

УДК 517.927.4 : 536.24 + 66.015.23

**В. Н. Лаптинский, д-р физ.-мат. наук, проф., А. А. Романенко, канд. физ.-мат. наук, доц.,
В. Ю. Стеценко, канд. техн. наук, Р. В. Коновалов**

РАСЧЕТ ДИНАМИЧЕСКОГО И ТЕПЛООВОГО ПОГРАНИЧНЫХ СЛОЕВ ДЛЯ ОЦЕНКИ ОХЛАЖДАЮЩЕЙ СПОСОБНОСТИ КРИСТАЛЛИЗАТОРОВ

Получено численно-аналитическое решение задачи о динамическом и тепловом пограничных слоях в автомоделном случае. Выполнены расчеты локального коэффициента теплоотдачи от рубашки кристаллизатора к основному потоку охладителя. Проведены экспериментальные исследования охлаждающей способности кристаллизатора для продольного и поперечного течений охладителя.

Введение

Исследования пограничных слоев, начатые Прандтлем в 1904 г., показали, каким образом проявляет себя вязкость при больших числах Рейнольдса и каким путем можно упростить дифференциальные уравнения Навье-Стокса для получения их приближенных решений в случае малой вязкости. Только идея Прандтля о пограничном слое и сделала доступным для теоретического изучения такого рода явления.

Благодаря усилиям многих исследователей к настоящему времени явление пограничного слоя достаточно хорошо изучено (см. [1–10] и приведенную в них библиографию). Разработаны аналитические и численные методы решения соответствующих задач. Однако следует отметить, что для ряда гидродинамических задач, например в задаче об оценке охлаждающей способности кристаллизаторов при непрерывном литье металлов и сплавов, данное явление мало изучено, хотя решение этих задач имеет большое значение для расчета затвердевания отливок. Сейчас такие оценки и расчеты проводятся по сложным численно-полуэмпирическим методикам.

Как показывают исследования, именно пограничный слой охлаждающей жидкости во многом определяет охлаждающую способность кристаллизатора, стабильность и качество литья. Но для изучения влияния этого слоя не-

обходимо разработать конструктивный метод анализа соответствующих математических моделей. Для повышения эффективности исследований следует создать физическую модель кристаллизатора из прозрачных материалов и соответствующую методику проведения модельных исследований. Для струйных кристаллизаторов подобных моделей и методик в мире не существует. Поэтому такие кристаллизаторы необходимо создавать, а также разрабатывать адекватные методики аналитического расчета гидродинамики охлаждения кристаллизатора. Это позволит изучить математическую модель процесса, понять сущность механизма струйного охлаждения и провести оптимизацию конструктивных и технологических параметров с целью создания кристаллизатора с максимальной охлаждающей способностью, что приведет к значительному повышению производительности процесса литья и улучшит качество получаемых заготовок.

Научная идея исследования состоит в развитии методов решения краевых задач [11] и подходов [12–14] применительно к краевым задачам типа Прандтля с последующим применением полученных результатов для расчета толщин гидродинамического и теплового пограничных слоев, а также локального коэффициента теплоотдачи для различных режимов охлаждения кристаллизатора и параметров потока охладителя.

Постановка задачи

Слой, в котором отчетливо проявляется действие вязкости и происходит наиболее существенное изменение скорости по нормали к обтекаемой поверхности, называется гидродинамическим пограничным слоем. Толщина динамического слоя – расстояние δ от обтекаемой поверхности, на котором скорость потока изменяется от скорости движения обтекаемой поверхности до значения, весьма близкого к скорости

обтекающего потока [1–5].

Тепловым пограничным слоем называется пристенная область, в которой существенно проявляются тепловые возмущения. Толщина этого слоя – расстояние δ_T от стенки, на котором температура потока изменяется от $T_{ст}$ до значения, весьма близкого к температуре невозмущенного потока T_∞ [1–5]. Схема динамического и теплового пограничных слоев представлена на рис. 1.

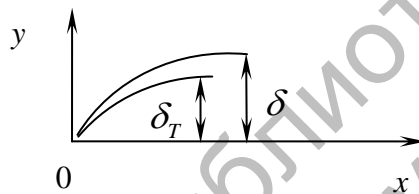


Рис. 1. Схематическое изображение динамического и теплового пограничных слоев

Толщины динамического δ и теплового δ_T пограничных слоев связаны соотношением [1, с. 266]

$$\frac{\delta_T}{\delta} \sim \frac{1}{\sqrt{\text{Pr}}};$$

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{a}.$$

где Pr – безразмерная величина, называемая числом Прандтля; a – коэффициент температуропроводности. Если $\text{Pr} \geq 1$, то $\delta_T \leq \delta$; если $\text{Pr} \leq 1$, то $\delta_T \geq \delta$. Известно, что для воды, как правило, $\text{Pr} \geq 1$. Отметим, что $\text{Pr} \approx 7$ для воды при 20°C . При температурах от 130 до 310°C значения числа Pr для воды изменяются незначительно и близки к единице. Характер зависимости Pr от температуры резко изменяется при давлениях, близких к критическим.

Поскольку число Прандтля выражает отношение способности жидкости переносить количество движения к ее

способности переносить тепло, то ввиду широких пределов изменения Pr для обычных веществ распределения температуры в конкретном течении могут быть весьма различными в зависимости от рабочего тела. Следует отметить, что в турбулентном потоке механизмы переноса тепла и количества движения приблизительно аналогичны, поскольку «турбулентное число Прандтля» (см., например, [1, с. 631; 9, с. 195]) почти всегда близко к единице.

Хотя аналогия между процессами переноса тепла и количества движения обычно не является точной, она всегда достаточно верна, чтобы ее можно было использовать для качественных оценок даже в турбулентном течении, особенно при выборе методов решения уравнений теплообмена. Часто она настолько точна, что безразмерный параметр температуры можно приравнять соответствующему безразмерному параметру скорости, умноженному на «коэффициент аналогии», определяемый на основании эксперимен-

тальных данных [9, с. 23]. В связи с этим широкое применение находят полуэмпирические методы, которые состоят в том, что на основе некоторой модели явления теоретически устанавливается структура (общий вид) зависимости между искомыми параметрами, а входящие в нее константы или вспомогательные функциональные связи определяются экспериментально [8, с. 24].

Таким образом, для качественного анализа процесса теплообмена достаточно рассчитать толщину динамического пограничного слоя с учетом «коэффициента аналогии». Количественное определение толщины теплового пограничного слоя проводится на основе уравнения энергии с учетом решения уравнения движения. Толщина теплового пограничного слоя является оценочной характеристикой эффективности работы кристаллизатора [15].

Преобразованные уравнения переноса количества движения и энергии для плоского ламинарного течения в автомодельном случае имеют вид [5, 9]:

$$f''' + \frac{m+1}{2} f f'' + m(1 - f'^2) = 0; \quad (1)$$

$$g'' + \text{Pr} \left[\frac{m+1}{2} f g' - \gamma f' (g-1) \right] = 0, \quad (2)$$

где $f(\eta)$ – безразмерная функция тока (фактически $f = f(\eta, m)$), $f'(\eta) = df(\eta)/d\eta$; η – безразмерная автомодельная переменная,

$$\eta = y \left(\frac{U(x)}{x \nu} \right)^{\frac{1}{2}}; \quad (3)$$

g – безразмерная температура,

$$g = \frac{T_{\text{ст}} - T}{T_{\text{ст}} - T_{\infty}}. \quad (4)$$

Здесь $U(x) = C x^m$; $T_{\text{ст}}$ – заданная температура стенки; T_{∞} – температура невозмущенного потока; T – температура

в пограничном слое, при этом

$$T_{\text{ст}} = T_{\infty} + a x^{\gamma}; \quad (5)$$

краевые условия имеют вид:

$$f(0) = f'(0) = 0, \quad f'(\infty) = 1; \quad (6)$$

$$g(0) = 0, \quad g(\infty) = 1. \quad (7)$$

Заметим, что значения параметров C, m должны быть согласованы соответствующим образом.

Решение задачи

На основе подхода [11, гл. 1] разработан численно-аналитический метод решения задачи (1), (6). Согласно этому методу решение указанной задачи представимо в виде

$$f(\eta) = \int_0^{\eta} \frac{\int_0^{\tau} e^{-\int_0^{\sigma} \varphi(s) ds} d\sigma}{\int_0^{\infty} e^{-\int_0^{\tau} \varphi(\sigma) d\sigma} d\tau} d\tau, \quad 0 \leq \eta < \infty,$$

где $\varphi(\eta)$ – вспомогательная функция, определяемая как решение задачи

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{d\eta} = \varphi^2 - a\lambda \varphi \int_0^{\eta} \int_0^{\tau} e^{-\int_0^{\sigma} \varphi(s) ds} d\sigma d\tau + \\ + (a-2b)\lambda \int_0^{\eta} e^{-\int_0^{\tau} \varphi(s) ds} d\tau, \\ \varphi(0) = \frac{b}{\lambda}, \end{aligned}$$

при этом значение параметра λ находится из трансцендентного уравнения

$$\lambda \int_0^{\infty} e^{-\int_0^{\tau} \varphi(\sigma) d\sigma} d\tau - 1 = 0;$$

где $a = \frac{m+1}{2}$; $b = m$.

Заметим, что структура решения такова, что оно удовлетворяет краевым условиям (6). С помощью этого метода получены приближенные решения с различной погрешностью (от 2 до 0,1 %). Одно из приближенных решений (до 2 %) имеет вид:

$$f(\eta) = \lambda \int_0^\eta \left(\int_0^\tau \exp \left(- \left(\frac{b \sigma}{\lambda 1!} + \left(\frac{b}{\lambda} \right)^2 \frac{\sigma^2}{2!} + \left(2 \left(\frac{b}{\lambda} \right)^3 + (a-2b)\lambda \frac{\sigma^3}{3!} \right) \right) d\sigma \right) d\tau, \quad (8)$$

где значение параметра λ находится из уравнения

$$\lambda \int_0^\infty \exp \left(- \left(\frac{b \sigma}{\lambda 1!} + \left(\frac{b}{\lambda} \right)^2 \frac{\sigma^2}{2!} + \left(2 \left(\frac{b}{\lambda} \right)^3 + (a-2b)\lambda \frac{\sigma^3}{3!} \right) \right) d\tau - 1 = 0.$$

На основе приближенного решения задачи (1), (6) в случае $T_{cr} = const$ ($\gamma = 0$ в (5)) соответствующее решение задачи (2), (7) получено в виде

$$\vartheta = \frac{\int_0^\eta \exp \left[-Pr \cdot \frac{m+1}{2} G(\xi) \right] d\xi}{\int_0^\infty \exp \left[-Pr \cdot \frac{m+1}{2} G(\xi) \right] d\xi}, \quad (9)$$

где $G(\eta) = \int_0^\eta f(z) dz$.

Функция $G(\eta)$ получена численно и как решение задачи

$$G^{(IV)} + \frac{m+1}{2} G'G''' + m(1-G'^2) = 0;$$

$$G(0) = G'(0) = G''(0) = 0, \quad G''(\infty) = 1,$$

с помощью разработанного численно-

аналитического метода, при этом в качестве функции $f(z)$ можно взять ее приближение (8).

Используя (9), из (4) находим распределение температуры в тепловом пограничном слое, при этом толщина теплового пограничного слоя и локальный коэффициент теплоотдачи от рубашки кристаллизатора к основному потоку охладителя даются соотношениями типа [5, с. 172, 175]

$$\delta_T(x) = \eta_T(m) \left(\frac{xv}{U(x)} \right)^{\frac{1}{2}} = \eta_T(m) \left(\frac{v}{C} \right)^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1-m}{2}}; \quad (10)$$

$$\alpha(x) = k(m) \lambda_0 \left(\frac{U(x)}{xv} \right)^{\frac{1}{2}} = k(m) \lambda_0 \left(\frac{C}{v} \right)^{\frac{1}{2}} x^{\frac{m-1}{2}}, \quad (11)$$

где $\eta_T(m)$ – значение безразмерной переменной η , определяемое на основе значений функции $\vartheta(\eta)$ из (7) с учетом (3) в соответствии с принятой точностью ($\vartheta(\eta_T) = 0,99$); λ_0 – коэффициент теплопроводности охладителя (воды);

$$k(m) = \frac{1}{\int_0^\infty \exp \left[-Pr \cdot \frac{m+1}{2} \int_0^\xi f(z) dz \right] d\xi};$$

фактически $\alpha = \alpha(x, m, \lambda_0, v, C)$.

Замечание – Параметр m связан с углом β потока охладителя соотношением [5, с. 177]

$$m = \frac{\beta}{2\pi - \beta}.$$

Применительно к параметру β

имеем

$$\delta_T(x) = \tilde{\eta}_T(\beta) \left(\frac{\nu}{C}\right)^{\frac{1}{2}} x^{\frac{\pi-\beta}{2\pi-\beta}};$$

$$\alpha(x) = \tilde{k}(\beta) \lambda_0 \left(\frac{C}{\nu}\right)^{\frac{1}{2}} x^{\frac{\beta-\pi}{2\pi-\beta}},$$

где $x > 0$,

$$\tilde{\eta}_T(\beta) = \eta_T \left(\frac{\beta}{2\pi - \beta}\right),$$

$$\tilde{k}(\beta) = k \left(\frac{\beta}{2\pi - \beta}\right) = \frac{1}{\int_0^{\infty} \exp\left[-\frac{\text{Pr} \cdot \pi}{2\pi - \beta} \int_0^{\xi} f(z) dz\right] d\xi}.$$

Ниже приведена табл. 1 значений $\tilde{\eta}_T$, соответствующих различным углам атаки $\varphi = \frac{\beta}{2}$ [9, с. 108] и некоторым характерным значениям $T_{\text{ст}}$.

В качестве примера приведем графики $\delta_T(x)$ при характерных значениях параметров β , C и $T_{\text{ст}}$.

В табл. 2 приведены значения \tilde{k} , соответствующие различным углам атаки φ и некоторым характерным значениям $T_{\text{ст}}$.

В качестве примера приведем графики для $\alpha(x)$ при характерных значениях параметров β , C , $T_{\text{ст}}$ и λ_0 .

Табл. 1. Значения $\tilde{\eta}_T(\beta)$

β/π	$\tilde{\eta}_T (T_{\text{ст}} = 100^\circ\text{C})$	$\tilde{\eta}_T (T_{\text{ст}} = 120^\circ\text{C})$	$\tilde{\eta}_T (T_{\text{ст}} = 140^\circ\text{C})$
0,0	3,900	4,285	4,895
0,1	3,755	4,040	4,630
0,2	3,560	3,840	4,410
0,3	3,395	3,660	4,215
0,4	3,240	3,500	4,035
0,5	3,095	3,345	3,865
0,6	2,955	3,200	3,700
0,7	2,820	3,055	3,535
0,8	2,690	2,910	3,370
0,9	2,555	2,765	3,210
1,0	2,420	2,620	3,040

Табл. 2. Значения $\tilde{k}(\beta)$

β/π	$\tilde{k} (T_{\text{ст}} = 100^\circ\text{C})$	$\tilde{k} (T_{\text{ст}} = 120^\circ\text{C})$	$\tilde{k} (T_{\text{ст}} = 140^\circ\text{C})$
0,0	0,4033	0,3770	0,3332
0,1	0,4345	0,4056	0,3574
0,2	0,4624	0,4311	0,3791
0,3	0,4889	0,4555	0,3998
0,4	0,5152	0,4797	0,4205
0,5	0,5420	0,5044	0,4416
0,6	0,5700	0,5301	0,4638
0,7	0,5998	0,5576	0,4874
0,8	0,6320	0,5873	0,5129
0,9	0,6674	0,6199	0,5411
1,0	0,7070	0,6565	0,5726

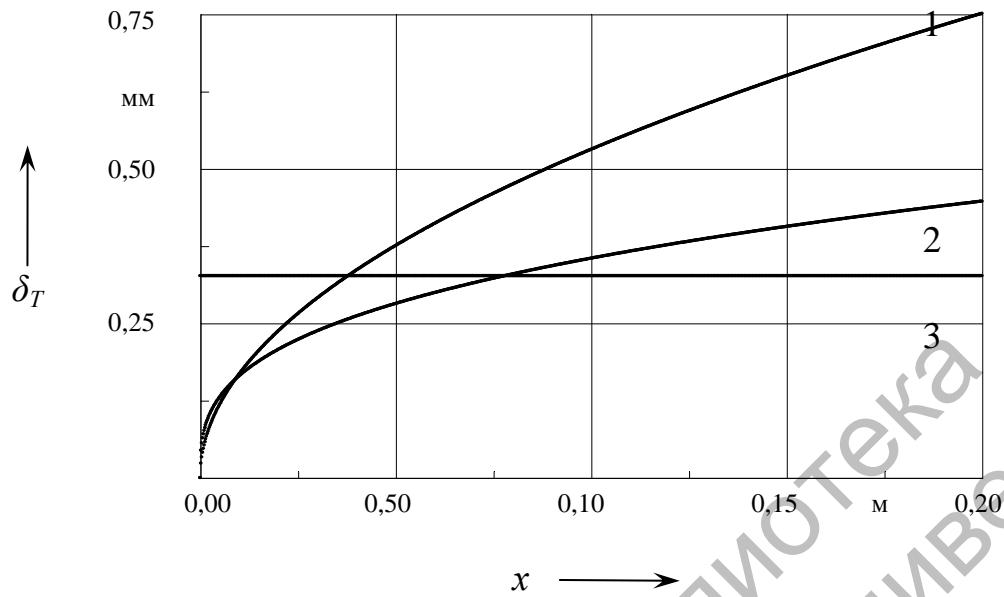


Рис. 2. Зависимости $\delta_T(x)$ при $T_{ст} = 120^\circ\text{C}$ ($Pr = 1,44$), $\nu = 0,246 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2 \cdot \text{с}^{-1}$ и различных значениях параметров β , C : 1 – $\beta = 0$, $C = 1,6 \text{ с}^{-1}$; 2 – $\beta = \pi/2$, $C = 4,7 \text{ с}^{-1}$; 3 – $\beta = \pi$, $C = 15,8 \text{ с}^{-1}$

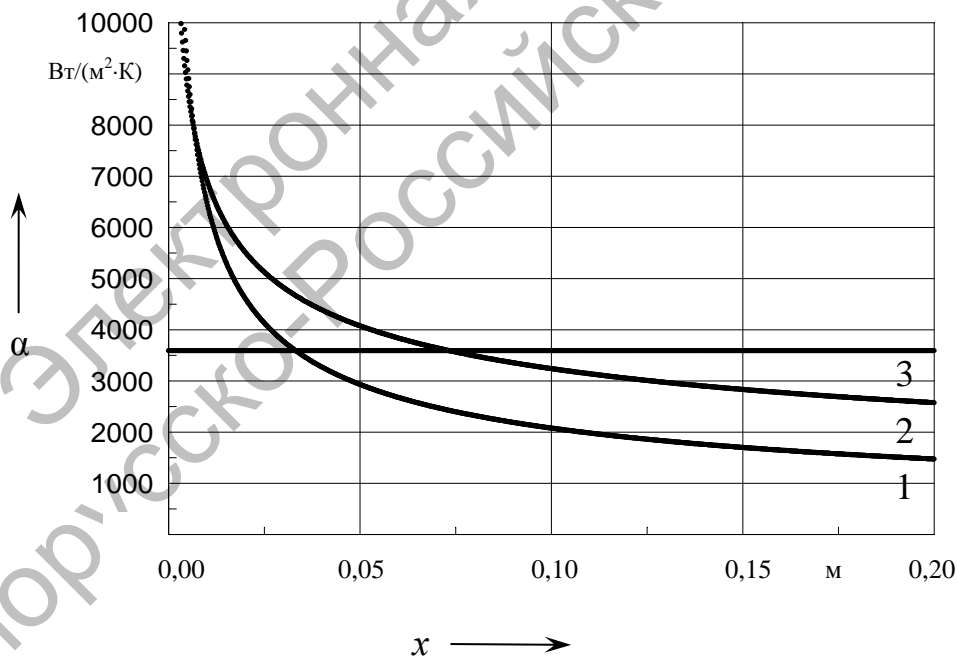


Рис. 3. Зависимости $\alpha(x)$ при $T_{ст} = 120^\circ\text{C}$ ($Pr = 1,44$), $\nu = 0,246 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2 \cdot \text{с}^{-1}$, $\lambda_0 = 0,677 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$ и различных значениях параметров β , C : 1 – $\beta = 0$, $C = 1,6 \text{ с}^{-1}$; 2 – $\beta = \pi/2$, $C = 4,7 \text{ с}^{-1}$; 3 – $\beta = \pi$, $C = 15,8 \text{ с}^{-1}$

**Экспериментальные
исследования коэффициента
теплоотдачи**

Для определения коэффициента теплоотдачи в кристаллизаторе при различных углах обтекания охладителя был изготовлен измерительный комплекс. Его общий вид представлен на рис. 4. Измерительный комплекс включает: экспериментальную отливку диаметром 70 мм высотой 160 мм из чисто-

го алюминия марки А7; в средней части заготовки установлены три термопары с открытым спаем диаметром 0,5 мм (схема расположения термопар представлена на рис. 5); устройство затопленно-струйного охлаждения отливок (УОО), позволяющее подавать поток охладителя под углами 0 и 90° к охлаждаемой поверхности; блок марки LG регистрации температуры и ноутбук.



Рис. 4. Общий вид измерительного комплекса



Рис. 5. Схема расположения термопар в экспериментальной отливке: $l_1 = 5$ мм, $l_2 = 5$ мм, $l_3 = 5$ мм

Эксперименты проводились на опытной установке литья закалочным затвердеванием. Заготовки нагревали до температуры 120 °С в печи сопротивления марки «Sno1», после чего помещали в устройство охлаждения отливок (УОО). Расход охладителя составлял 15 м³/ч. Опыты проводились при двух различных углах подачи охладителя: 0 и 90°. По результатам экспериментальных данных построены зависимости распределения температуры в отливке от времени. Установлено, что при охлаждении цилиндрической заготовки из алюминия в УОО распределение температуры вблизи наружной поверхности отливки можно принять линейным. На основании этого приближения из граничного условия 3-го рода на границе отливка–охлаждающая жидкость получена формула для расчета коэффициента теплоотдачи

$$\alpha = -\lambda \frac{T_1 - T_2}{l_2} \frac{1}{T_1 - \frac{l_1}{l_2}(T_2 - T_1) - T_{ж}},$$

где λ – теплопроводность алюминия, $\lambda = 213$ Вт/(м·К); T_1, T_2 – показания термомпар в отливке в точках 1 и 2; $T_{ж}$ – температура основного потока охладителя, $l_1 = 5$ мм, $l_2 = 5$ мм (см. рис. 5). Среднее значение результатов расчета по данной формуле коэффициента теплоотдачи для углов обтекания 0 и 90° составило 3000 Вт/(м²·К), что согласуется с результатами теоретических расчетов. Это свидетельствует о приемлемости выбранной математической модели, корректности полученных теоретических результатов.

Выводы

Таким образом, в результате проведенных исследований получено численно-аналитическое решение задачи о динамическом ламинарном пограничном слое в автомодельном случае. На основе этого решения выполнены рас-

четы толщины теплового пограничного слоя, а также значений локального коэффициента теплоотдачи от рубашки кристаллизатора к основному потоку охладителя при различных способах охлаждения кристаллизатора и параметрах потока охладителя. Выполнены экспериментальные исследования охлаждающей способности кристаллизатора для продольного и поперечного течений охладителя, которые показали приемлемость выбранной математической модели и корректности полученных теоретических результатов. Некоторые результаты проведенных исследований опубликованы в [16–19].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шлихтинг, Г. Теория пограничного слоя / Г. Шлихтинг. – М.: Наука, 1974.
2. Основы теплопередачи в авиационной и ракетно-космической технике / В. С. Андруевский [и др.]. – М.: Машиностроение, 1975.
3. Лыков, А. В. Тепломассообмен: справочник / А. В. Лыков. – 2-е изд., перераб. и доп. / А. В. Лыков. – М.: Энергия, 1978.
4. Кутателадзе, С. С. Основы теории теплообмена / С. С. Кутателадзе. – М.: Атомиздат, 1979.
5. Теория тепломассообмена. Учебник для вузов / Под ред. А. И. Леонтьева. – М.: Высш. шк., 1979.
6. Войткунский, Я. И. Гидромеханика: учебник / Я. И. Войткунский, Ю. И. Фаддеев, К. К. Федяевский. – Л.: Судостроение, 1982.
7. Теория турбулентных струй / Под ред. Г. И. Абрамовича. – М.: Наука, 1984.
8. Емцев, Б. Т. Техническая гидромеханика / Б. Т. Емцев. – М.: Машиностроение, 1987.
9. Себиси, Т. Конвективный теплообмен / Т. Себиси, П. Брэдшоу. – М.: Мир, 1987.
10. Репик, Е. У. Турбулентный пограничный слой. Методика и результаты экспериментальных исследований / Е. У. Репик, Ю. П. Соседат. – М.: Физматлит, 2007.
11. Лаптинский, В. Н. Конструктивный анализ управляемых колебательных систем / В. Н. Лаптинский. – Минск: ИМ НАН Беларуси, 1998.
12. Лаптинский, В. Н. Матрица типа Коши для нелинейных дифференциальных систем / В. Н. Лаптинский // VIII Белорус. мат. конф.: тез. докл. Междунар. конф. – Минск: ИМ НАН Беларуси, 2000. – Ч. 1. – С. 125.

13. Лаптинский, В. Н. Об одном представлении решений нелинейных дифференциальных систем / В. Н. Лаптинский // Дифференциальные уравнения и системы компьютерной алгебры : тез. докл. Междунар. матем. конф. – Брест : БрГУ, 2000. – С. 42–43.

14. Лаптинский, В. Н. К методу интегральных уравнений в теории краевых задач для дифференциальных уравнений / В. Н. Лаптинский // Математическое моделирование и дифференциальные уравнения : тез. докл. Первой Междунар. конф. – Минск : ИМ НАН Беларуси, 2007. – С. 85.

15. Марукович, Е. И. Повышение эффективности работы кристаллизатора при литье слитков / Е. И. Марукович, В. Ю. Стеценко // Литье и металлургия. – 2005. – № 2, Ч. 1. – С. 139–141.

16. Лаптинский, В. Н. О методах анализа граничной задачи Блазиуса-Хартри / В. Н. Лаптинский, Е. И. Марукович, В. Ю. Стеценко // Математическое моделирование и дифференци-

альные уравнения : тез. докл. Первой Междунар. конф. – Минск : ИМ НАН Беларуси, 2007. – С. 34–36.

17. Стеценко, В. Ю. Методика расчета гидродинамического пограничного слоя при охлаждении кристаллизатора / В. Ю. Стеценко, В. Н. Лаптинский, А. А. Романенко // Материалы, оборудование и ресурсосберегающие технологии : материалы Междунар. науч.-техн. конф. – Могилев : Белорус.-Рос. ун-т, 2007. – Ч. 1. – С. 97.

18. Лаптинский, В. Н. Расчет охлаждающей способности кристаллизатора при непрерывном литье / В. Н. Лаптинский, В. Ю. Стеценко, Р. В. Коновалов // Материалы, оборудование и ресурсосберегающие технологии : материалы Междунар. науч.-техн. конф. – Могилев : Белорус.-Рос. ун-т, 2009. – С. 75.

19. К задаче о тепловом пограничном слое / В. Ю. Стеценко [и др.] // Математическое моделирование и дифференциальные уравнения : тез. докл. Второй Междунар. науч. конф. – Минск : ИМ НАН Беларуси, 2009. – Ч. I. – С. 80.

Институт технологии металлов НАН Беларуси
Материал поступил 05.07.2010

**V. N. Laptinsky, A. A. Romanenko,
V. J. Stetsenko, R. V. Kononov**
**Calculation of dynamic and thermal
boundary layers for estimation of
cooling ability of crystallizers**

The numerically-analytical solution of the problem of dynamic and thermal boundary layers in a self-similar case has been obtained. Calculations of the local factor of heat-transfer between a crystallizer jacket and main coolant stream have been performed. Experimental researches of cooling ability of the crystallizer for longitudinal and cross coolant flows have been made.