Рисунок 5.3

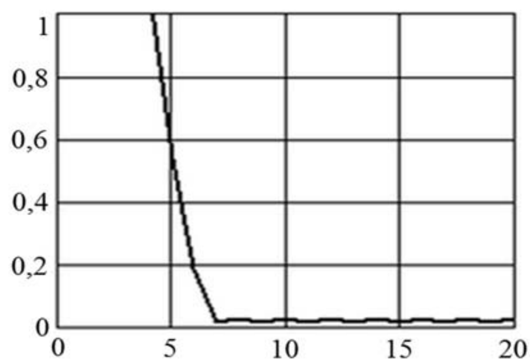


Рисунок 5.4

Графики подтверждают, что в окрестности точки минимума имеют место автоколебания. Их размах точно соответствует длине шага (который в нашем случае выбран постоянным). Движение к минимуму осуществляется по траектории, показанной на рисунке 5.5.

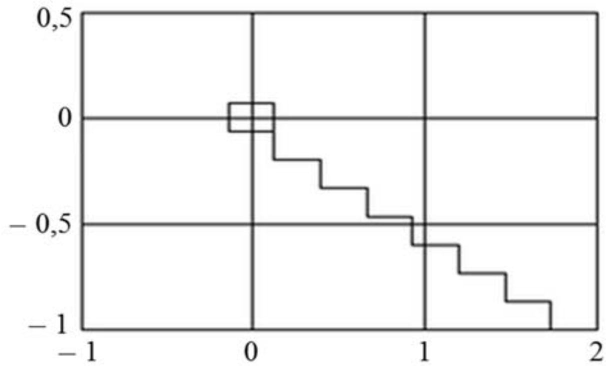


Рисунок 5.5

Рисунок 5.5 также показывает автоколебания в окрестности минимума (0, 0). Будет также заметно, что проекция градиента перпендикулярна линиям уровня функции $f(x, y)$ (в данном примере – эллипсам, эксцентриситет которых зависит от коэффициента μ). Если параболоид круговой (т. е. μ = 1), то амплитуда колебаний по обеим переменным одинакова.

3 Варианты заданий.

1) $f(x_1,x_2)=4(x_1-5)^2+(x_2-6)^2$, $\vec{x}^{(0)}=(0;0)$;
2) $f(x_1,x_2)=2(x_1-4)^2+(x_2-6)^2$, $\vec{x}^{(0)}=(0;0)$;
3) $f(x_1,x_2)=2(x_1-5)^2+(x_2-6)^2$, $\vec{x}^{(0)}=(0;0)$;
4) $f(x_1,x_2)=2(x_1-7)^2+(x_2-6)^2$, $\vec{x}^{(0)}=(0;0)$;
5) $f(x_1,x_2)=3(x_1-5)^2+(x_2-4)^2$, $\vec{x}^{(0)}=(0;0)$;
6) $f(x_1,x_2)=2(x_1-7)^2+(x_2-6)^2$, $\vec{x}^{(0)}=(1;2)$;
7) $f(x_1,x_2)=2(x_1-4)^2+(x_2-6)^2$, $\vec{x}^{(0)}=(7;7)$;
8) $f(x_1,x_2)=3(x_1-5)^2+(x_2-4)^2$, $\vec{x}^{(0)}=(1;1)$;
9) $f(x_1,x_2)=2(x_1-4)^2+(x_2-6)^2$, $\vec{x}^{(0)}=(0;1)$;
10) $f(x_1,x_2)=4(x_1-3)^2+(x_2-6)^2$, $\vec{x}^{(0)}=(0;0)$;
11) $f(x_1,x_2)=2(x_1-2)^2+(x_2-6)^2$, $\vec{x}^{(0)}=(0;0)$;
12) $f(x_1,x_2)=2(x_1-7)^2+(x_2-4)^2$, $\vec{x}^{(0)}=(0;0)$;
13) $f(x_1,x_2)=2(x_1-1)^2+(x_2-6)^2$, $\vec{x}^{(0)}=(0;0)$;
14) $f(x_1,x_2)=3(x_1-5)^2+(x_2-9)^2$, $\vec{x}^{(0)}=(0;4)$;
15) $f(x_1,x_2)=2(x_1-3)^2+(x_2-4)^2$, $\vec{x}^{(0)}=(1;2)$;
16) $f(x_1,x_2)=2(x_1-7)^2+(x_2-1)^2$, $\vec{x}^{(0)}=(0;-7)$;
17) $f(x_1,x_2)=3(x_1-3)^2+(x_2-5)^2$, $\vec{x}^{(0)}=(1;1)$;
18) $f(x_1,x_2)=2(x_1-7)^2+(x_2-7)^2$, $\vec{x}^{(0)}=(0;1)$;
19) $f(x_1,x_2)=4(x_1-4)^2+(x_2-4)^2$, $\vec{x}^{(0)}=(1;2)$;
20) $f(x_1,x_2)=2(x_1-4)^2+(x_2-3)^2$, $\vec{x}^{(0)}=(1;0)$;

Контрольные вопросы

1 Что называется задачей многомерной оптимизации?
2 Что называется линиями уровня функции?
3 Что называется градиентом функции?

6 Лабораторная работа № 6. Метод множителей Лагранжа

Цель работы: изучение метода множителей Лагранжа.

1 Постановка задачи.

Найти минимальное значение функции z при заданных ограничениях методом множителей Лагранжа.

2 Теоретические сведения.

Метод отыскания условного экстремума функции нескольких переменных $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ в задачах с ограничениями в виде равенств при отсутствии требований неотрицательности и целочисленности переменных называется ***методом множителей Лагранжа.***

Пусть все ограничения имеют вид равенств

$$\varphi_j(x_1, x_2, ..., x_n) = b_j, \quad j = \overline{1, m}. \tag{6.1}$$

Преобразуем их к виду $b_j - \varphi_j(x_1, x_2, ..., x_n) = g_j(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$. Будем полагать, что функции $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $g(x_1, x_2, ..., x_n)$ непрерывны и имеют непрерывные частные производные. Объединив функцию $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ с ограничениями, используя неотрицательные постоянные множители $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$, образуем вспомогательную функцию

$$L(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda) = F(x_1, x_2, ..., x_n) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j(x_1, x_2, ..., x_n). \tag{6.2}$$

Справедлива следующая ***теорема***: если функция $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ достигает своего экстремума при условиях (6.1) в точке $\left(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*\right)$, то существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$, что для функции $L(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda)$ в точке $\left(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*\right)$ выполняются необходимые условия безусловного экстремума, т. е.

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0, \quad i = \overline{1, n}. \tag{6.3}$$

Функция $L(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda)$ называется ***функцией Лагранжа***, а числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ – ***неопределенными множителями Лагранжа***.

Таким образом, вычисление условного экстремума функции $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ сводится к отысканию безусловного экстремума функции Лагранжа (6.2). Задача состоит в нахождении $n + m$ неизвестных, включающих n переменных x_i и m множителей Лагранжа. Для их определения используется система из m ограничений и n уравнений (6.3), являющихся условиями экстремума функции Лагранжа.

Обобщением классического метода неопределенных множителей Лагранжа на задачи с ограничениями в виде неравенств вида $g_j(x_1, x_2, ..., x_n) \le 0$ и ограничениями на знак переменных $x_i \ge 0$ является теорема Куна – Таккера.

Пусть имеется следующая задача:

$$\min\left\{F(x_1, x_2, ... x_n) \mid g_j(x_1, x_2, ... x_n) \le 0, x_i \ge 0\right\}, \quad j = \overline{1, m}, i = \overline{1, n}, \tag{6.4}$$

где $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $g_j(x_1, x_2, ..., x_n)$ – выпуклые функции n переменных.

Введем функцию Лагранжа (6.2), используя совокупность неопределенных множителей Лагранжа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$.

Теорема Куна – Таккера: пусть существует вектор $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ такой, что $x_i \ge 0$ и $g_j(x_1, x_2, ..., x_n) \le 0$. Тогда для того, чтобы вектор $x^* = \left(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*\right)$ был оптимальным решением задачи (6.4), необходимо и достаточно, чтобы существовал неотрицательный m-мерный вектор $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m)$ такой, что

$$L(x^*, \lambda) \le L(x^*, \lambda^*) \le L(x, \lambda^*) \quad \forall x \ge 0, \forall \lambda \ge 0. \tag{6.5}$$

Выражение (6.5) означает, что функция L в точке (x^*, λ^*) при фиксированном x^* имеет глобальный максимум в области $\lambda \ge 0$ при $\lambda = \lambda^*$, а при фиксированном λ^* она имеет глобальный минимум в области $x \ge 0$ при $x = x^*$. Экстремальная точка (x^*, λ^*) с такими свойствами называется ***седловой точкой***, а теорему Куна – Таккера часто называют ***теоремой о седловой точке***. Итак, задаче (6.4) минимизации $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ соответствует задача нахождения седловой точки (минимаксная задача) для функции L, в которой из всех ограничений сохраняются только ограничения на знак.

Если $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $g_j(x_1, x_2, ..., x_n)$ являются дифференцируемыми функциями, то условия теоремы Куна – Таккера записываются следующим образом:

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial L}{\partial x_i}\right|_{x^*, \lambda^*} \ge 0, \\ x_i^* \left.\dfrac{\partial L}{\partial x_i}\right|_{x^*, \lambda^*} = 0, \\ x_i^* \ge 0, i = \overline{1, n}, \end{cases} \tag{6.6}$$

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial L}{\partial \lambda_j}\right|_{x^*, \lambda^*} \le 0, \\ \lambda_j^* \left.\dfrac{\partial L}{\partial \lambda_j}\right|_{x^*, \lambda^*} = 0, \\ \lambda_j^* \ge 0, j = \overline{1, m}. \end{cases} \tag{6.7}$$

Для точек, где $x_i > 0$, в точке минимума должно выполняться условие $\left.\frac{\partial L}{\partial x_i}\right|_{x^*, \lambda^*} = 0$, а на границе области, где $x_i = 0$, отклонения от оптимальной точки возможны только в сторону увеличения x_i, при этом $\left.\frac{\partial L}{\partial x_i}\right|_{x^*, \lambda^*} > 0$.

Аналогично по переменной λ для внутренних точек $(\lambda > 0)$ выполняется равенство нулю производной, а для граничных точек $(\lambda = 0)$ первая производная для случая максимума должна быть неположительной, т. е. $\left.\frac{\partial L}{\partial \lambda_j}\right|_{x^*, \lambda^*} < 0$.

Условия (6.6) и (6.7) эквивалентны (6.5), т. е. являются необходимыми и достаточными для оптимальности x^* в случае выпуклости $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ и всех ограничений задачи. Если имеется в виду седловая точка с максимумом по x и минимумом по λ, то знаки неравенств в первых строчках систем (6.6) и (6.7) изменяются на противоположные.

3 Варианты заданий.

1) $z = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}y + 12, \quad x^2 + y^2 - 4x - 8y + 10 > 0$;

2) $z = -\frac{10}{13}x - \frac{15}{13}y + \frac{105}{13}, \quad x^2 + y^2 + 2x + 4y - 8 > 0$;

3) $z = -\frac{20}{17}x - \frac{5}{17}y + \frac{195}{17}, \quad x^2 + y^2 + 10x - 4y + 12 > 0$;

4) $z = -x - \frac{1}{2}y + \frac{17}{2}, \quad x^2 + y^2 - 6x + 2y - 10 > 0$;

5) $z = -\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + \frac{57}{5}, \quad x^2 + y^2 - 10x - 8y + 16 > 0$;

6) $z = -\frac{5}{26}x - \frac{25}{26}y + \frac{145}{13}, \quad x^2 + y^2 + 4x + 12y + 14 > 0$;

7) $z = -\frac{25}{29}x - \frac{10}{29}y + \frac{275}{29}, \quad x^2 + y^2 + 8x - 6y - 4 > 0$;

8) $z = -\frac{25}{34}x - \frac{15}{34}y + \frac{190}{17}, \quad x^2 + y^2 - 12x + 8y + 18 > 0$;

9) $z = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}y + 12, \quad x^2 + y^2 + 4x - 8y + 10 > 0$;

10) $z = -\frac{10}{13}x - \frac{15}{13}y + \frac{105}{13}, \quad x^2 + y^2 - 2x + 4y - 8 > 0$;

11) $z = -\frac{20}{17}x - \frac{5}{17}y + \frac{195}{17}, \quad x^2 + y^2 + 10x + 4y + 12 > 0$;

12) $z = -x - \frac{1}{2}y + \frac{17}{2}, \quad x^2 + y^2 - 6x - 2y - 10 > 0$;

13) $z = -\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + \frac{57}{5}, \quad x^2 + y^2 + 10x - 8y + 16 > 0$;

14) $z = -\frac{5}{26}x - \frac{25}{26}y + \frac{145}{13}, \quad x^2 + y^2 - 4x + 12y + 14 > 0$;

15) $z = -\frac{25}{29}x - \frac{10}{29}y + \frac{275}{29}, \quad x^2 + y^2 + 8x + 6y - 4 > 0$;

16) $z = -\frac{25}{34}x - \frac{15}{34}y + \frac{190}{17}, \quad x^2 + y^2 - 12x - 8y + 18 > 0$;

17) $z = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}y + 12, \quad x^2 + y^2 - 4x + 8y + 10 > 0$;

18) $z = -\frac{10}{13}x - \frac{15}{13}y + \frac{105}{13}, \quad x^2 + y^2 + 2x - 4y - 8 > 0$;

19) $z = -\frac{20}{17}x - \frac{5}{17}y + \frac{195}{17}, \quad x^2 + y^2 - 10x - 4y + 12 > 0$;

20) $z = -x - \frac{1}{2}y + \frac{17}{2}, \quad x^2 + y^2 + 6x + 2y - 10 > 0$.

Контрольные вопросы

1 В чём состоит метод множителей Лагранжа?
2 Как формулируется теорема Куна – Таккера?

7 Лабораторная работа № 7. Модифицированный метод Хука – Дживса

Цель работы: изучение модифицированного метода Хука – Дживса.

1 Постановка задачи.

Найти минимальное значение функции z при заданных ограничениях модифицированным методом Хука – Дживса.

2 Теоретические сведения.

Оригинальный метод Хука – Дживса служит для поиска безусловного локального экстремума функции и относится к прямым методам, т. е. опирается непосредственно на значения функции. Алгоритм делится на две фазы: исследующий поиск и поиск по образцу.

Исследующий поиск. Выбирается некоторая исходная точка x^0. Задается величина шага Δ_i, которая может быть различной для разных координатных направлений и изменяться в процессе поиска. Если значение целевой функции в пробной точке меньше значения целевой функции в исходной точке, то шаг поиска успешный. В противном случае из исходной точки делается шаг в противоположном направлении. После перебора всех n координат исследующий поиск завершается. Полученная точка называется базовой.

Поиск по образцу. Осуществляется шаг из полученной базовой точки вдоль прямой, соединяющей эту точку с предыдущей базовой. Новая точка образца определяется по формуле $x_p^{k+1} = x^k + \left(x^k - x^{k-1}\right)$. Как только движение по образцу не приводит к уменьшению целевой функции, точка x_p^{k+1} фиксируется в качестве временной базовой точки и вновь проводится исследующий поиск. Если в результате получается точка с меньшим значением целевой функции, чем в точке x^k, то она рассматривается как новая базовая точка x^{k+1}. Но если исследующий поиск неудачен, то следует вернуться в точку x^k и провести исследующий поиск с целью выявления нового направления минимизации. В конечном счете возникает ситуация, когда такой поиск не приводит к успеху. В этом случае требуется уменьшить величину шага путем введения некоторого множителя и возобновить исследующий поиск. Поиск завершается, когда величина шага становится достаточно малой.

Схема алгоритма Хука – Дживса

Введём следующие обозначения: x^k – текущая базовая точка, x^{k-1} – предыдущая базовая точка, x_p^{k+1} – точка, построенная при движении по образцу, x^{k+1} – следующая (новая) базовая точка. Критерий остановки: $|\Delta x| \le \varepsilon$.

Шаг 1. Определить начальную точку x^0, приращения Δ_i, коэффициент уменьшения шага $\alpha > 1$, параметр окончания поиска $\varepsilon < 1$.

Шаг 2. Провести исследующий поиск.

Шаг 3. Был ли исследующий поиск удачным (найдена ли точка с меньшим значением целевой функции)?

Да: переход на Шаг 5. Нет: продолжить, т. е. переход на Шаг 4.

Шаг 4. Проверка окончания поиска. Выполняется ли неравенство $|\Delta x| \le \varepsilon$?

Да: окончание поиска, т. е. текущая точка аппроксимирует точку экстремума x^*. Нет: уменьшить приращение: $\frac{\Delta_i}{\alpha}$. Переход на Шаг 2.

Шаг 5. Провести поиск по образцу: $x_p^{k+1} = x^k + \left(x^k - x^{k-1}\right)$.

Шаг 6. Провести исследующий поиск, используя точку x_p^{k+1} в качестве временной базовой точки. Пусть в результате получена точка x^{k+1}.

Шаг 7. Выполняется ли неравенство $f\left(x^{k+1}\right) < f\left(x^k\right)$?

Да: положить $x^{k-1} = x^k$, $x^k = x^{k+1}$. Переход на Шаг 5. Нет: переход на Шаг 4.

Метод Хука – Дживса в задачах условной минимизации можно модифицировать: при решении задачи минимизации надо присвоить целевой функции большое значение там, где нарушаются ограничения. Поиск будет осуществляться снова в допустимой области в направлении к минимальной точке внутри этой области.

3 Варианты заданий.

Смотреть варианты заданий к лабораторной работе № 6.

Контрольные вопросы

1 В чём заключается метод Хука – Дживса?

2 Какие особенности имеет модифицированный метод Хука – Дживса?

8 Лабораторная работа № 8. Метод комплексов (метод Бокса)

Цель работы: изучение метода комплексов (метода Бокса).

1 Постановка задачи.

Найти минимальное значение функции z при заданных ограничениях методом комплексов (метод Бокса).

2 Теоретические сведения.

Метод комплексов (метод Бокса) представляет собой метод прямого поиска в задачах многомерной условной оптимизации. По существу, он является модификацией метода Нелдера – Мида, которая позволяет учитывать ограничения, накладываемые на целевую функцию.

Метод Нелдера – Мида является одним из методов прямого поиска по симплексу в задачах многомерной безусловной оптимизации. Суть его в следующем. В области допустимых значений переменных выбирается начальная точка и оценивается значение целевой функции в определённых точках, окружающих базовую. «Наилучшая» из исследуемых точек принимается начальной на следующем шаге. В качестве точек эксперимента выбираются вершины симплекса. Симплекс в N-мерном пространстве представляет собой многогранник, образованный N+1 равноотстоящими друг от друга точками-вершинами. В случае двух переменных симплексом является равносторонний треугольник, в трёхмерном пространстве симплекс представляет собой треугольную пирамиду.

На рисунке 8.1 в виде равностороннего треугольника с вершинами x^0, x^1 и x^2 приведен симплекс для функции двух переменных.

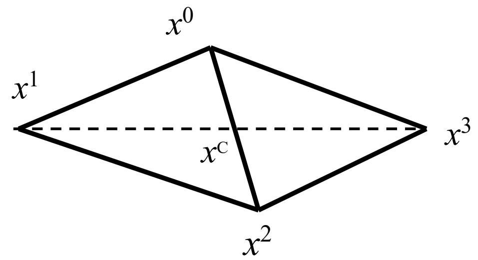


Рисунок 8.1

В каждой из вершин симплекса оценивается значение целевой функции и при поиске минимума определяется вершина, которой соответствует наибольшее значение функции. Пусть это будет вершина x^1. Далее находится середина отрезка x^0x^2 – точка x^C (центр тяжести) и точка x^1 проецируется через неё в новую точку x^3, которая используется в качестве вершины при построении нового симплекса ($x^0x^2x^3$).

Поиск завершается, когда разности между значениями функции в вершинах становятся достаточно малыми или диаметр симплекса становится меньше заданной величины итерационной погрешности по переменным x.

Для построения симплекса, кроме начальной точки, необходимо задать масштабный множитель (коэффициент) α. При $\alpha = 1$ ребра симплекса имеют единичную длину.

В N-мерном пространстве координаты вершин вычисляются по формуле

$$x_i = \begin{cases} x_j^0 + \delta^1, \text{ если } j \neq i, \\ x_j^0 + \delta^2, \text{ если } j = i, \end{cases} \quad i = \overline{1, N}, \quad j = \overline{1, N}.$$

Здесь

$$\delta_1 = \left[\frac{(N+1)^{1/2} + N - 1}{N\sqrt{2}}\right] \cdot \alpha; \qquad \delta_2 = \left[\frac{(N+1)^{1/2} - 1}{N\sqrt{2}}\right] \cdot \alpha.$$

Пусть x^k – точка, подлежащая отражению. Центр тяжести остальных N точек расположен в точке $x_c = \frac{1}{N}\sum_{i}^{N} x_i,\ i \neq k$. Отражение вершины симплекса осуществляется вдоль прямой, проходящей через x^kx^C, и задается формулой

$$x = x^k + \alpha \cdot (x^C - x^k). \tag{8.1}$$

При $\alpha = 0$ получаем исходную точку x^k, при $\alpha = 1$ – центр тяжести x^C. Для того чтобы отражение было симметричным, для получения новой вершины $x_{нов}$ принимают $\alpha = 2$, тогда $x_{нов} = 2x^C - x^k_{пред}$.

Для повышения эффективности метода используется возможность растяжения и сжатия симплекса. При этом в выражении (8.1) Нелдер и Мид рекомендуют использовать $\alpha = 3$ (растяжение) и $\alpha = 1{,}5$ (сжатие).

3 Варианты заданий.

Смотреть варианты заданий к лабораторной работе № 6.

Контрольные вопросы

1 В чём заключается метод Нелдера – Мида?

2 В чём заключается метод комплексов (метод Бокса)?

9 Лабораторная работа № 9. Псевдослучайные числа

Цель работы: изучение возможностей применения псевдослучайных чисел при математическом моделировании.

1 Постановка задачи.

Вычислить приближённо двойной интеграл методом Монте-Карло. Оценить относительную погрешность полученного результата.

2 Теоретические сведения.

Метод Монте-Карло – это численный метод решения математических задач при помощи моделирования случайных величин. В этой работе рассматривается приближённое вычисление двойного интеграла.

Пусть дана функция $z = f(x, y)$, непрерывная в ограниченной замкнутой области D, и требуется вычислить двойной интеграл

$$I = \iint_D f(x, y)dxdy. \tag{9.1}$$

Вычислим приближённо значение интеграла $\iint_D f(x, y)dxdy$, где область D содержится внутри единичного квадрата $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$. Такую область будем называть ***нормированной***.

Воспользуемся генератором псевдослучайных чисел для получения таблицей случайных чисел, равномерно распределённых на отрезке [0;1]. Каждую очередную пару чисел таблицы будем рассматривать как соответствующие координаты x и y случайной точки $M\left(x, y\right)$. Выбрав достаточно большое число N точек $M_1(x_1, y_1),\ M_2(x_2, y_2), \ldots,\ M_N(x_N, y_N)$, проверим, какие из них принадлежат области D и какие не принадлежат. Если область D нормированная и задана неравенствами

$$\begin{cases} \overline{x} \le x \le \overline{\overline{x}}, \\ \overline{y}(x) \le y \le \overline{\overline{y}}(x), \end{cases} \tag{9.2}$$

то для принадлежности случайной точки $M(x, y)$ этой области проверяют выполнение неравенств (9.2).

Практически это удобно делать по схеме, приведённой в таблице 9.1.

Таблица 9.1

x	$\overline{x}$	$\overline{\overline{x}}$	ε_1	y	$\overline{y}(x)$	$\overline{\overline{y}}(x)$	ε_2	ε	z

Здесь $\varepsilon_1 = \begin{cases} 1, \text{если } x \in \left(\overline{x}, \overline{\overline{x}}\right), \\ 0, \text{если } x \notin \left(\overline{x}, \overline{\overline{x}}\right), \end{cases}$ $\varepsilon_2 = \begin{cases} 1, \text{если } y \in \left(\overline{y}(x), \overline{\overline{y}}(x)\right), \\ 0, \text{если } y \notin \left(\overline{y}(x), \overline{\overline{y}}(x)\right), \end{cases}$ и $\varepsilon = \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2$.

Если $\varepsilon = 1$, то $M \in D$, если $\varepsilon = 0$, то $M \notin D$. Заметим, что если $\varepsilon_1 = 0$, то ε_2 можно не подсчитывать; значение $z = f(M)$ подсчитывается только для тех точек *M*, для которых ε_1 и ε_2 равны 1.

Пусть найдены n точек $M_i \in D$ $\left(i = \overline{1,n}\right)$. Приближённо можно считать, что $z_{средн} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} f\left(M_i\right)$. Отсюда искомый интеграл $I \approx z_{средн} \cdot S = \frac{S}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} f\left(M_i\right)$, где S – площадь области интегрирования D. При большом числе точек можно считать $S \approx \frac{n}{N}$. Тогда окончательно $I \approx \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{n} f(M_i)$.

Очевидно, что точность формул повышается при увеличении *N*.

3 Варианты заданий.

1 $\iint\limits_D xy\,dxdy$, где область D ограничена осью Ox и верхней полуокружностью $\left(x - 0,5\right)^2 + y^2 = 0,25$.

2 $\iint\limits_D \sqrt{1 - x}\,dxdy$, где D – треугольник с вершинами O(0;0), A(1;0), B(0;1).

3 $\iint\limits_D x(1 + y)\,dxdy$, где D – треугольник с вершинами O(0;0), A(1;1), B(0;1).

4 $\iint\limits_D \sqrt{x + y}\,dxdy$, где D – треугольник с вершинами O(0;0), A(1;0), B(1;1).

5 $\iint\limits_D \sqrt{x^2 + y}\,dxdy$, где $D: \left\{x = \sqrt{2y},\ x = 1,\ y = 0\right\}$.

6 $\iint\limits_D \frac{1}{(1 + x + y)^2}\,dxdy$, где $D: \left\{x + y \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0\right\}$.

7 $\iint\limits_D \sqrt{x^2 - y^2}\,dxdy$, где D – треугольник с вершинами O(0;0), A(1;0), B(1;1).

8 $\iint\limits_D e^{x+y}\,dxdy$, где $D: \left\{0 \le x \le 0,75,\ 0 \le y \le 1\right\}$.

9 $\iint\limits_D xy^2\,dxdy$, где $D: \left\{y = \sqrt{x},\ x = 1,\ y = 0\right\}$.

10 $\iint\limits_D \sqrt{1 - x^2 - y^2}\,dxdy$, где область D – часть круга радиуса 1 с центром в точке $O\left(0;0\right)$, лежащая в первой четверти.

11 $\iint\limits_D (x^2 + 2y)\,dxdy$, где $D: \left\{x^2 = 2y,\ x = 1,\ y = 0\right\}$.

12 $\iint\limits_D (x^2 y+1)\,dxdy$, где $D:\{0\le x\le 1,\ 0\le y\le 0{,}5\}$.

13 $\iint\limits_D \frac{dxdy}{(x+y)^2}$, где $D:\{0{,}5\le x\le 1,\ 0\le y\le 0{,}5\}$.

14 $\iint\limits_D \ln(1+x^2)\,dxdy$, где $D:\{y=x,\ x=1,\ y=0\}$.

15 $\iint\limits_D \sqrt{1-(x^2+y^2)}\,dxdy$, где область D ограничена частью окружности $x^2+y^2=1$, лежащей в первой четверти.

16 $\iint\limits_D (x^2+y)dxdy$, где $D:\{y=x,\ x=2y,\ x=1\}$.

17 $\iint\limits_D (x^2+y^2)\,dxdy$, где $D:\{y=(x-x^2),\ y=0\}$.

18 $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$, где $D:\{y=0{,}5x^2,\ x=0,\ x=1,\ y=1\}$.

19 $\iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy$, где $D:\{x=y,\ x=1,\ y=0\}$.

20 $\iint\limits_D (x-y+1)\,dxdy$, где D – трапеция: $y=0{,}5x$, $y=1$, $x=0$, $x=1$.

Контрольные вопросы

1 Что такое псевдослучайные числа?
2 В чём заключается метод Монте-Карло?
3 Как повысить точность метода Монте-Карло?

Список литературы

1 **Андронов, С. А.** Методы оптимального проектирования / С. А. Андронов. – Санкт-Петербург: С.-Петерб. ГУАП, 2001. – 169 с.

2 **Банди, Б.** Методы оптимизации: вводный курс / Б. Банди. – Москва: Радио и связь, 1988. – 128 с.

3 **Дворецкий, С. И.** Компьютерное моделирование и оптимизация технологических процессов и оборудования: учебное пособие / С. И. Дворецкий, А. Ф. Егоров, Д. С. Дворецкий. – Тамбов: ТГТУ, 2003. – 224 с.

4 **Калиткин, Н. Н.** Численные методы / Н. Н. Калиткин. – Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2011. – 592 с.

5 **Кузнецов, А. В.** Высшая математика: Математическое программирование / А. В. Кузнецов, В. А. Сакович, Н. И. Холод. – Минск: Вышэйшая школа, 1994. – 286 с.

6 **Мину, М.** Математическое программирование. Теория и алгоритмы / М. Мину. – Москва: Наука, 1990. – 486 с.

7 **Таха, Х. А.** Введение в исследование операций / Х. А. Таха. – Москва: Вильямс, 2005. – 912 с.