

СТРОИТЕЛЬСТВО. АРХИТЕКТУРА

DOI: 10.53078/20778481_2022_1_118

УДК 624.073.2

Ю. Н. Котов

ДЕФОРМАЦИЯ ФУНДАМЕНТНОЙ ПЛИТЫ НА РАЗНЫХ МОДЕЛЯХ УПРУГОГО ОСНОВАНИЯ ПРИ УСЛОВИИ ОГРАНИЧЕНИЙ НА ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ПЛИТЫ

Y. N. Kotov

DEFORMATION OF THE FOUNDATION PLATE FOR DIFFERENT MODELS OF ELASTIC FOUNDATION WITH RESTRICTIONS ON PLATE DISPLACEMENTS

Аннотация

Даны общие сведения о расчетах фундаментной плиты на упругом основании способом Б. Н. Жемочкина при условии ограничений на некоторые перемещения плиты. Рассмотрен случай плоской деформации для ленточного фундамента на разных моделях упругого основания, когда ряд точек балочной фундаментной плиты находится на одной прямой. Приведен пример расчета фундаментной плиты с четырьмя точками плиты, лежащими на одной прямой.

Ключевые слова:

перемещения плиты, фундаментная плита, способ Жемочкина, основание Винклера, упругий слой.

Для цитирования:

Котов, Ю. Н. Деформация фундаментной плиты на разных моделях упругого основания при условии ограничений на перемещения плиты / Ю. Н. Котов // Вестник Белорусско-Российского университета. – 2022. – № 1 (74). – С. 118–127.

Abstract

The paper presents general information on the calculation of a foundation plate on elastic foundation, based on the method of B. N. Zhemochkin with restrictions on some plate displacements. The case of plane deformation of a strip foundation is considered for different models of the elastic foundation, when several points of a beam foundation plate are on the same straight line. An example of the calculation of the foundation plate with four points of it lying on the same straight line is given.

Keywords:

plate displacements, foundation plate, Zhemochkin method, Winkler foundation, elastic foundation.

For citation:

Kotov, Y. N. Deformation of the foundation plate for different models of elastic foundation with restrictions on plate displacements / Y. N. Kotov // The Belarusian-Russian university herald. – 2022. – № 1 (74). – P. 118–127.

Введение

Рассматривается статический расчет фундаментной плиты на упругом основании способом Б. Н. Жемочкина [1] при условии ограничений на некоторые перемещения плиты под действием вертикальной нагрузки. Теория и результаты решения контактных задач способом Жемочкина в пространственной постановке приведены в [2, 3]. Считается, что некоторые точки плиты при ее изгибе лежат на одной прямой. Такие перемещения фундаментной плиты вызываются неизвестными силами, приложенными к этим точкам плиты. То есть неизвестными являются контактные напряжения между фундаментной плитой и упругим основанием и неизвестные силы, приложенные к плите.

Статический расчет фундаментной плиты на упругом основании способом Б. Н. Жемочкина при условии ограничений на некоторые перемещения плиты можно выполнять с использованием различных моделей упругого основания. Например, модель Винклера применяется для расчета фундаментов на песчаных и слабых грунтах, а модель упругого основания в виде упругого слоя рекомендована действующими нормативными документами для расче-

та фундаментных балок.

Рассматриваемые в статье задачи возникают, например, при расчете многоэтажного здания, когда точки фундаментной плиты в местах стыка вертикальных стен и диафрагм жесткости должны находиться в одной плоскости. То же относится и к точкам базы металлической колонны на контакте сечения колонны и базы. Далее на конкретном примере рассматривается случай плоской деформации для ленточного фундамента при использовании разных моделей упругого основания и проводится сопоставление результатов.

Постановка задачи

Рассмотрим фундаментную балочную плиту на упругом основании под действием внешней нагрузки, вызывающей перемещения некоторых точек плиты по одной прямой (рис. 1). Требуется определить и сравнить контактные напряжения между плитой и упругим основанием (основание Винклера, упругий слой), ее перемещения, распределение изгибающих моментов и поперечных сил в сечениях плиты, величины внешних сил, вызывающих перемещения некоторых точек плиты по одной прямой.

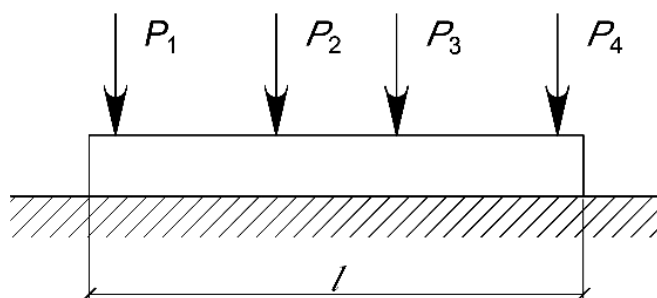


Рис. 1. Балочная плита на упругом основании

Алгоритм расчета

Расчет фундаментной плиты будем выполнять способом Жемочкина.

Разделим плиту на равные участки длиной Δx и в центре каждого участка поставим вертикальную связь, через которую осуществляется контакт плиты с

упругим основанием. Будем считать, что усилие в связи вызывает равномерное распределение контактных напряжений по всему участку.

Полученную многократно статически неопределимую систему решаем

смешанным методом строительной механики [4]. Для этого разрежем все связи и введем на конце плиты заделку. Получаем основную систему смешанного метода (рис. 2).

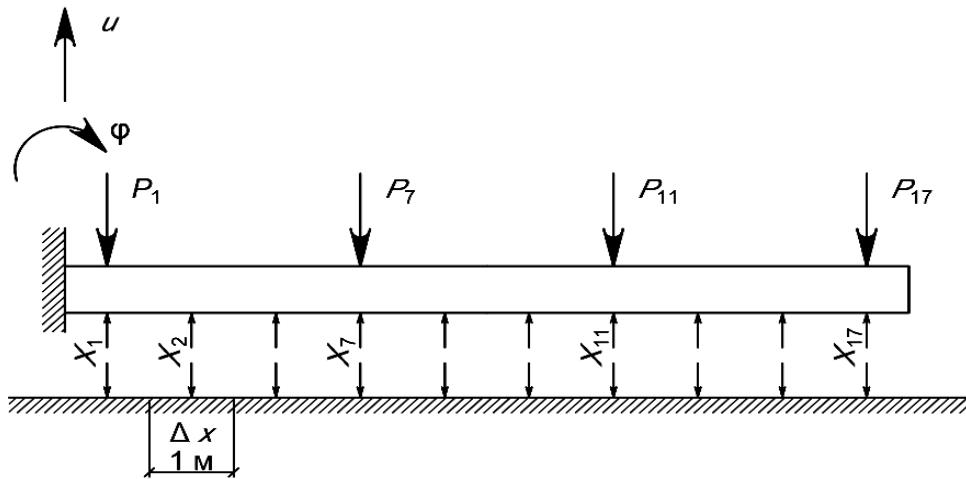


Рис. 2. Заданная система смешанного метода для расчета балочной плиты

Составим канонические уравнения смешанного метода, добавив к ним уравнения нахождения ряда точек на одной прямой.

При равнодействующей внешних сил, равной R , система имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^m \delta_{i,k} X_k + u + \varphi x_i + \sum_{k=1}^n y_{i,k} P_k = 0, \quad i = 1, \dots, m; \\ -\sum_{k=1}^m X_k + \sum_{k=1}^n P_k = 0; \\ -\sum_{k=1}^m x_k X_k + \sum_{k=1}^n x_{pk} P_k = 0; \\ -\sum_{k=1}^m F_{i,k} X_k + u' + \varphi'(x_i - x_{p1}) = 0, \quad i = 1, \dots, n; \\ \sum_{k=1}^n P_k = -R; \\ \sum_{k=1}^n x_{pk} P_k = -Ra_r, \end{array} \right. \quad (1)$$

где m – число участков Жемочкина на пластинке; n – число неизвестных сил, приложенных к точкам пластинки с перемещениями на одной линии;

x_{pk} – расстояние от защемления до участков, где приложены сосредоточенные неизвестные силы; X_k – неизвест-

ное усилие в связи Жемочкина на участке с номером k ; u, φ – неизвестные линейное и угловое перемещения введенного в начале балочной плиты защемления; u', φ' – неизвестные линейное и угловое перемещения прямой, на которой расположены n неизвестных сил. Принято за u' перемещение первой точки, где приложена сила P_1 ; $\delta_{i,k}$ – взаимное вертикальное перемещение разрезанной связи Жемочкина с номером i , состоит из двух слагаемых: первое представляет собой перемещения центра участка с номером i упругого основания от единичной силы, распределенной равномерно по участку с номером k ($i=1, \dots, m$), ($k=1, \dots, m$) и определяется для основания Винклера по формуле $\delta_{i,k} = \frac{1}{Kb\Delta x} + y_{i,k}$, где K – коэффициент постели [5]; b – ширина балочной плиты, для упругого слоя – по формуле $\delta_{i,k} = \frac{1-v_0^2}{\pi E_0 \Delta x} F_{i,k} + y_{i,k}$, где выражение для $F_{i,k}$, $y_{i,k}$ приводится ниже. Для некоторых иных моделей упругого основания выражения для $F_{i,k}$ можно

также найти в [1, 7]; P_k – неизвестная сила, приложенная к центру участка на пластинке с номером k ($k=1, \dots, m$); x_{pk} – абсцисса точки приложения неизвестных сил; $y_{i,k}$ – вертикальное перемещение (прогиб) центра участка Жемочкина с номером i на балочной плите с защемлением от единичной силы, приложенной к центру участка плиты с номером k ($i=1, \dots, m$), ($k=1, \dots, m$). Определяется по формуле, приведенной ниже; Δx – размер прямоугольного участка Жемочкина; E_0, v_0 – упругие постоянные слоя; R, a_r – равнодействующая внешних сил и абсцисса ее приложения на балочной плите.

Как было отмечено выше, коэффициенты при неизвестных $\delta_{i,k}$ в уравнениях (1) зависят от перемещений упругого основания от действия равномерно распределенной по участку Б. Н. Жемочкина единичной силы и прогибов консольной балки от внешних сил.

Согласно [6, 7], вертикальные перемещения упругого основания в виде упругой полосы от сосредоточенной силы P определяются по формуле

$$W(x) = \frac{2P(1-v^2)}{\pi E} \int_0^\infty \frac{ch2u-1}{sh2u+2u} \frac{\cos(u(\frac{x-\xi}{h}))}{u} du, \quad (2)$$

где h – толщина сжимаемого слоя.

Для $L(u) = \frac{ch2u-1}{sh2u+2u}$ примем аппроксимацию, отличную от приведенной в [7]:

$$L'(u) = th \frac{u}{2} + \frac{u^3}{24ch2u}. \quad (3)$$

Точность принятой аппроксимации характеризует рис. 3, где изображены графики функций $L(u)$

$$\text{и } L'(u) = th \frac{u}{2} + \frac{u^3}{24ch2u}.$$

Отметим, что функция

$L'(u) = th \frac{u}{2} + \frac{u^3}{24ch2u}$ по сравнению с приведенной в [7], как и $L(u)$, является нечетной функцией.

Интегрируя выражение (2) с принятой аппроксимацией в пределах $x_i < a_k$, $a_k < x_i < b_k$, $x_i > b_k$ (рис. 4), получаем:

– если $x_i < a_k$, то

$$F_{ik} = \left(\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} h \left(\ln \left[\operatorname{cth} \left[\frac{\pi(b_k + x_i)}{2h} \right] \right] \ln \left[1 + \operatorname{cth} \left[\frac{\pi(b_k - x_i)}{2h} \right] \right] + \right. \\ & \left. + Li_2 \left[1 - \operatorname{cth} \left[\frac{\pi(b_k - x_i)}{2h} \right] \right] + Li_2 \left[-\operatorname{cth} \left[\frac{\pi(b_k - x_i)}{2h} \right] \right] \right) - \\ & - \frac{1}{\pi} h \left(\ln \left[\operatorname{cth} \left[\frac{\pi(a_k + x_i)}{2h} \right] \right] \ln \left[1 + \operatorname{cth} \left[\frac{\pi(a_k - x_i)}{2h} \right] \right] + \right. \\ & \left. + Li_2 \left[1 - \operatorname{cth} \left[\frac{\pi(a_k - x_i)}{2h} \right] \right] + Li_2 \left[-\operatorname{cth} \left[\frac{\pi(a_k - x_i)}{2h} \right] \right] \right) + ; \\ & + \frac{1}{24 \cdot 16} h \pi^2 \left(\begin{aligned} & sh \left[\frac{\pi(-a_k + x_i)}{4h} \right] th \left[\frac{\pi(-a_k + x_i)}{4h} \right] - \\ & - sh \left[\frac{\pi(-b_k + x_i)}{4h} \right] th \left[\frac{\pi(-b_k + x_i)}{4h} \right] \end{aligned} \right) \end{aligned} \right) \quad (4)$$

– если $a_k < x_i < b_k$, то

$$F_{ik} = \left(\begin{aligned} & \frac{2h\pi}{3} + \frac{1}{\pi} h \left(\ln \left[\operatorname{cth} \left[\frac{\pi(b_k - x_i)}{2h} \right] \right] \ln \left[1 + \operatorname{cth} \left[\frac{\pi(b_k - x_i)}{2h} \right] \right] + \right. \\ & \left. + Li_2 \left[1 - \operatorname{cth} \left[\frac{\pi(b_k - x_i)}{2h} \right] \right] + Li_2 \left[-\operatorname{cth} \left[\frac{\pi(b_k - x_i)}{2h} \right] \right] \right) + \\ & + \frac{1}{\pi} h \left(\ln \left[\operatorname{cth} \left[\frac{\pi(-a_k + x_i)}{2h} \right] \right] \ln \left[1 + \operatorname{cth} \left[\frac{\pi(-a_k + x_i)}{2h} \right] \right] + \right. \\ & \left. + Li_2 \left[1 - \operatorname{cth} \left[\frac{\pi(-a_k + x_i)}{2h} \right] \right] + Li_2 \left[-\operatorname{cth} \left[\frac{\pi(-a_k + x_i)}{2h} \right] \right] \right) + ; \\ & + \frac{1}{24 \cdot 16} h \pi^2 \left(\begin{aligned} & sh \left[\frac{\pi(-a_k + x_i)}{4h} \right] th \left[\frac{\pi(-a_k + x_i)}{4h} \right] - \\ & - sh \left[\frac{\pi(-b_k + x_i)}{4h} \right] th \left[\frac{\pi(-b_k + x_i)}{4h} \right] \end{aligned} \right) \end{aligned} \right) \quad (5)$$

– если $x_i > b_k$, то

$$F_{ik} = \left(\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} h \left(\ln \left[\operatorname{cth} \left[\frac{\pi(-a_k + x_i)}{2h} \right] \right] \ln \left[1 + \operatorname{cth} \left[\frac{\pi(-a_k + x_i)}{2h} \right] \right] + \right. \\ & \left. + \operatorname{Li}_2 \left[1 - \operatorname{cth} \left[\frac{\pi(-a_k + x_i)}{2h} \right] \right] + \operatorname{Li}_2 \left[-\operatorname{cth} \left[\frac{\pi(-a_k + x_i)}{2h} \right] \right] \right) - \\ & - \frac{1}{\pi} h \left(\ln \left[\operatorname{cth} \left[\frac{\pi(-b_k + x_i)}{2h} \right] \right] \ln \left[1 + \operatorname{cth} \left[\frac{\pi(-b_k + x_i)}{2h} \right] \right] + \right. \\ & \left. + \operatorname{Li}_2 \left[1 - \operatorname{cth} \left[\frac{\pi(-b_k + x_i)}{2h} \right] \right] + \operatorname{Li}_2 \left[-\operatorname{cth} \left[\frac{\pi(-b_k + x_i)}{2h} \right] \right] \right) + , \\ & + \frac{1}{24 \cdot 16} h \pi^2 \left(\begin{aligned} & \operatorname{sh} \left[\frac{\pi(-a_k + x_i)}{4h} \right] \operatorname{th} \left[\frac{\pi(-a_k + x_i)}{4h} \right] - \\ & - \operatorname{sh} \left[\frac{\pi(-b_k + x_i)}{4h} \right] \operatorname{th} \left[\frac{\pi(-b_k + x_i)}{4h} \right] \end{aligned} \right) \end{aligned} \right) \quad (6)$$

где $\operatorname{Li}_s(z)$ – полилогарифмическая функция, определяемая как бесконечный степенной ряд $\operatorname{Li}_s(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^s}$ [8].

Прогибы балки, если $x_i > x_k$, находятся по формуле [1]

$$y_{ik} = \frac{x_i^2}{6EI} (3x_k - x_i). \quad (7)$$

Если $x_i < x_k$, то следует x_i и x_k поменять местами.

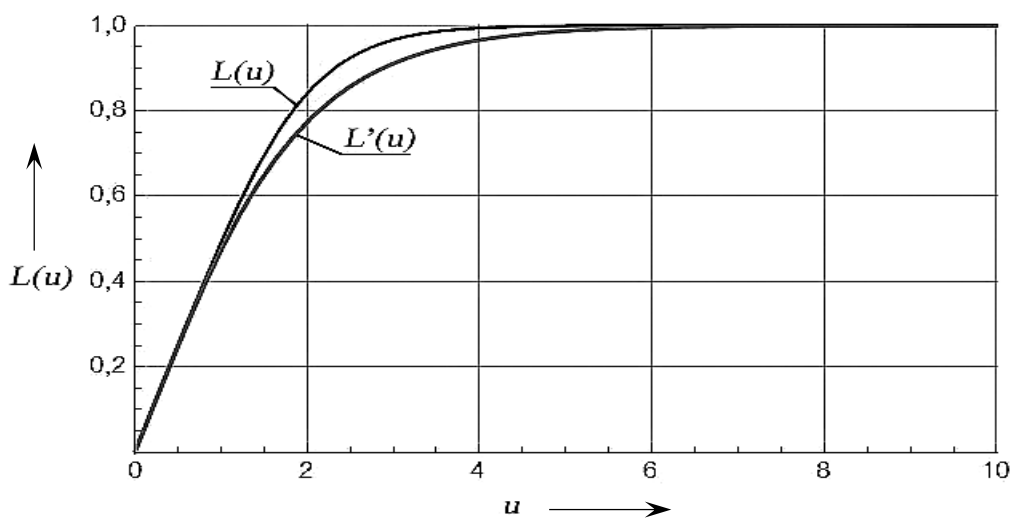


Рис. 3. График точного и аппроксимированного выражения для $L(u)$

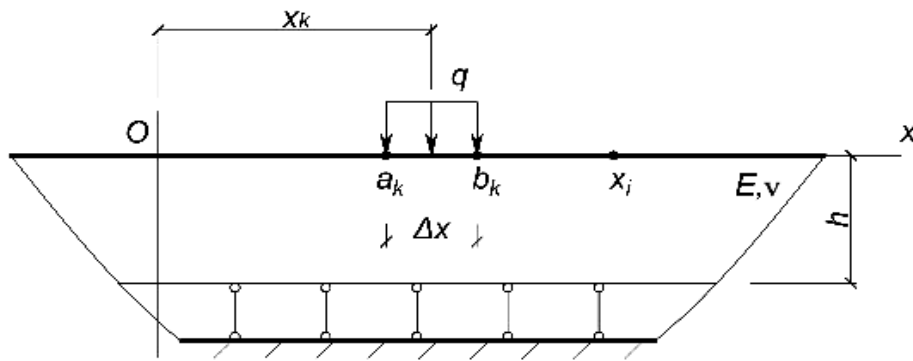


Рис. 4. К определению вертикальных перемещений полосы от действия равномерно распределенной нагрузки

Таким образом, формируется система (1), решением которой являются неизвестные усилия в стержнях, силы, приложенные к балке, а также неизвестное перемещение и угол поворота.

Результаты расчета

Расчет выполнялся для ленточного фундамента, когда четыре точки фундаментной плиты находятся на одной прямой. Длина и ширина фундаментной плиты $l = 17$ м, $b = 1$ м; толщина плиты и упругие постоянные бетона $H = 0,2$ м, $\nu_b = 0,17$, $E_b = 2,9 \cdot 10^4$ МПа; упругое основание $h = 5$ м, $E_0 = 3 \cdot 10^7$ Па, $\nu_0 = 0,35$; коэффициент постели определялся по

формуле [3] и получился равным $K = 9629,63$ кН/м³. Принято, что равнодействующая внешних сил равна единице и проходит через середину плиты. Количество участков Жемочкина принято равным 17. Силы P_1, P_2, P_3, P_4 неизвестны и вызывают одинаковые перемещения точек 1, 7, 11, 17 плиты. На рис. 5–9 показаны графики распределения контактных напряжений и перемещений, эпюр моментов и поперечных сил, графики со значениями внешних сил P , вызывающих перемещения четырех точек по одной прямой. Как видно, наибольшие перемещения и напряжение получаются под силами.

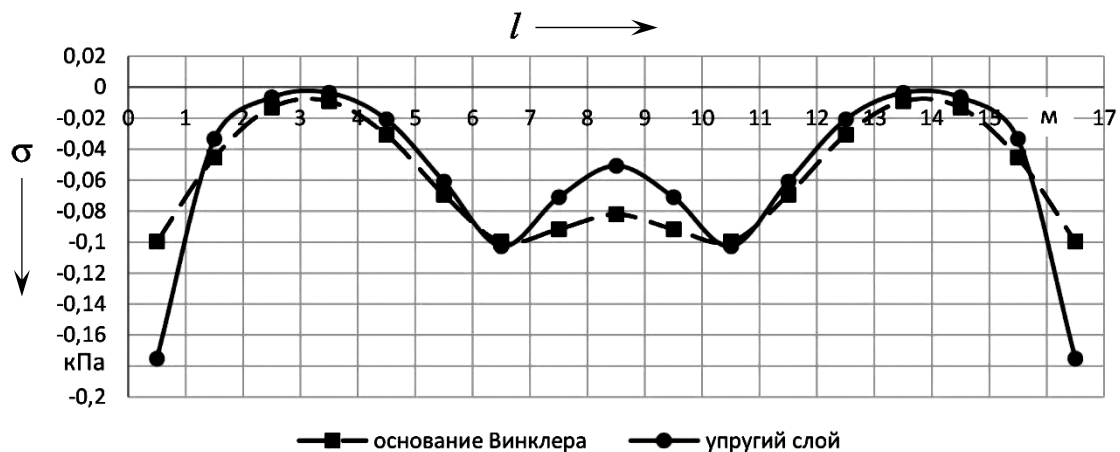


Рис. 5. Графики распределения напряжений



Рис. 6. Графики распределения перемещений

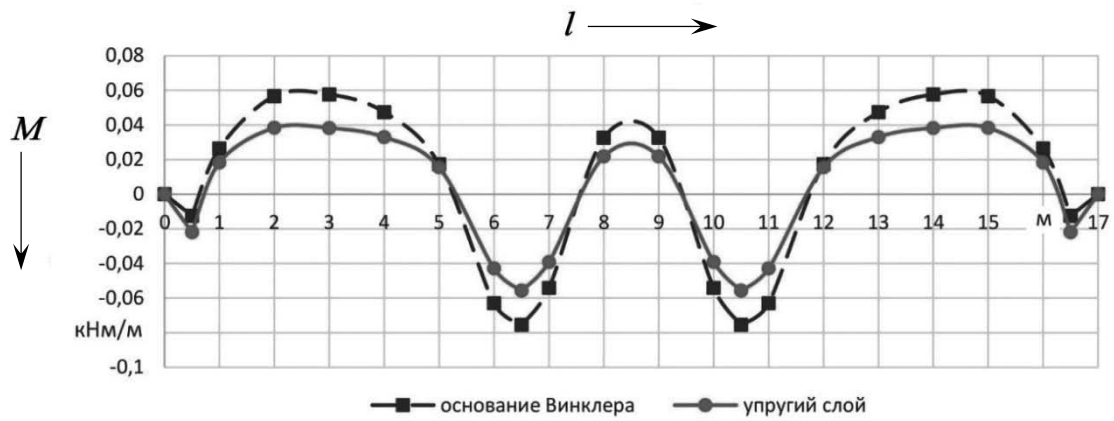


Рис. 7. Эпюры моментов

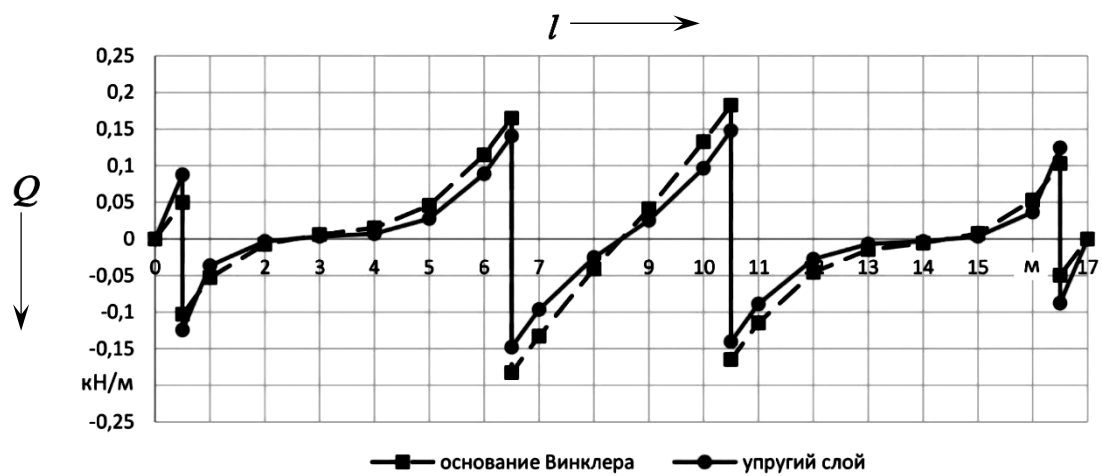


Рис. 8. Эпюры поперечных сил

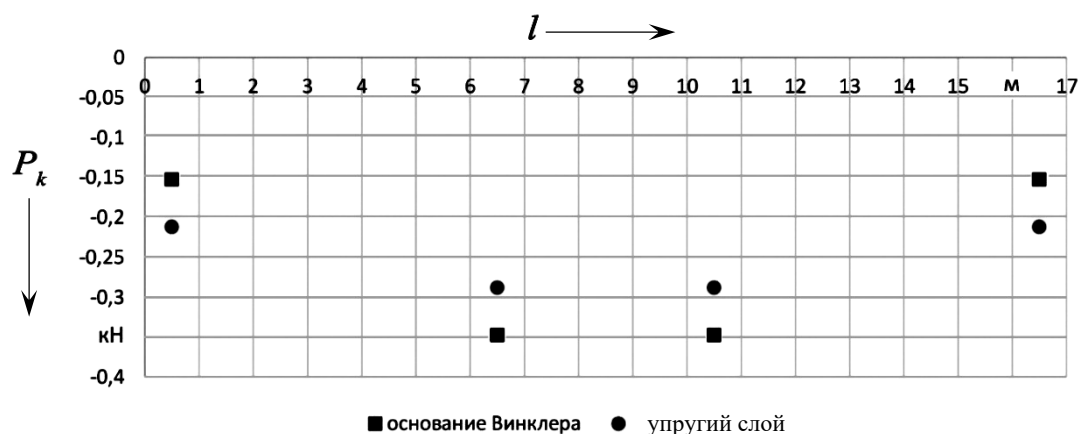


Рис. 9. Значения внешних сил

Сопоставив полученные выше результаты для двух моделей упругого основания, наблюдаем значительное изменение в распределении напряжений в центре и по краям фундаментной плиты в местах приложения неизвестных сил. Значения на эпюрах моментов и поперечных сил стали меньше, а на графике перемещений осадка в точках приложения неизвестных сил почти не изменилась.

Все расчеты выполнялись в программном комплексе *Wolfram Mathematica 12.2*. [9, 10].

Заключение

В работе впервые изложена методика расчета фундаментной плиты на упругом основании способом Жемочкина при условии ряда точек плиты, лежащих на одной прямой. Предлагаемая

методика может быть использована для разных моделей упругого основания и при произвольном числе точек, лежащих на одной прямой. Показано выражение для нахождения перемещений упругой полосы от равномерно распределенной по участку ее поверхности нагрузки. Приведены результаты расчета фундаментной плиты: распределения контактных напряжений и перемещений, эпюры моментов и поперечных сил, значения внешних сил – для двух различных моделей упругого основания (основание Винклера, упругий слой). Сравнение экспериментальных величин показывает, что наблюдается различие в результатах двух расчетов.

Полученные результаты могут быть пригодны для использования, в частности, при расчете ленточных фундаментов.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жемочкин, Б. Н. Практические методы расчета фундаментных балок и плит на упругом основании / Б. Н. Жемочкин, А. П. Синицын. – Москва: Стройиздат, 1962. – 239 с.
2. Козунова, О. В. Осесимметричная контактная задача для круглой плиты на нелинейно-упругом основании под действием сосредоточенных сил / О. В. Козунова, Д. М. Гурский // Механика. Исследования и инновации. – 2019. – № 12 (12). – С. 113–120.
3. Скачек, П. Д. Пространственная контактная задача опирания балки на четвертьпространство / П. Д. Скачек, С. В. Босаков // Новые горизонты – 2019: сб. материалов Белорус.-Китайского молодежного инновац. форума, Минск, 12–13 нояб. 2019 г. – Минск: БНТУ, 2019. – С. 181–183.

4. **Ржаницын, А. Р.** Строительная механика / А. Р. Ржаницын. – Москва: Высшая школа, 1991. – 439 с.
5. **Горбунов-Посадов, М. И.** Расчет конструкций на упругом основании / М. И. Горбунов-Посадов, Т. А. Маликова, В. И. Соломин. – Москва: Стройиздат, 1984. – 639 с.
6. **Ворович, И. И.** Неклассические смешанные задачи теории упругости / И. И. Ворович, В. М. Александров, В. А. Бабешко. – Москва: Наука, 1974. – 456 с.
7. **Босаков, С. В.** Статические расчеты плит на упругом основании / С. В. Босаков. – Минск: БНТУ, 2002. – 128 с.
8. **Градштейн, И. С.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. – Москва: Физматгиз, 1963. – 1100 с.
9. **Дьяконов, В. П.** Mathematica 5/6/7. Полное руководство / В. П. Дьяконов. – Москва: ДМК Пресс, 2009. – 624 с.
10. **Половко, А. М.** Mathematica для студента / А. М. Половко. – Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2007. – 368 с.: ил.

Статья сдана в редакцию 12 января 2022 года

Юрий Николаевич Котов, магистр техн. наук, аспирант, Белорусско-Российский университет. Тел.: +375-296-03-88-25.

Yuriy Nikolayevich Kotov, MSc (Engineering), PhD student, Belarusian-Russian University. Tel.: +375-296-03-88-25.