МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Высшая математика»

МАТЕМАТИКА

Методические рекомендации к лабораторным работам
для студентов специальности
1-70 03 01 «Автомобильные дороги»
очной и заочной форм обучения

Часть 1

Могилев 2022

УДК 517
ББК 22.1 я 73
М12

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Высшая математика» «27» января 2022 г., протокол № 5

Составитель ст. преподаватель А. М. Бутома

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доц. И. И. Маковецкий

Методические указания содержат краткую информацию о применяемых численных методах в математике, рекомендации по выполнению и оформлению отчетов по лабораторным работам, варианты заданий.

Учебно-методическое издание

МАТЕМАТИКА

Часть 1

Ответственный за выпуск	В. Г. Замураев
Корректор	Т. А. Рыжикова
Компьютерная верстка	Н. П. Полевничая

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 56 экз. Заказ № .

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.

© Белорусско-Российский
университет, 2022

Содержание

1 Лабораторная работа № 1. Решение системы линейных алгебраических уравнений методом Гаусса

Отчет по лабораторной работе предоставляется преподавателю в следующей форме:

1) постановка задачи;
2) решение задачи;
3) проверка результатов на компьютере;
4) сравнительный анализ результатов, полученных в пп. 2 и 3;
5) вывод.

Методом Гаусса называют точный метод решения невырожденной системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), состоящий в том, что последовательным исключением неизвестных систему

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \qquad i=\overline{1,n} \tag{1.1}$$

приводят к эквивалентной системе с треугольной матрицей

$$\begin{cases} x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n = d_1; \\ \qquad\quad x_2 + \ldots + c_{2n}x_n = d_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x_n = d_n, \end{cases} \tag{1.2}$$

решение которой находят по рекуррентным формулам

$$x_i = d_i - \sum_{k=i+1}^{n} c_{ik}x_k \;, \qquad x_n = d_n \;, \qquad i = n-1,\, n-2, \ldots, 1 \;.$$

Таким образом, вычисления по методу Гаусса распадаются на два этапа. На первом этапе, называемом прямым ходом метода, исходную систему (1.1) при помощи элементарных преобразований преобразуют к треугольному виду (1.2). На втором этапе, который называют обратным ходом, решают треугольную систему (1.2), эквивалентную исходной.

Отметим, что к элементарным преобразованиям системы относят следующие:

– перестановка любых двух уравнений системы;
– умножение любого уравнения системы на отличное от нуля число;
– вычеркивание уравнения, все коэффициенты которого равны нулю;
– прибавление к одному уравнению системы любого другого, умноженного на отличное от нуля число.

Каждому элементарному преобразованию системы (1.1) соответствует аналогичное элементарное преобразование над строками расширенной матрицы $(A|B)$ этой системы. Поэтому на практике элементарным преобразованиям подвергают не систему, а ее расширенную матрицу.

Постановка задачи. Методом Гаусса решить систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с точностью $\varepsilon = 10^{-2}$.

$$\begin{cases} 3,21x_1 - 4,15x_2 + 2,13x_3 = 5,06; \\ 7,09x_1 + 1,17x_2 - 2,23x_3 = 4,75; \\ 0,43x_1 - 1,4x_2 - 0,62x_3 = -1,05. \end{cases} \tag{1.3}$$

Решение СЛАУ* (1.3) *методом Гаусса.

Выпишем расширенную матрицу данной системы:

$$\left(A|B\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3,21 & -4,15 & 2,13 & 5,06 \\ 7,09 & 1,17 & -2,23 & 4,75 \\ 0,43 & -1,4 & -0,62 & -1,05 \end{array}\right).$$

Совершая над строками расширенной матрицы $\left(A|B\right)$ элементарные преобразования, приведем её к специальному виду:

$$\left(A|B\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3,21 & -4,15 & 2,13 & 5,06 \\ 7,09 & 1,17 & -2,23 & 4,75 \\ 0,43 & -1,4 & -0,62 & -1,05 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{l} \text{разделим первую строку} \\ \text{на } 3,21 \end{array}\right] =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1,2928 & 0,6635 & 1,5763 \\ 7,09 & 1,17 & -2,23 & 4,75 \\ 0,43 & -1,4 & -0,62 & -1,05 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{l} \text{умножим первую строку на } -7,09 \\ \text{и прибавим ко второй строке;} \\ \text{умножим первую строку на } -0,43 \\ \text{и прибавим к третьей строке} \end{array}\right] =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1,2928 & 0,6635 & 1,5763 \\ 0 & 10,3359 & -6,9342 & -6,4259 \\ 0 & -0,8441 & -0,9053 & -1,7278 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{l} \text{разделим вторую строку} \\ \text{на } 10,3359 \end{array}\right] =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1,2928 & 0,6635 & 1,5763 \\ 0 & 1 & -0,6709 & -0,6217 \\ 0 & -0,8441 & -0,9053 & -1,7278 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{l} \text{умножим вторую строку} \\ \text{на } 0,8441 \text{ и прибавим к} \\ \text{третьей строке} \end{array}\right] =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1,2928 & 0,6635 & 1,5763 \\ 0 & 1 & -0,6709 & -0,6217 \\ 0 & 0 & -1,4716 & -2,2526 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{l} \text{разделим третью строку} \\ \text{на } -1,4716 \end{array}\right] =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1,2928 & 0,6635 & 1,5763 \\ 0 & 1 & -0,6709 & -0,6217 \\ 0 & 0 & 1 & 1,5307 \end{array}\right).$$

По полученной матрице запишем систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - 1,2928x_2 + 0,6635x_3 = 1,5763; \\ \qquad\qquad x_2 - 0,6709x_3 = -0,6217; \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x_3 = 1,5307, \end{cases} \qquad (1.4)$$

эквивалентную системе (1.3).

Закончен прямой ход метода Гаусса. Переходим к обратному ходу.

Из (1.4) находим:

$x_3 = 1,5307;$

$x_2 = -0,6217 + 0,6709x_3 = -0,6217 + 0,6709 \cdot 1,5307 \approx 0,4052;$

$x_1 = 1,5763 + 1,2928x_2 - 0,6635x_3 = 1,5763 + 1,2928 \cdot 0,4052 - 0,6635 \cdot 1,5307 \approx$
$\approx 1,0845.$

Итак, $x_1 \approx 1,0845;$ $x_2 \approx 0,4052;$ $x_3 \approx 1,5307$ – решение СЛАУ (1.3).

Выполним проверку полученного результата на компьютере и получим

$$x_1 \approx 1,0845; \quad x_2 \approx 0,4003; \quad x_3 \approx 1,5320.$$

Ответ: $x_1 \approx 1,08;$ $x_2 \approx 0,40;$ $x_3 \approx 1,53.$

Варианты заданий к лабораторной работе № 1

1 $\begin{cases} 0,14x_1 + 0,24x_2 - 0,84x_3 = 1,11; \\ 1,07x_1 - 0,83x_2 + 0,56x_3 = 0,48; \\ 0,64x_1 + 0,43x_2 - 0,38x_3 = -0,83. \end{cases}$

4 $\begin{cases} 0,42x_1 - 1,13x_2 + 7,05x_3 = 6,15; \\ 1,14x_1 - 2,15x_2 + 5,11x_3 = -4,16; \\ -0,71x_1 + 0,81x_2 - 0,02x_3 = -0,17. \end{cases}$

2 $\begin{cases} 2,5x_1 - 3,12x_2 - 4,03x_3 = -7,5; \\ 0,61x_1 + 0,71x_2 - 0,05x_3 = 0,44; \\ -1,03x_1 - 2,05x_2 + 0,87x_3 = -1,16. \end{cases}$

5 $\begin{cases} 7,09x_1 + 1,17x_2 - 2,23x_3 = -4,75; \\ 0,43x_1 - 1,4x_2 - 0,62x_3 = -1,05; \\ 3,21x_1 - 4,25x_2 + 2,13x_3 = 5,06. \end{cases}$

3 $\begin{cases} 1,14x_1 - 2,15x_2 - 5,11x_3 = -4,16; \\ -0,71x_1 + 0,81x_2 - 0,02x_3 = -0,17; \\ 0,42x_1 - 1,13x_2 + 7,05x_3 = 6,15. \end{cases}$

6 $\begin{cases} 0,61x_1 + 0,71x_2 - 0,05x_3 = 0,44; \\ -1,03x_1 - 2,05x_2 + 0,87x_3 = -1,16; \\ 2,5x_1 - 3,12x_2 - 5,03x_3 = -7,5. \end{cases}$

7 $\begin{cases} 3{,}11x_1 - 1{,}66x_2 - 0{,}60x_3 = -0{,}92; \\ -1{,}65x_1 + 1{,}51x_2 - 0{,}78x_3 = 2{,}57; \\ 0{,}60x_1 + 0{,}78x_2 - 1{,}87x_3 = 1{,}65. \end{cases}$

16 $\begin{cases} 0{,}10x_1 + 0{,}12x_2 - 0{,}13x_3 = 0{,}10; \\ 0{,}12x_1 + 0{,}71x_2 + 0{,}15x_3 = 0{,}26; \\ -0{,}13x_1 + 0{,}15x_2 + 0{,}63x_3 = 0{,}38. \end{cases}$

8 $\begin{cases} 0{,}71x_1 + 0{,}10x_2 + 0{,}12x_3 = 0{,}29; \\ 0{,}10x_1 + 0{,}34x_2 - 0{,}04x_3 = 0{,}32; \\ 0{,}12x_1 - 0{,}04x_2 + 0{,}10x_3 = -0{,}10. \end{cases}$

17 $\begin{cases} 0{,}34x_1 - 0{,}04x_2 + 0{,}10x_3 = 0{,}33; \\ -0{,}04x_1 + 0{,}10x_2 + 0{,}12x_3 = -0{,}05; \\ 0{,}10x_1 + 0{,}12x_2 + 0{,}71x_3 = 0{,}28. \end{cases}$

9 $\begin{cases} 0{,}12x_1 - 0{,}43x_2 + 0{,}14x_3 = -0{,}17; \\ -0{,}07x_1 + 0{,}34x_2 + 0{,}72x_3 = 0{,}62; \\ 1{,}18x_1 - 0{,}08x_2 - 0{,}25x_3 = 1{,}12. \end{cases}$

18 $\begin{cases} 1{,}17x_1 + 0{,}53x_2 - 0{,}84x_3 = 1{,}15; \\ 0{,}64x_1 - 0{,}29x_2 - 0{,}43x_3 = 0{,}15; \\ 0{,}32x_1 + 0{,}43x_2 - 0{,}93x_3 = -0{,}48. \end{cases}$

10 $\begin{cases} 0{,}66x_1 - 1{,}44x_2 - 0{,}18x_3 = 1{,}83; \\ 0{,}48x_1 - 0{,}24x_2 + 0{,}37x_3 = -0{,}84; \\ 0{,}86x_1 + 0{,}43x_2 + 0{,}64x_3 = 0{,}64. \end{cases}$

19 $\begin{cases} 0{,}82x_1 + 0{,}43x_2 - 0{,}57x_3 = 0{,}48; \\ -0{,}35x_1 + 1{,}12x_2 - 0{,}48x_3 = 0{,}52; \\ 0{,}48x_1 + 0{,}23x_2 + 0{,}37x_3 = 1{,}44. \end{cases}$

11 $\begin{cases} 1{,}6x_1 + 0{,}12x_2 + 0{,}57x_3 = 0{,}18; \\ 0{,}38x_1 + 0{,}25x_2 - 0{,}54x_3 = 0{,}63; \\ 0{,}28x_1 + 0{,}46x_2 - 1{,}12x_3 = 0{,}88. \end{cases}$

20 $\begin{cases} 1{,}16x_1 + 1{,}3x_2 - 1{,}14x_3 = 0{,}43; \\ 0{,}83x_1 - 0{,}48x_2 - 2{,}44x_3 = -0{,}15; \\ 2x_1 - 0{,}16x_2 + 1{,}3x_3 = 1{,}5. \end{cases}$

12 $\begin{cases} 0{,}10x_1 - 0{,}04x_2 - 0{,}13x_3 = -0{,}15; \\ -0{,}04x_1 + 0{,}34x_2 + 0{,}05x_3 = 0{,}31; \\ -0{,}13x_1 + 0{,}05x_2 + 0{,}63x_3 = 0{,}37. \end{cases}$

21 $\begin{cases} 0{,}63x_1 + 0{,}05x_2 + 0{,}15x_3 = 0{,}34; \\ 0{,}05x_1 + 0{,}34x_2 + 0{,}10x_3 = 0{,}32; \\ 0{,}15x_1 + 0{,}10x_2 + 0{,}11x_3 = 0{,}42. \end{cases}$

13 $\begin{cases} 1{,}20x_1 - 0{,}20x_2 + 0{,}30x_3 = -0{,}60; \\ -0{,}20x_1 + 1{,}60x_2 - 1{,}10x_3 = 0{,}30; \\ -0{,}30x_1 + 0{,}10x_2 - 1{,}5x_3 = 0{,}40. \end{cases}$

22 $\begin{cases} 0{,}30x_1 + 1{,}20x_2 - 0{,}20x_3 = -0{,}60; \\ -0{,}10x_1 - 0{,}20x_2 + 1{,}60x_3 = 0{,}30; \\ -1{,}50x_1 - 0{,}30x_2 + 2{,}10x_3 = 0{,}40. \end{cases}$

14 $\begin{cases} 0{,}20x_1 + 0{,}44x_2 + 0{,}81x_3 = 0{,}74; \\ 0{,}58x_1 - 0{,}29x_2 + 0{,}05x_3 = 0{,}02; \\ 1{,}05x_1 + 0{,}34x_2 + 0{,}10x_3 = 0{,}32. \end{cases}$

23 $\begin{cases} 6{,}36x_1 + 11{,}75x_2 + 10x_3 = -41{,}70; \\ 7{,}42x_1 + 19{,}03x_2 + 11{,}75x_3 = -49{,}49; \\ 5{,}77x_1 + 4{,}72x_2 + 6{,}36x_3 = -27{,}67. \end{cases}$

15 $\begin{cases} 0{,}40x_1 + 0{,}11x_2 + 0{,}18x_3 = 0{,}47; \\ 0{,}28x_1 - 0{,}59x_2 + 0{,}03x_3 = 0{,}01; \\ 0{,}02x_1 + 0{,}24x_2 + 0{,}10x_3 = 0{,}22. \end{cases}$

24 $\begin{cases} 0{,}18x_1 + 0{,}25x_2 - 0{,}44x_3 = 1{,}15; \\ 0{,}42x_1 - 0{,}35x_2 + 1{,}12x_3 = 0{,}86; \\ 1{,}14x_1 + 0{,}12x_2 - 0{,}83x_3 = 0{,}68. \end{cases}$

25 $\begin{cases} 1,2x_1 + 0,18x_2 - 0,42x_3 = 1,5; \\ 0,44x_1 + 0,36x_2 + 0,12x_3 = 1,16; \\ 0,36x_1 - 0,42x_2 - 0,22x_3 = 0,15. \end{cases}$

28 $\begin{cases} 0,64x_1 - 0,43x_2 + 0,57x_3 = 0,43; \\ 0,56x_1 + 0,12x_2 - 0,27x_3 = 0,88; \\ 0,63x_1 - 0,83x_2 + 0,43x_3 = -0,12. \end{cases}$

26 $\begin{cases} 1,60x_1 + 2,18x_2 - 0,72x_3 = 1,15; \\ 0,43x_1 - 0,16x_2 + 0,53x_3 = 0,83; \\ 0,34x_1 + 0,57x_2 - 0,83x_3 = -0,42. \end{cases}$

29 $\begin{cases} 0,8x_1 - 0,13x_2 + 0,63x_3 = 1,15; \\ 0,42x_1 + 0,57x_2 + 0,32x_3 = 0,84; \\ 0,54x_1 + 0,62x_2 - 0,32x_3 = 0,25. \end{cases}$

27 $\begin{cases} 1,06x_1 - 0,28x_2 + 0,84x_3 = 0,57; \\ 0,43x_1 + 0,62x_2 - 0,35x_3 = 0,66; \\ 0,37x_1 - 0,75x_2 - 0,64x_3 = -0,38. \end{cases}$

30 $\begin{cases} 0,75x_1 - 0,84x_2 + 1,11x_3 = 0,66; \\ 1,12x_1 - 0,14x_2 + 0,45x_3 = 0,83; \\ 0,32x_1 + 0,23x_2 - 0,48x_3 = 0,14. \end{cases}$

2 Лабораторная работа № 2. Приближенное решение системы линейных алгебраических уравнений методом итераций

Постановка задачи. Методом итераций решить СЛАУ с точностью $\varepsilon = 10^{-2}$.

$$\begin{cases} 3,21x_1 - 4,15x_2 + 2,13x_3 = 5,06; \\ 7,09x_1 + 1,17x_2 - 2,23x_3 = 4,75; \\ 0,43x_1 - 1,4x_2 - 0,62x_3 = -1,05. \end{cases} \tag{2.1}$$

Решение СЛАУ (2.1) методом итераций.

1 Проверка условий сходимости метода итераций. Обеспечим выполнение условий сходимости метода итераций:

$$\begin{cases} |a_{11}| > |a_{12}|,\ |a_{11}| > |a_{13}|; \\ |a_{22}| > |a_{21}|,\ |a_{22}| > |a_{23}|; \\ |a_{33}| > |a_{31}|,\ |a_{33}| > |a_{32}|. \end{cases} \tag{2.2}$$

Сходимость будет «быстрее», если выполняются условия

$$\begin{cases} |a_{11}| \ge |a_{12}| + |a_{13}|; \\ |a_{22}| \ge |a_{21}| + |a_{23}|; \\ |a_{33}| \ge |a_{31}| + |a_{32}|. \end{cases} \tag{2.3}$$

Если условия сходимости не выполнены, то записываем расширенную матрицу A^p системы (2.1) и выполняем элементарные преобразования над строками матрицы, приводим ее к матрице, элементы которой удовлетворяют условиям сходимости (2.2) или (2.3).

Расширенная матрица СЛАУ (2.1) имеет вид:

$$\grave{A}^p = \left(\begin{array}{ccc|c} 3,21 & -4,15 & 2,13 & 5,06 \\ 7,09 & 1,17 & -2,23 & 4,75 \\ 0,43 & -1,4 & -0,62 & -1,05 \end{array}\right). \tag{2.4}$$

Вторую строку расширенной матрицы A^p запишем первой, третью строку матрицы A^p запишем второй, а оставшуюся первую строку – третьей. Получим

$$A_1^p = \left(\begin{array}{ccc|c} 7,09 & 1,17 & -2,23 & 4,75 \\ 0,43 & -1,4 & -0,62 & -1,05 \\ 3,21 & -4,15 & 2,13 & 5,06 \end{array}\right).$$

В полученной матрице первая и вторая строки удовлетворяют условиям сходимости (2.2) и (2.3). Проведем элементарные преобразования, чтобы и третья строка удовлетворяла условиям сходимости. Для этого умножим вторую строку на –3 и прибавим к третьей строке. Получим

$$A_2^p = \left(\begin{array}{ccc|c} 7,09 & 1,17 & -2,23 & 4,75 \\ 0,43 & -1,4 & -0,62 & -1,05 \\ 1,92 & 0,05 & 3,99 & 8,21 \end{array}\right).$$

Условия сходимости (2.3) метода итераций выполнены:

$$|7,09| > |1,17| + |-2,23| = 3,40;$$
$$|1,4| > |0,43| + |-0,62| = 1,05;$$
$$|3,99| > |1,92| + |0,05| = 1,97.$$

Запишем СЛАУ (2.5), эквивалентную СЛАУ (2.1), учитывая матрицу A_2^p :

$$\begin{cases} 7,09x_1 + 1,17x_2 - 2,23x_3 = 4,75; \\ 0,43x_1 - 1,4x_2 - 0,62x_3 = -1,05; \\ 1,92x_1 + 0,05x_2 + 3,99x_3 = 8,21. \end{cases} \tag{2.5}$$

2 Расчетные формулы метода итераций. Систему (2.5) приведем к другому виду: выразим из первого уравнения x_1, из второго уравнения $-x_2$, из третьего уравнения $-x_3$:

$$\begin{cases} x_1 = \quad -\dfrac{1,17}{7,09}x_2 + \dfrac{2,23}{7,09}x_3 + \dfrac{4,75}{7,09}; \\ x_2 = -\dfrac{0,43}{-1,4}x_1 \quad + \dfrac{0,62}{-1,4}x_3 - \dfrac{1,05}{-1,4}; \\ x_3 = -\dfrac{1,92}{3,99}x_1 - \dfrac{0,05}{3,99}x_2 \quad + \dfrac{8,21}{3,99}, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \qquad -0,165x_2 + 0,315x_3 + 0,669; \\ x_2 = 0,307x_1 \qquad -0,443x_3 + 0,75; \\ x_3 = -0,481x_1 - 0,013x_2 \qquad + 2,058. \end{cases} \tag{2.6}$$

Запишем СЛАУ (2.6) в матричной форме:

$$X = A' \cdot X + B', \tag{2.7}$$

где $A' = \begin{pmatrix} 0 & -0,165 & 0,315 \\ 0,307 & 0 & -0,443 \\ -0,481 & -0,013 & 0 \end{pmatrix}$; $B' = \begin{pmatrix} 0,669 \\ 0,75 \\ 2,058 \end{pmatrix}$.

Элементы матрицы A', взятые по модулю, меньше единицы, т. е. процесс итераций будет сходящимся (причем чем меньше они отличаются от нуля, тем сходимость быстрее).

Принимая во внимание СЛАУ (2.6) и (2.7), запишем расчетные формулы метода итераций:

$$X^{(n+1)} = A' \cdot X^{(n)} + B',$$

$$\begin{cases} x_1^{(n+1)} = \qquad -0,165x_2^{(n)} + 0,315x_3^{(n)} + 0,669; \\ x_2^{(n+1)} = \ 0,307x_1^{(n)} \qquad -0,443x_3^{(n)} + 0,75; \\ x_3^{(n+1)} = -0,481x_1^{(n)} - 0,013x_2^{(n)} \qquad + 2,058, \end{cases} \qquad n = 0,1,2,... \tag{2.8}$$

Выбираем нулевое приближение ($x_1^{(0)}$, $x_2^{(0)}$, $x_3^{(0)}$), равное свободным членам СЛАУ (2.8), к искомому решению $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$ СЛАУ (2.1):

$$x_1^{(0)} = 0,669, \quad x_2^{(0)} = 0,75, \quad x_3^{(0)} = 2,058.$$

3 Нахождение решения $(\tilde{x}_1; \tilde{x}_2; \tilde{x}_3)$ *с заданной точностью*. Вычисляя по формулам (2.8), находим решение $(\tilde{x}_1; \tilde{x}_2; \tilde{x}_3)$ с заданной точностью ε. Оканчиваем расчет, если выполняются неравенства

$$\left| x_i^{(n+1)} - x_i^{(n)} \right| \le \varepsilon, \quad i = \overline{1,3}. \tag{2.9}$$

Шаг 1. При $n=0$ из (2.8) находим первое приближение к решению СЛАУ (2.1):

$$x_1^{(1)}=-0{,}165x_2^{(0)}+0{,}315x_3^{(0)}+0{,}669=-0{,}165\cdot 0{,}75+0{,}315\cdot 2{,}058+0{,}669\approx 1{,}194;$$
$$x_2^{(1)}=0{,}307x_1^{(0)}-0{,}443x_3^{(0)}+0{,}75=0{,}307\cdot 0{,}669-0{,}443\cdot 2{,}058+0{,}75\approx 0{,}044;$$
$$x_3^{(1)}=-0{,}481x_1^{(0)}-0{,}013x_2^{(0)}+2{,}058=-0{,}481\cdot 0{,}669-0{,}013\cdot 0{,}75+2{,}058\approx 1{,}746.$$

Шаг 2. При $n=1$ из (2.8) находим второе приближение к решению СЛАУ (2.1):

$$x_1^{(2)}=-0{,}165x_2^{(1)}+0{,}315x_3^{(1)}+0{,}669=-0{,}165\cdot 0{,}044+0{,}315\cdot 1{,}746+0{,}669\approx 1{,}212;$$
$$x_2^{(2)}=0{,}307x_1^{(1)}-0{,}443x_3^{(1)}+0{,}75=0{,}307\cdot 1{,}194-0{,}443\cdot 1{,}746+0{,}75\approx 0{,}343;$$
$$x_3^{(2)}=-0{,}481x_1^{(1)}-0{,}013x_2^{(1)}+2{,}058=-0{,}481\cdot 1{,}194-0{,}013\cdot 0{,}044+2{,}058\approx 1{,}484.$$

Шаг 3. При $n=2$ из (2.8) находим третье приближение к решению СЛАУ (2.1):

$$x_1^{(3)}=-0{,}165x_2^{(2)}+0{,}315x_3^{(2)}+0{,}669=-0{,}165\cdot 0{,}343+0{,}315\cdot 1{,}484+0{,}669\approx 1{,}08;$$
$$x_2^{(3)}=0{,}307x_1^{(2)}-0{,}443x_3^{(2)}+0{,}75=0{,}307\cdot 1{,}212-0{,}443\cdot 1{,}484+0{,}75\approx 0{,}465;$$
$$x_3^{(3)}=-0{,}481x_1^{(2)}-0{,}013x_2^{(2)}+2{,}058=-0{,}481\cdot 1{,}212-0{,}013\cdot 0{,}343+2{,}058\approx 1{,}479.$$

Шаг 4. При $n=3$ из (2.8) находим четвертое приближение к решению СЛАУ (2.1):

$$x_1^{(4)}=-0{,}165x_2^{(3)}+0{,}315x_3^{(3)}+0{,}669=-0{,}165\cdot 0{,}465+0{,}315\cdot 1{,}479+0{,}669\approx 1{,}058;$$
$$x_2^{(4)}=0{,}307x_1^{(3)}-0{,}443x_3^{(3)}+0{,}75=0{,}307\cdot 1{,}08-0{,}443\cdot 1{,}479+0{,}75\approx 0{,}426;$$
$$x_3^{(4)}=-0{,}481x_1^{(3)}-0{,}013x_2^{(3)}+2{,}058=-0{,}481\cdot 1{,}08-0{,}013\cdot 0{,}465+2{,}058\approx 1{,}544.$$

Шаг 5. При $n=4$ из (2.8) находим пятое приближение к решению СЛАУ (2.1):

$$x_1^{(5)}=-0{,}165x_2^{(4)}+0{,}315x_3^{(4)}+0{,}669=-0{,}165\cdot 0{,}426+0{,}315\cdot 1{,}544+0{,}669\approx 1{,}085;$$
$$x_2^{(5)}=0{,}307x_1^{(4)}-0{,}443x_3^{(4)}+0{,}75=0{,}307\cdot 1{,}058-0{,}443\cdot 1{,}544+0{,}75\approx 0{,}391;$$
$$x_3^{(5)}=-0{,}481x_1^{(4)}-0{,}013x_2^{(4)}+2{,}058=-0{,}481\cdot 1{,}058-0{,}013\cdot 0{,}426+2{,}058\approx 1{,}554.$$

Шаг 6. При $n=5$ из (2.8) находим шестое приближение к решению СЛАУ (2.1):

$$x_1^{(6)}=-0{,}165x_2^{(5)}+0{,}315x_3^{(5)}+0{,}669=-0{,}165\cdot 0{,}391+0{,}315\cdot 1{,}554+0{,}669\approx 1{,}094;$$
$$x_2^{(6)}=0{,}307x_1^{(5)}-0{,}443x_3^{(5)}+0{,}75=0{,}307\cdot 1{,}085-0{,}443\cdot 1{,}554+0{,}75\approx 0{,}395;$$
$$x_3^{(6)}=-0{,}481x_1^{(5)}-0{,}013x_2^{(5)}+2{,}058=-0{,}481\cdot 1{,}085-0{,}013\cdot 0{,}391+2{,}058\approx 1{,}541.$$

Шаг 7. При $n = 6$ из (2.8) находим седьмое приближение к решению СЛАУ (2.1):

$$x_1^{(7)} = -0,165x_2^{(6)} + 0,315x_3^{(6)} + 0,669 = -0,165 \cdot 0,395 + 0,315 \cdot 1,541 + 0,669 \approx 1,089;$$
$$x_2^{(7)} = 0,307x_1^{(6)} - 0,443x_3^{(6)} + 0,75 = 0,307 \cdot 1,094 - 0,443 \cdot 1,541 + 0,75 \approx 0,403;$$
$$x_3^{(7)} = -0,481x_1^{(6)} - 0,013x_2^{(6)} + 2,058 = -0,481 \cdot 1,094 - 0,013 \cdot 0,395 + 2,058 \approx 1,537.$$

Полученные результаты представлены в таблице 2.1.

Таблица 2.1

n	$x_1^{(n+1)}$	$x_2^{(n+1)}$	$x_3^{(n+1)}$
0	0,669	0,75	2,058
1	1,194	0,044	1,746
2	1,212	0,343	1,484
3	1,08	0,465	1,479
4	1,058	0,426	1,544
5	1,085	0,391	1,554
6	1,094	0,395	1,541
7	1,089	0,403	1,537

Заканчиваем вычисления, т. к. выполнены условия (2.9):

$$\left|x_1^{(7)} - x_1^{(6)}\right| = \left|1,089 - 1,094\right| = 0,005 < \varepsilon = 10^{-2};$$
$$\left|x_2^{(7)} - x_2^{(6)}\right| = \left|0,403 - 0,395\right| = 0,005 < \varepsilon = 10^{-2};$$
$$\left|x_3^{(7)} - x_3^{(6)}\right| = \left|1,537 - 1,541\right| = 0,004 < \varepsilon = 10^{-2}.$$

Проверку на компьютере можно выполнить двумя способами:

1) решаем СЛАУ (2.1) методом Гаусса и получаем результат: $\tilde{x}_1 \approx 1,085$; $\tilde{x}_2 \approx 0,4052$; $\tilde{x}_3 \approx 1,531$;

2) решаем СЛАУ (2.6) методом итераций и получаем результат: $\tilde{x}_1 \approx 1,089$; $\tilde{x}_2 \approx 0,403$; $\tilde{x}_3 \approx 1,536$.

Ответ: $\tilde{x}_1 = x_1^{(8)} \approx 1,08$; $\tilde{x}_2 = x_2^{(8)} \approx 0,40$; $\tilde{x}_3 = x_3^{(8)} \approx 1,53$ – решение СЛАУ (2.1).

Варианты заданий даны в лабораторной работе № 1.

3 Лабораторная работа № 3. Приближенное решение уравнения вида $f(x)=0$ методом половинного деления

Пусть задана непрерывная функция $f(x)$ и требуется найти корень уравнения $f(x)=0$. Предположим, что найден отрезок $[a;b]$ такой, что $f(a)\cdot f(b)<0$. Тогда согласно теореме Больцано-Коши внутри отрезка $[a;b]$ существует точка k, в которой значение функции равно нулю, т. е. $f(k)=0$, $k\in(a;b)$. Итерационный метод бисекций (половинного деления) состоит в построении последовательности вложенных отрезков $\{[a_n;b_n] \mid [a_n;b_n]\subset[a_{n-1};b_{n-1}]\subset[a;b]\}$, на концах которых функция принимает значения разных знаков. Каждый последующий отрезок получают делением пополам предыдущего. Процесс построения последовательности отрезков позволяет найти нуль функции $f(x)$ (корень $\tilde{x}$ уравнения $f(x)=0$) с любой заданной точностью.

Постановка задачи. Определить количество действительных корней уравнения

$$x^3+x^2-3=0, \tag{3.1}$$

отделить эти корни и, применив метод половинного деления, вычислить их с точностью 0,01.

Графический метод. Можно построить график функции

$$y=x^3+x^2-3, \tag{3.2}$$

и корнями уравнения (3.1) будут абсциссы точек пересечения графика функции (3.2) с осью Ox. Но проще записать уравнение (3.1) в виде $x^3=3-x^2$, корнями уравнения (3.1) будут абсциссы точек пересечения двух кривых $y=x^3$ и $y=3-x^2$ (рисунок 3.1).

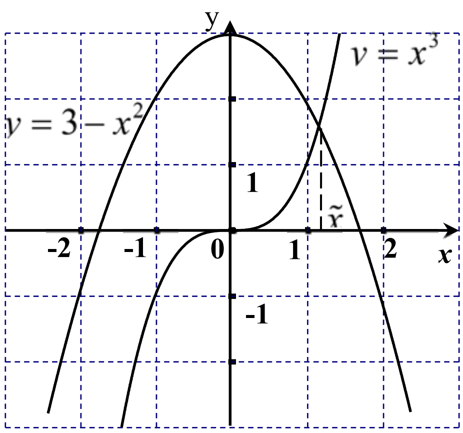

Рисунок 3.1

Метод половинного деления. Для того чтобы применить метод половинного деления, необходимо выполнение следующих условий:

$$\left.\begin{array}{l} \text{1) } f(x) \text{ непрерывна на } [a;b]; \\ \text{2) } f(a)\cdot f(b)<0; \\ \text{3) } f'(x) \text{ сохраняет знак на } [a;b] \quad \big(f(x) \text{ монотонна на } [a;b]\big); \\ \text{4) } f''(x) \text{ сохраняет знак на } [a;b] \quad \big(\text{график функции } y=f(x) \\ \text{на } [a;b] \text{ выпукл или вогнут}\big). \end{array}\right\} \qquad (3.3)$$

Проверим, можно ли применить метод половинного деления для вычисления корня $\tilde{x}\in[1;\,1{,}5]$ уравнения (3.1).

$$\left.\begin{array}{l} \text{1) } f(x)=x^3+x^2-3 \text{ непрерывна на } [1;1{,}5]; \\ \text{2) } f(1)=-1<0; \quad f(1{,}5)=1{,}5^3+1{,}5^2-3=2{,}625>0; \\ \text{3) } f'(x)=3x^2+2x>0 \text{ для } x\in[1;1{,}5], \text{ значит,} \\ \text{функция } f(x) \text{ возрастает на } [1;\,1{,}5]; \\ \text{4) } f''(x)=6x+2>0 \text{ для } x\in[1;1{,}5], \text{ значит,} \\ \text{график функции } f(x) \text{ вогнут на } [1;1{,}5]. \end{array}\right\} \qquad (3.4)$$

Учитывая условия (3.4), строим рисунок 3.2.

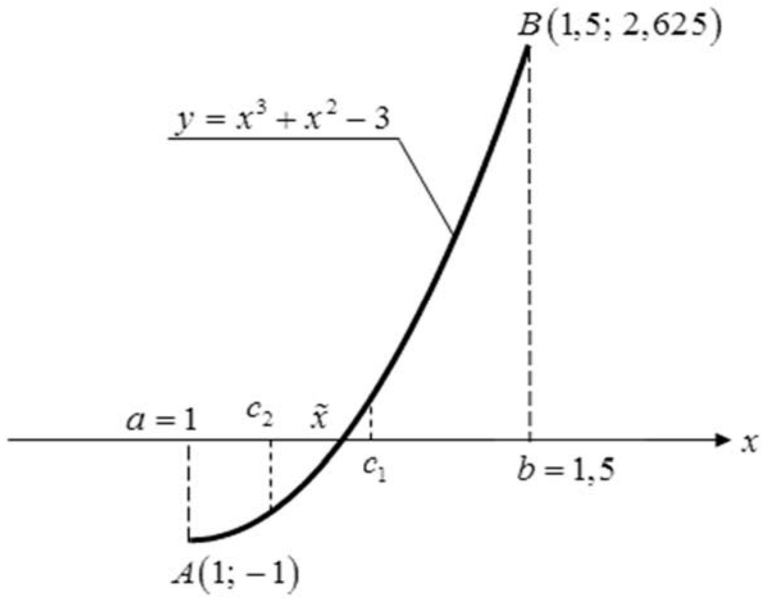

Рисунок 3.2

Из условия (3.4) заключаем, что на отрезке $[1;\,1{,}5]$ находится только один корень уравнения (3.1).

Уточним значение корня $\tilde{x} \in [1;\, 1{,}5]$ методом половинного деления (вычислим его с заданной точностью $\varepsilon = 10^{-2}$).

$$\tilde{x} \in [1;\, 1{,}5], \quad c_1 = \frac{1+1{,}5}{2} = 1{,}25, \qquad f(1{,}25) = 1{,}25^3 + 1{,}25^2 - 3 \approx 0{,}516 > 0;$$

$$\tilde{x} \in [1;\, 1{,}25], \quad c_2 = \frac{1+1{,}25}{2} = 1{,}125, \quad f(1{,}125) = 1{,}125^3 + 1{,}125^2 - 3 \approx -0{,}31 < 0;$$

$$\tilde{x} \in [1{,}125;\, 1{,}25], \qquad c_3 = \frac{1{,}125+1{,}25}{2} \approx 1{,}187, \qquad f(1{,}187) \approx 0{,}081 > 0;$$

$$\tilde{x} \in [1{,}125;\, 1{,}187], \qquad c_4 = \frac{1{,}125+1{,}187}{2} \approx 1{,}156, \qquad f(1{,}156) \approx -0{,}089 < 0;$$

$$\tilde{x} \in [1{,}156;\, 1{,}187], \qquad c_5 = \frac{1{,}156+1{,}187}{2} \approx 1{,}172, \qquad f(1{,}172) \approx -0{,}013 < 0;$$

$$\tilde{x} \in [1{,}172;\, 1{,}187], \qquad c_6 = \frac{1{,}172+1{,}187}{2} \approx 1{,}179, \qquad f(1{,}179) \approx 0{,}029 > 0;$$

$$\tilde{x} \in [1{,}172;\, 1{,}179].$$

Вычисляя корень $\tilde{x}$ с заданной точностью, сохраняли в промежуточных вычислениях один запасной десятичный знак. Окончили вычисления, т. к.

$$|1{,}179 - 1{,}172| = 0{,}007 < 0{,}01.$$

Получили $\tilde{x} = \dfrac{1{,}172+1{,}179}{2} \approx 1{,}175$.

Результат, полученный на компьютере: $\tilde{x} \approx 1{,}1748$.

Ответ: $\tilde{x} \approx 1{,}17$ – корень уравнения (3.1), вычисленный с точностью 0,01.

Варианты заданий к лабораторной работе № 3

1) $x - \sin x = 0{,}75$;

2) $x^2 + 4\sin x = 1$;

3) $2\lg x - \dfrac{x}{3} + 1 = 0$;

4) $3x - \cos x - 1 = 0$;

5) $x\lg x - 1{,}2 = 0$;

6) $x^3 - x - 5 = 0$;

7) $2x - \lg x = 7$;

8) $x^3 + 2x + 4 = 0$;

9) $\sin(x+1) = 0{,}5x$;

10) $(x+1)^2 = 0{,}5e^x$;

11) $x\lg(x+1) = 1$;

12) $x^4 - x - 1 = 0$;

13) $\ln x + (x+1)^3 = 0$;

14) $2x + \lg x = -0{,}5$;

15) $x^2 + \ln x - 4 = 0$;

16) $e^x + x^2 - 2 = 0$;

17) $2e^x - 2x - 3 = 0$;

18) $\cos(x+0{,}5) = x^3$;

19) $\sin(x+0{,}5) = 2x - 0{,}5$;

20) $0{,}5x - \lg(x+1) = 0{,}5$;

21) $2x + \cos x = 0{,}5$;

22) $2\sin(x+0{,}5) = 1{,}5 - x$;

23) $x^2 = \ln(x+1)$;

24) $e^{-2x} - 2x + 1 = 0$;

25) $2e^x + 3x + 1 = 0$;

26) $(2-x)e^x = 0{,}5$;

27) $\lg(2+x) + 2x = 3$;

28) $\ln x + x^2 = 0$;

29) $\sin\dfrac{x}{2} + 1 = x^2$;

30) $5\sin x = x - 1$.

4 Лабораторная работа № 4. Приближенное решение уравнения вида $f(x)=0$ методом хорд и касательных (комбинированный метод)

Постановка задачи. Определить количество действительных корней уравнения

$$x^3 + x^2 - 3 = 0, \tag{4.1}$$

отделить эти корни и, применив метод хорд и касательных, вычислить их с точностью $\varepsilon = 10^{-5}$.

Отделение действительных корней уравнения* (4.1) *графическим методом (см. лабораторную работу № 3).

Вычисление действительного корня $\tilde{x} \in [1;\, 1{,}5]$ ***методом хорд и касательных с заданной точностью*** $\varepsilon = 10^{-5}$**.**

Для того чтобы применить комбинированный метод, необходимо выполнение следующих условий:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ f(x) \text{ непрерывна на } [a;b]; \\ 2)\ f(a)\cdot f(b) < 0; \\ 3)\ f'(x) \text{ сохраняет знак на } [a;b] \quad \left(f(x) \text{ монотонна на } [a;b]\right); \\ 4)\ f''(x) \text{ сохраняет знак на } [a;b] \ \left(\text{график функции } y = f(x)\right. \\ \quad \left.\text{на } [a;b] \text{ выпукл или вогнут}\right). \end{array}\right\} \qquad (4.2)$$

Проверим, можно ли применить метод хорд и касательных для вычисления корня $\tilde{x} \in [1;\, 1{,}5]$ уравнения (4.1).

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ f(x) = x^3 + x^2 - 3 \text{ непрерывна на } [1;\, 1{,}5]; \\ 2)\ f(1) = -1 < 0; \quad f(1{,}5) = 2{,}625 > 0; \\ 3)\ f'(x) = 3x^2 + 2x > 0 \ \text{ для } x \in [1;1{,}5]; \\ 4)\ f''(x) = 6x + 2 > 0 \ \text{ для } x \in [1;1{,}5]. \end{array}\right\} \qquad (4.3)$$

Учитывая условия (4.3), строим рисунок 4.1.

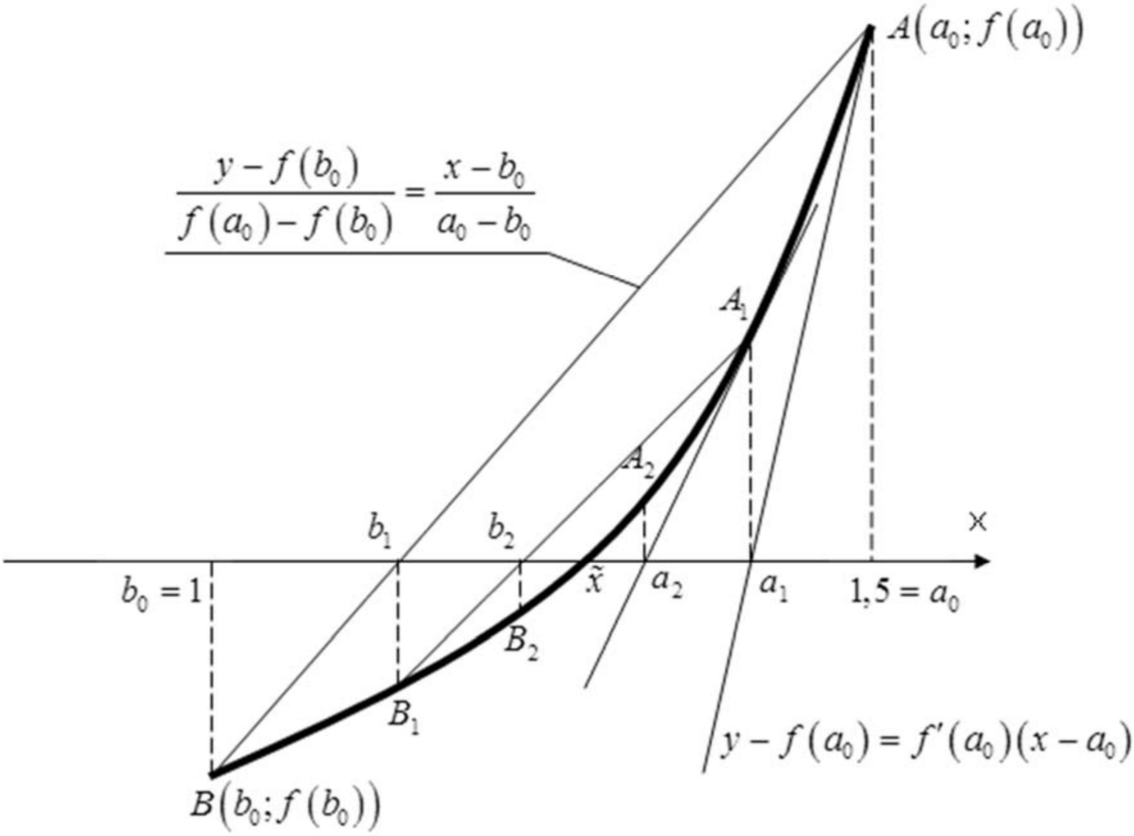

Рисунок 4.1

Расчетные формулы метода хорд и касательных имеют вид:

$$a_1 = a_0 - \frac{f(a_0)}{f'(a_0)};$$

$$b_1 = b_0 - \frac{f(b_0)(a_0 - b_0)}{f(a_0) - f(b_0)} \quad \text{и т. д.}$$

За приближенное значение корня $\tilde{x}$ принимаем

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{x} \approx \frac{a_{n+1} + b_{n+1}}{2}, \quad \text{если} \quad |a_{n+1} - b_{n+1}| \le \varepsilon, \\ &\text{где} \quad a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)} = a_n + \Delta a_n, \\ &\qquad b_{n+1} = b_n - \frac{f(b_n)(a_n - b_n)}{f(a_n) - f(b_n)} = b_n + \Delta b_n. \end{aligned}\right\} \tag{4.4}$$

Заметим, что на рисунке 4.1 обозначили $a_0 = 1{,}5$ и $b_0 = 1$, т. к. хорды проводят со стороны вогнутости графика функции, а касательные – с противоположной стороны.

Уточним корень $\tilde{x}$ комбинированным методом (т. е. вычислим его с заданной точностью $\varepsilon = 10^{-5}$) по формулам (4.4). Вычисляя, будем сохранять один запасной десятичный знак. Результаты вычислений представлены в таблице 4.1.

Таблица 4.1

n	a_n b_n	$f(a_n) = a_n^3 + a_n^2 - 3$ $f(b_n) = b_n^3 + b_n^2 - 3$	$f'(a_n) = 3a_n^2 + 2a_n$ $f(a_n) - f(b_n)$	– $f(b_n)(a_n - b_n)$	$\Delta a_n = -\frac{f(a_n)}{f'(a_n)}$ $\Delta b_n = -\frac{f(b_n)(a_n - b_n)}{f(a_n) - f(b_n)}$
0	$a_0 = 1{,}5$ $b_0 = 1$	2,625 –1	9,75 3,625	– –0,5	–0,269230 0,137930
1	1,230770 1,137930	0,379152 –0,231623	7,005910 0,610775	– –0,021503	–0,054119 0,035307
2	1,176651 1,173137	0,013583 –0,009215	6,506810 0,022798	– –0,000032	–0,002087 0,001430
3	1,174564 1,174557	0,000029 –0,000016	6,487929 0,000045	– 0	–0,000005 0
4	1,174559 1,174557				

Условие $|a_{n+1} - b_{n+1}| = |a_4 - b_4| = 0{,}000002 < 0{,}00001$ выполнено, находим

$$\tilde{x} = \frac{a_4 + b_4}{2} \approx 1,17458.$$

Результат, полученный на компьютере: $\tilde{x} \approx 1,174553$.

Ответ: $\tilde{x} \approx 1,17455$ – корень уравнения (4.1), получен с точностью 10^{-5}.

Варианты заданий даны в лабораторной работе № 3.

5 Лабораторная работа № 5. Приближенное решение уравнения вида $f(x)=0$ методом итераций

Метод простых итераций (метод последовательных приближений) решения уравнения $f(x)=0$ состоит в замене исходного уравнения эквивалентным ему уравнением $x = \varphi(x)$ и построении последовательности $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, сходящейся при $n \to \infty$ к точному решению. Сформулируем достаточные условия сходимости метода простых итераций.

Теорема. *Пусть функция* $\varphi(x)$ *определена и дифференцируема на* $[a;b]$, *причем все ее значения* $\varphi(x) \in [a;b]$. *Тогда, если существует число* q, *такое, что* $|\varphi'(x)| \le q < 1$ *на отрезке* $[a;b]$, *то последовательность* $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ $(n = 0, 1, 2, ...)$ *сходится к единственному на* $[a;b]$ *решению уравнения* $x = \varphi(x)$ *при любом начальном значении* $x_0 \in [a;b]$, *т. е.*

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) = c\ , \quad f(c) = 0\ , \quad c \in [a;b]\ .$$

Постановка задачи. Определить количество действительных корней уравнения

$$x^3 + x^2 - 3 = 0, \tag{5.1}$$

отделить эти корни и, применив метод итераций, вычислить их с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$.

Отделение действительных корней уравнения* (5.1) *графическим методом (см. лабораторную работу № 3).

Вычисление действительного корня $\tilde{x} \in [1;\, 1,5]$ ***методом итераций с заданной точностью*** $\varepsilon = 10^{-3}$.

Приведем уравнение (5.1) к виду

$$x = \varphi(x)\ . \tag{5.2}$$

Есть много способов сведения уравнения (5.1) к виду (5.2), а именно:

1) $x=\sqrt[3]{3-x^2}, \quad \varphi(x)=\sqrt[3]{3-x^2}$;

2) $x=\sqrt{3-x^3}, \quad \varphi(x)=\sqrt{3-x^3}$;

3) $x\left(x^2+x\right)-3=0, \quad x=\dfrac{3}{x^2+x}, \quad \varphi(x)=\dfrac{3}{x^2+x}$;

4) $x^2(x+1)-3=0, \quad x=\sqrt{\dfrac{3}{x+1}}, \quad \varphi(x)=\sqrt{\dfrac{3}{x+1}}$.

5) $x^3+x^2-3-10x=-10x, \qquad x=0{,}1\left(3+10x-x^2-x^3\right)$;

$\varphi(x)=0{,}1\left(3+10x-x^2-x^3\right)$.

В случаях 2 и 4 выбрали положительные значения квадратного корня, т. к. $\tilde{x}\in[1;\,1{,}5]$, т. е. $\tilde{x}>0$.

Рассмотрим случай 5.

Проверим условия сходимости метода итераций:

$$\left.\begin{aligned} &1)\ \left|\varphi'(x)\right|<1;\\ &2)\ a\le\varphi(x)\le b \end{aligned}\right\}\quad \text{для}\quad x\in[a;b]. \tag{5.3}$$

1) $\varphi'(x)=0{,}1\left(10-2x-3x^2\right)=1-0{,}2x-0{,}3x^2$;

$$\left|\varphi'(x)\right|=\left|1-0{,}2x-0{,}3x^2\right|<1 \quad \text{для} \quad x\in[1;\,1{,}5],$$

т. к. $\varphi'(1)=0{,}5>\left|1-0{,}2x-0{,}3x^2\right|>0{,}025=\varphi'(1{,}5)$;

2) $\varphi'(x)>0$ для $x\in[1;\,1{,}5]$, значит, на отрезке $[1;\,1{,}5]$ функция $\varphi(x)=0{,}1\left(3+10x-x^2-x^3\right)$ возрастает, и поэтому

$$\varphi(1)=1{,}1\le 0{,}1\left(3+10x-x^2-x^3\right)\le\varphi(1{,}5)=1{,}1375,$$

т. е. $1<\varphi(x)<1{,}5$ для $x\in[1;\,1{,}5]$.

Оба условия сходимости метода итераций выполнены.

Запишем расчетную формулу метода итераций:

$$x_{n+1}=\varphi(x_n), \qquad n=0,1,2,... \tag{5.4}$$

$$x_{n+1}=0{,}1\left(3+10x-x^2-x^3\right), \quad n=0,\ 1,\ 2,\ ... \tag{5.5}$$

Выберем нулевое приближение к корню $\tilde{x}$ и уточним $\tilde{x}$ методом итераций. Вычисляя по формуле (5.5), будем сохранять один запасной десятичный знак; за начальное приближение к корню $\tilde{x}$ возьмем $x_0=1$; закончим вычисления, когда выполнится условие

$$\left|x_{n+1}-x_n\right|<\varepsilon\ . \tag{5.6}$$

$x_1 = \varphi(x_0) = \varphi(1) = 0{,}1\left(3 + 10 \cdot 1 - 1^2 - 1^3\right) = 1{,}1$;

$x_2 = \varphi(x_1) = \varphi(1{,}1) = 0{,}1\left(3 + 10 \cdot 0{,}1 - 0{,}1^2 - 0{,}1^3\right) = 1{,}1459$;

$x_3 = \varphi(x_2) = \varphi(1{,}1459) = 0{,}1\left(3 + 10 \cdot 1{,}1459 - 1{,}1459^2 - 1{,}1459^3\right) = 1{,}1641$;

$x_4 = \varphi(x_3) = \varphi(1{,}1641) = 0{,}1\left(3 + 10 \cdot 1{,}1641 - 1{,}1641^2 - 1{,}1641^3\right) = 1{,}1768$;

$x_5 = \varphi(x_4) = \varphi(1{,}1768) = 0{,}1\left(3 + 10 \cdot 1{,}1768 - 1{,}1768^2 - 1{,}1768^3\right) = 1{,}1732$;

$x_6 = \varphi(x_5) = \varphi(1{,}1732) = 0{,}1\left(3 + 10 \cdot 1{,}1732 - 1{,}1732^2 - 1{,}1732^3\right) = 1{,}1740$;

$x_7 = \varphi(x_6) = \varphi(1{,}1740) = 0{,}1\left(3 + 10 \cdot 1{,}1740 - 1{,}1740^2 - 1{,}1740^3\right) = 1{,}1744$.

Условие (5.6) выполнено: $|x_7 - x_6| = |1{,}1744 - 1{,}1740| = 0{,}0004 < 0{,}001$.

Получили $\tilde{x} \approx x_7 = 1{,}1744$.

Выполним проверку результата, решив уравнение (5.1) на компьютере. Результат, полученный на компьютере: $\tilde{x} \approx 1{,}1744$.

Замечание – Уравнение $f(x) = 0$ может иметь более одного корня, в таком случае один из корней вычисляется подробно, значения других с необходимой точностью находятся на компьютере.

Ответ: $\tilde{x} \approx 1{,}174$ – корень уравнения (5.1), вычисленный с точностью 10^{-3}.

Варианты заданий даны в лабораторной работе № 3.

6 Лабораторная работа № 6. Аппроксимация функции по методу наименьших квадратов

Постановка задачи. Заменить многочленом второй степени функцию, заданную таблицей 6.1.

Таблица 6.1

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_k	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
y_k	2,18	2,43	2,40	2,43	2,65	2,75	2,67	2,66	2,63	2,75

Продолжение таблицы 6.1

k	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
x_k	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2
y_k	2,41	2,24	2,12	1,74	1,57	1,17	0,96	0,63	0,25	0,01

Метод наименьших квадратов при построении эмпирических формул. При обработке результатов наблюдений встречаются со следующей задачей: в итоге опыта получен ряд значений переменных x и y, однако характер функциональной зависимости между ними остается неизвестным. Требуется по полученным данным найти аналитическое выражение зависимости между x и y. Пусть результаты измерений представлены таблицей 6.2 или графиком (рисунок 6.1), который напоминает параболу.

Таблица 6.2

k	1	2	3	…	n
x_k	x_1	x_2	x_3	…	x_n
y_k	y_1	y_2	y_3	…	y_n

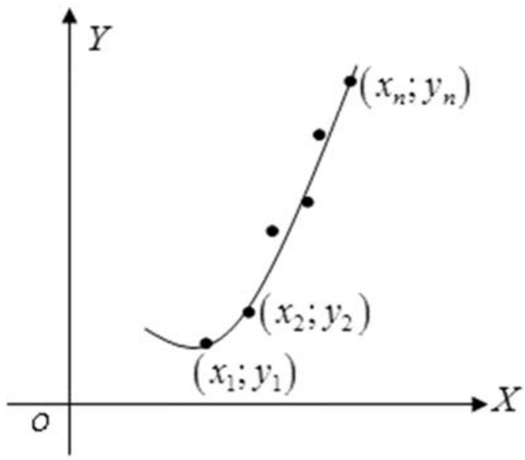

Рисунок 6.1

Запишем эмпирическую зависимость y от x, т. е. уравнение этой параболы:

$$y = ax^2 + bx + c. \tag{6.1}$$

Найдем коэффициенты a, b, c.

$$y_k \approx ax_k^2 + bx_k + c, \quad k = \overline{1,n}.$$

Возникают невязки (погрешности):

$$y_k - \left(ax_k^2 + bx_k + c\right), \quad k = \overline{1,n}.$$

Рассмотрим квадраты невязок

$$\left(y_k - ax_k^2 - bx_k - c\right)^2, \quad k = \overline{1,n},$$

и сумму квадратов невязок

$$S(a,b,c)=\sum_{k=1}^{n}\left(y_k-ax_k^2-bx_k-c\right)^2. \qquad (6.2)$$

Подберём a, b, c так, чтобы сумма квадратов невязок оказалась минимальной, т. е. функция (6.2) приняла наименьшее значение. Стационарную точку функции $S(a,b,c)$ найдем из необходимого условия экстремума:

$$\begin{cases} S'_a=\sum\limits_{k=1}^{n}2\left(y_k-ax_k^2-bx_k-c\right)\cdot\left(-x_k^2\right)=0; \\ S'_b=\sum\limits_{k=1}^{n}2\left(y_k-ax_k^2-bx_k-c\right)\cdot\left(-x_k\right)=0; \\ S'_c=\sum\limits_{k=1}^{n}2\left(y_k-ax_k^2-bx_k-c\right)\cdot\left(-1\right)=0. \end{cases}$$

Запишем последнюю систему уравнений иначе:

$$\begin{cases} a\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}x_k^4+b\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}x_k^3+c\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}x_k^2=\sum\limits_{k=1}^{n}y_k\cdot x_k^2; \\ a\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}x_k^3+b\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}x_k^2+c\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}x_k=\sum\limits_{k=1}^{n}y_k\cdot x_k; \\ a\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}x_k^2+b\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}x_k+c\cdot n=\sum\limits_{k=1}^{n}y_k. \end{cases} \qquad (6.3)$$

Решив СЛАУ (6.3) методом Гаусса, найдем стационарную точку $(a;b;c)$, в которой функция (6.2) принимает наименьшее значение. Подставив найденные значения a, b, c в (6.1), получим искомую эмпирическую формулу.

Решение задачи

По таблице 6.1 выполняем рисунок 6.2 (наносим опытные точки на график) и выбираем функциональную зависимость (6.1).

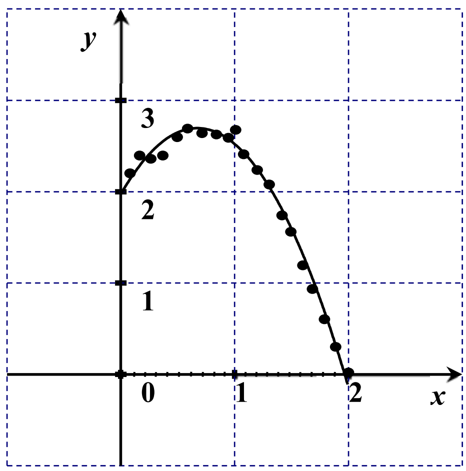

Рисунок 6.2

Составим расчетную таблицу 6.3.

Таблица 6.3

k	x_k	y_k	x_k^2	x_k^3	x_k^4	$x_k y_k$	$x_k^2 y_k$
1	0,1	2,18	0,01	0,001	0,0001	0,218	0,0218
2	0,2	2,43	0,04	0,008	0,0016	0,486	0,0972
3	0,3	2,40	0,09	0,027	0,0081	0,72	0,216
4	0,4	2,43	0,16	0,064	0,0256	0,972	0,3888
5	0,5	2,65	0,25	0,125	0,0625	1,325	0,6625
6	0,6	2,75	0,36	0,216	0,1296	1,65	0,99
7	0,7	2,67	0,49	0,243	0,2401	1,869	1,3083
8	0,8	2,66	0,64	0,512	0,4096	2,128	1,7024
9	0,9	2,63	0,81	0,729	0,6561	2,367	2,1303
10	1	2,75	1	1	1	2,25	2,75
11	1,1	2,41	1,21	1,331	1,4641	2,651	2,9161
12	1,2	2,24	1,44	1,728	2,0736	2,688	3,2256
13	1,3	2,12	1,69	2,197	2,1561	2,756	4,1552
14	1,4	1,74	1,96	2,744	3,8416	2,436	3,4104
15	1,5	1,57	2,25	3,375	5,0625	2,355	3,5325
16	1,6	1,17	2,56	4,096	6,5536	1,872	2,9952
17	1,7	0,96	2,89	4,913	8,3521	1,632	2,7744
18	1,8	0,63	3,24	5,832	10,4976	1,134	2,0412
19	1,9	0,25	3,61	6,859	13,0321	0,475	0,9025
20	2	0,01	4	8	16	0,02	0,04
$\sum_{k=1}^{20}$	21	38,63	28,7	44,1	72,2666	32,464	35,608

Используя таблицу 6.3 и СЛАУ (6.3), запишем СЛАУ:

$$\begin{cases} 72,2666 \cdot a + 44,1 \cdot b + 28,7 \cdot c = 35,608; \\ 44,1 \cdot a + 28,7 \cdot b + 21 \cdot c = 32,464; \\ 28,7 \cdot a + 21 \cdot b + 20 \cdot c = 38,63. \end{cases} \tag{6.4}$$

Решив СЛАУ (6.4) методом Гаусса на компьютере, получим

$$a \approx -1,607; \quad b \approx 2,156; \quad c \approx 1,973.$$

Запишем искомую эмпирическую функцию (6.1), построим её график (таблица 6.4 и рисунок 6.3): $y_{эмпир.} = -1,607 \cdot x^2 + 2,156 \cdot x + 1,973$.

Таблица 6.4

k	x_k	$y_k = -1,607 \cdot x_k^2 + 2,156 \cdot x_k + 1,973$
1	0,2	$-1,607 \cdot 0,2^2 + 2,156 \cdot 0,2 + 1,973 \approx 2,340$
2	0,4	$-1,607 \cdot 0,4^2 + 2,156 \cdot 0,4 + 1,973 \approx 2,578$
3	0,6	$-1,607 \cdot 0,6^2 + 2,156 \cdot 0,6 + 1,973 \approx 2,688$
4	0,8	$-1,607 \cdot 0,8^2 + 2,156 \cdot 0,8 + 1,973 \approx 2,669$
5	1	$-1,607 \cdot 1^2 + 2,156 \cdot 1 + 1,973 \approx 2,522$
6	1,2	$-1,607 \cdot 1,2^2 + 2,156 \cdot 1,2 + 1,973 \approx 2,246$
7	1,4	$-1,607 \cdot 1,4^2 + 2,156 \cdot 1,4 + 1,973 \approx 1,842$
8	1,6	$-1,607 \cdot 1,6^2 + 2,156 \cdot 1,6 + 1,973 \approx 1,310$
9	1,8	$-1,607 \cdot 1,8^2 + 2,156 \cdot 1,8 + 1,973 \approx 0,648$
10	2	$-1,607 \cdot 2^2 + 2,156 \cdot 2 + 1,973 \approx -0,141$

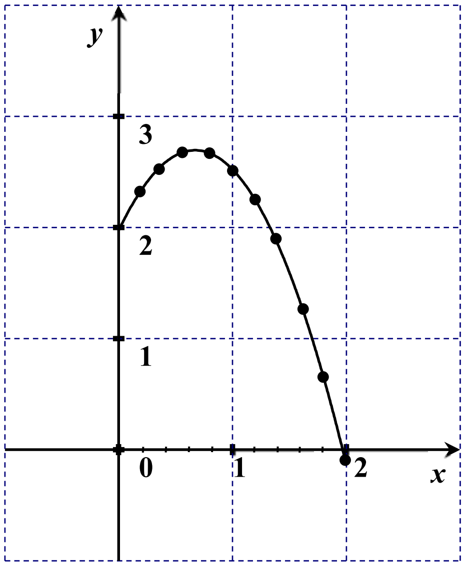

Рисунок 6.3

Выполнение проверки.

После аппроксимации функции по методу наименьших квадратов получены результаты и таблица 6.5 на компьютере:

$$a \approx -1,60703; \quad b \approx 2,15709; \quad c \approx 1,97264.$$

$$y = -1,60703x^2 + 2,15709x + 1,97264.$$

В столбце 3 вычислены значения функции по найденной эмпирической формуле. В столбце 4 вычислены невязки (отклонения), в столбце 5 – квадраты невязок. Сумма квадратов невязок равна 0,151483, при любых других коэффициентах a, b, c она будет больше.

Таблица 6.5

x_k	y_k	$y_{k\ эмпир.}$	Невязка	Квадрат невязок
1	2	3	4	5
0,1	2,18	2,172279	–0,007721	0,00006
0,2	2,43	2,339778	–0,090222	0,00814
0,3	2,40	2,475135	0,075135	0,00564
0,4	2,43	2,578352	0,148352	0,02201
0,5	2,65	2,649429	–0,000571	0,000003
0,6	2,75	2,688365	–0,061635	0,00379
0,7	2,67	2,695160	0,025160	0,00063
0,8	2,66	2,669815	0,009815	0,00009
0,9	2,63	2,612329	–0,017671	0,00031
1	2,75	2,522703	–0,227297	0,05166
1,1	2,41	2,400936	0,009064	0,00008
1,2	2,24	2,247029	0,007029	0,00005
1,3	2,12	2,060981	–0,059019	0,00348
1,4	1,74	1,842792	0,102792	0,01057
1,5	1,57	1,592463	0,022463	0,00050
1,6	1,17	1,309993	0,139993	0,01959
1,7	0,96	0,995382	0,035382	0,00125
1,8	0,63	0,648631	0,018631	0,00035
1,9	0,25	0,269740	0,019740	0,00039
2	0,01	– 0,141292	– 0,151292	0,02289
				$\sum_{k=1}^{20} = 0{,}151483$

Варианты заданий к лабораторной работе № 6

Варианты заданий представлены в таблице 6.6. Значения $x_k = 0{,}1 \cdot k$, $k = \overline{1,20}$, одинаковы для всех вариантов.

Таблица 6.6

x_k	Значение $y_k = y(x_k)$									
	Вариант **1**	Вариант **2**	Вариант **3**	Вариант **4**	Вариант **5**	Вариант **6**	Вариант **7**	Вариант **8**	Вариант **9**	Вариант **10**
0,1	2,05	2,09	2,02	1,99	2,23	2,07	–0,10	–0,16	2,09	2,15
0,2	1,94	2,05	1,98	2,03	2,29	2,17	–0,21	0,01	2,31	2,41
0,3	1,92	2,19	1,67	2,20	2,27	2,21	0,01	0,10	2,72	2,58
0,4	1,87	2,18	1,65	2,39	2,62	2,31	0,05	0,16	2,77	2,84
0,5	1,77	2,17	1,57	2,19	2,72	2,10	–0,13	0,05	2,78	3,28
0,6	1,88	2,27	1,42	2,61	2,82	2,09	–0,23	0,35	2,97	3,46
0,7	1,71	2,58	1,37	2,35	3,13	2,12	–0,21	0,19	3,00	4,02
0,8	1,60	2,73	1,07	2,60	3,49	1,63	–0,43	0,50	3,51	4,11
0,9	1,56	2,82	0,85	2,55	3,82	1,78	–0,57	0,74	3,43	4,61
1	1,40	3,04	0,48	2,49	3,95	1,52	–0,44	1,03	3,58	5,03
1,1	1,50	3,03	0,35	2,50	4,22	1,16	–0,44	1,06	3,59	5,34
1,2	1,26	3,45	–0,30	2,52	4,48	1,07	–0,83	1,49	3,54	5,86
1,3	0,99	3,62	–0,61	2,44	5,06	0,85	–0,78	1,79	3,82	6,33
1,4	0,97	3,85	–1,20	2,35	5,50	0,56	–0,81	2,03	3,90	6,81
1,5	0,91	4,19	–1,39	2,26	5,68	0,10	–1,06	2,22	3,77	7,21
1,6	0,71	4,45	–1,76	2,19	6,19	–0,25	–1,41	2,50	3,81	7,67
1,7	0,43	4,89	–2,28	2,24	6,42	–0,65	–1,40	2,88	4,00	8,23
1,8	0,54	5,06	–2,81	2,34	7,04	–1,06	–1,70	3,21	3,97	8,68
1,9	0,19	5,63	–3,57	1,96	7,57	–1,66	–1,96	3,63	4,08	9,35
2	0,01	5,91	–4,06	2,19	8,10	–2,01	–1,91	3,90	4,08	9,93

Продолжение таблицы 6.6

x_k	Значение $y_k = y(x_k)$									
	Вариант **11**	Вариант **12**	Вариант **13**	Вариант **14**	Вариант **15**	Вариант **16**	Вариант **17**	Вариант **18**	Вариант **19**	Вариант **20**
0,1	0,10	0,17	0,80	0,04	0,08	–0,02	0,14	–1,86	–1,65	–1,89
0,2	–0,01	0,07	0,29	0,47	0,14	0,44	0,23	–1,95	–2,00	–2,07
0,3	–0,19	0,17	0,52	0,78	0,37	0,51	0,44	–2,12	–1,87	–2,30
0,4	–0,11	0,05	0,77	1,01	0,36	0,67	0,54	–2,06	–1,89	–2,26
0,5	–0,31	0,12	0,93	1,19	0,44	0,69	0,72	–2,15	–1,75	–2,34
0,6	–0,78	0,00	1,20	1,60	0,48	1,04	0,76	–2,00	–1,59	–2,66
0,7	–0,64	0,01	1,20	1,93	0,27	1,14	0,37	–2,12	–1,44	–2,88
0,8	–0,85	–0,05	1,35	2,22	0,39	1,37	0,64	–2,31	–1,51	–2,85
0,9	–1,18	–0,21	1,39	2,50	0,50	1,77	0,57	–2,29	–1,00	–3,16
1	–1,39	–0,50	1,48	3,01	0,48	2,00	0,44	–2,57	–1,17	–3,49
1,1	–1,79	–0,50	1,52	3,22	0,69	2,12	0,41	–2,56	–0,87	–3,88
1,2	–2,02	–0,86	1,71	3,71	0,50	2,47	0,30	–2,86	–0,47	–4,22
1,3	–2,48	–1,24	1,72	4,23	0,31	2,90	–0,01	–2,85	–0,33	–4,45
1,4	–2,90	–1,47	1,87	4,78	0,37	3,50	–0,03	–3,03	–0,01	–4,99
1,5	–3,26	–1,79	1,86	5,27	0,43	3,99	–0,47	–3,25	0,34	–5,36
1,6	–3,91	–2,25	1,89	5,75	0,33	4,06	–0,68	–3,08	0,49	–5,71
1,7	–4,41	–2,55	2,04	6,16	0,31	4,54	–0,93	–3,29	0,81	–6,51
1,8	–4,91	–3,18	1,73	6,76	0,09	4,99	–1,28	–3,67	1,37	–6,76
1,9	–5,30	–3,60	2,04	7,30	0,08	5,36	–1,53	–3,70	1,72	–7,35
2	–6,00	–3,93	2,03	8,00	0,03	5,99	–1,93	–3,85	2,03	–8,02

Окончание таблицы 6.6

x_k	Значение $y_k = y(x_k)$									
	Вариант **21**	Вариант **22**	Вариант **23**	Вариант **24**	Вариант **25**	Вариант **26**	Вариант **27**	Вариант **28**	Вариант **29**	Вариант **30**
0,1	–1,84	–1,92	–1,90	–1,80	–1,65	–1,88	–1,84	–4,13	–3,97	3,18
0,2	–1,98	–1,60	–1,80	–1,66	–1,54	–1,69	–1,98	–4,11	–4,07	3,43
0,3	–1,72	–1,57	–1,82	–1,36	–1,41	–1,52	–1,72	–3,87	–4,04	3,40
0,4	–1,58	–1,41	–1,86	–1,41	–0,91	–1,55	–1,58	–3,74	–4,30	3,43
0,5	–1,59	–1,36	–1,83	–1,13	–0,63	–1,16	–1,59	–3,85	–4,27	3,65
0,6	–1,59	–0,97	–2,02	–0,82	–0,34	–1,27	–1,59	–3,71	–4,54	3,73
0,7	–1,58	–0,59	–2,01	–0,74	–0,12	–1,23	–1,58	–3,53	–4,79	3,67
0,8	–1,64	–0,71	–2,05	–0,76	0,25	–1,36	–1,64	–3,56	–5,07	3,66
0,9	–1,55	–0,15	–2,46	–0,64	0,64	–1,26	–1,55	–3,19	–5,30	3,63
1	–1,35	0,01	–2,68	–0,46	0,96	–1,47	–1,35	–3,04	–5,51	3,75
1,1	–1,33	0,22	–2,85	–0,30	1,50	–1,72	–1,33	–2,83	–5,83	3,41
1,2	–1,47	0,63	–2,98	–0,27	1,77	–1,76	–1,47	–2,54	–6,06	3,24
1,3	–1,50	1,07	–3,30	–0,22	2,24	–2,00	–1,50	–2,41	–6,40	3,12
1,4	–1,65	1,42	–2,40	–0,11	2,93	–2,03	–1,65	–1,97	–6,83	2,74
1,5	–1,62	1,68	–3,90	–0,02	3,17	–2,35	–1,62	–1,78	–7,54	2,57
1,6	–1,87	2,49	–4,37	–0,11	3,77	–2,46	–1,87	–1,53	–7,68	2,17
1,7	–1,61	2,57	–4,65	0,11	4,42	–2,88	–1,61	–1,04	–8,36	1,96
1,8	–1,86	3,09	–5,00	–0,02	4,79	–3,27	–1,86	–0,86	–8,91	1,63
1,9	–1,84	3,40	–5,42	–0,03	5,50	–3,68	–1,84	–0,48	–9,39	1,25
2	–1,91	4,00	–6,13	0,01	6,01	–3,98	–1,91	0,09	–9,98	0,99

7 Лабораторная работа № 7. Приближенное вычисление определенного интеграла по формулам прямоугольников, трапеций, Симпсона

Постановка задачи. Вычислить по формулам прямоугольников, трапеций и Симпсона с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$ определенный интеграл

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}. \tag{7.1}$$

Формулы прямоугольников, трапеций, Симпсона.

Разобьем отрезок $[a;b]$ на n равных частей точками $x_k = a + kh$, где $h = \frac{b-a}{n}$, $k = \overline{0,n}$, и вычислим значения подынтегральной функции в узлах x_k, получим $y_k = f(x_k)$.

Формула прямоугольников имеет вид (рисунок 7.1):

$$\int_a^b f(x)dx \approx h(y_0 + y_1 + y_2 + ... + y_{n-1}). \tag{7.2}$$

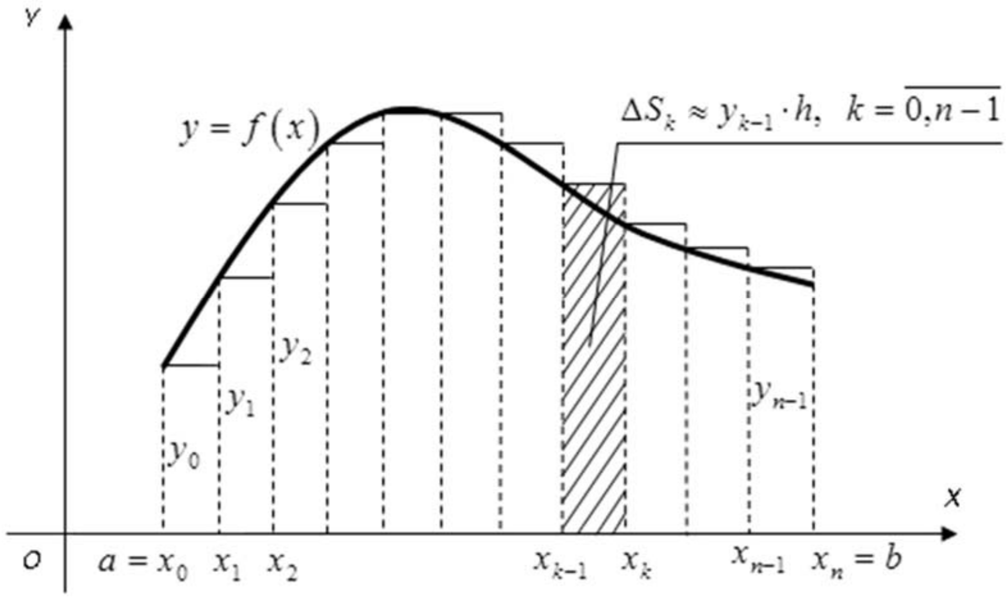

Рисунок 7.1

Формула трапеций имеет вид (рисунок 7.2):

$$\int_a^b f(x)dx \approx \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + ... + y_{n-1}\right) \cdot h. \tag{7.3}$$

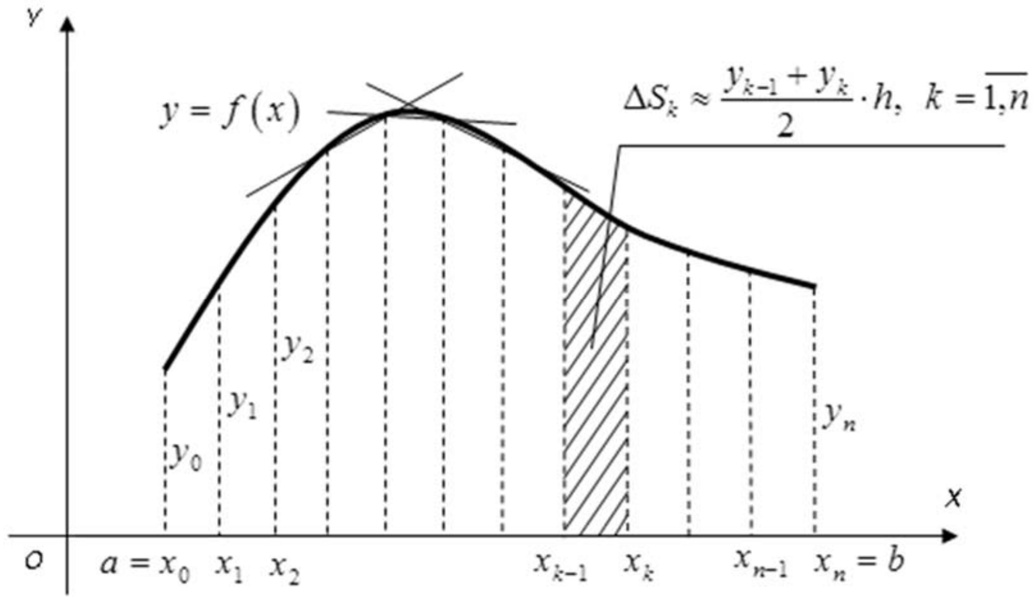

Рисунок 7.2

Формула Симпсона ($n = 2m$) имеет вид (рисунок 7.3):

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(y_0 + y_n + 4\left(y_1 + y_3 + ... + y_{n-1}\right) + 2\left(y_2 + y_4 + ... + y_{n-2}\right)\right). \qquad (7.4)$$

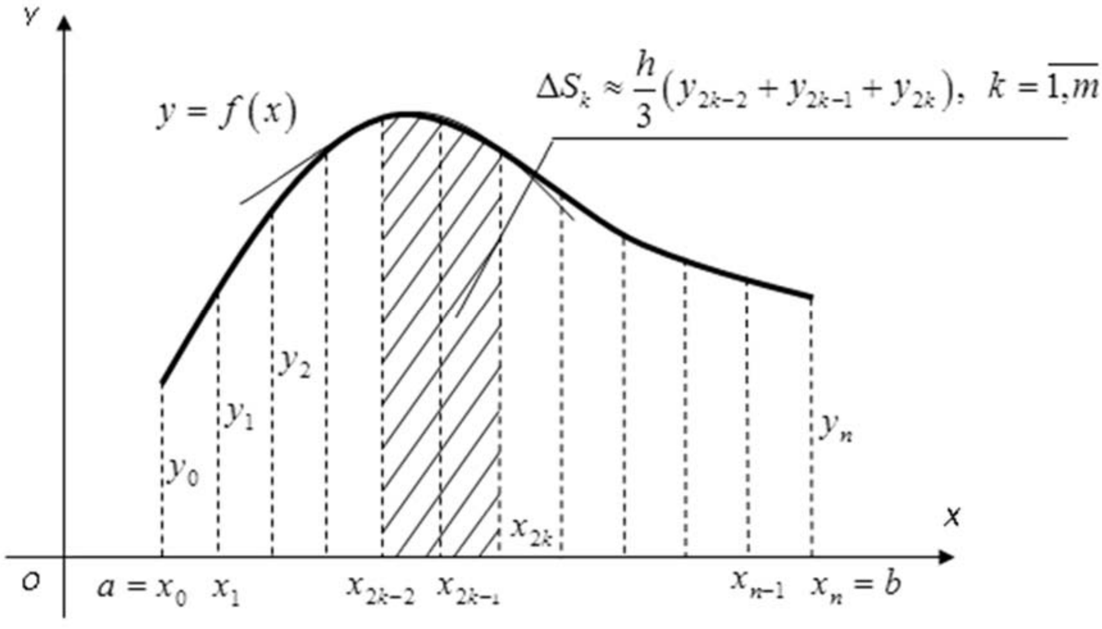

Рисунок 7.3

***Приближенное вычисление интеграла* (7.1) *по формулам* (7.2)–(7.4).**

Разобьем отрезок $[0;1]$ сначала на $n = 4$ равных частей с шагом $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{4} = 0,25$. Вычислим значения функции $y_k = \frac{1}{1+x_k}$ в узлах

$x_k = a + kh = 0 + k \cdot 0{,}25 = 0{,}25 \cdot k$, $\left(k = \overline{0{,}4}\right)$. Результаты вычислений записаны в таблице 7.1.

Таблица 7.1

k	0	1	2	3	4
x_k	0	0,25	0,5	0,75	1
$y_k = \dfrac{1}{1+x_k}$	1	0,8	0,6667	0,5714	0,5

Воспользуемся формулами (7.2)–(7.4):

$$I_{4П} \approx h(y_0 + y_1 + y_2 + y_3) = 0{,}25(1 + 0{,}8 + 0{,}6667 + 0{,}5714) \approx 0{,}7595;$$

$$I_{4Ò} \approx h\left(\frac{y_0 + y_4}{2} + y_1 + y_2 + y_3\right) = 0{,}25\left(\frac{1+0{,}5}{2} + 0{,}8 + 0{,}6667 + 0{,}5714\right) \approx$$
$$\approx 0{,}6970;$$

$$I_{4C} \approx \frac{h}{3}\left(y_0 + y_4 + 4(y_1 + y_3) + 2y_2\right) = \frac{0{,}25}{3}\left(1 + 0{,}5 + 4(0{,}8 + 0{,}5714) + \right.$$
$$\left. + 2 \cdot 0{,}6667\right) \approx 0{,}6932.$$

Затем разобьем отрезок $[0;1]$ на $n = 8$ равных частей с шагом $h = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{1-0}{8} = 0{,}125$. Вычислим значения функции $y_k = \dfrac{1}{1+x_k}$ в узлах $x_k = a + kh = 0 + k \cdot 0{,}125 = 0{,}125 \cdot k$, $\left(k = \overline{0{,}8}\right)$. Результаты вычислений записаны в таблице 7.2.

Таблица 7.2

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x_k	0	0,125	0,25	0,375	0,5	0,625	0,75	0,875	1
$y_k = \dfrac{1}{1+x_k}$	1	0,8889	0,8	0,7273	0,6667	0,6154	0,5714	0,5333	0,5

Воспользуемся формулами (7.2)–(7.4):

$$I_{8П} \approx h\left(y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7\right) = 0{,}125(1 + 0{,}8889 + 0{,}8 +$$
$$+ 0{,}7273 + 0{,}6667 + 0{,}6154 + 0{,}5714 + 0{,}5333)) \approx 0{,}7254;$$

$$I_{8T} \approx h\left(\frac{y_0+y_8}{2}+y_1+y_2+y_3+y_4+y_5+y_6+y_7\right)=0{,}125(\frac{1+0{,}5}{2}+0{,}8889+0{,}8+$$
$$+\,0{,}7273+0{,}6667+0{,}6154+0{,}5714+0{,}533)\approx 0{,}6941;$$
$$I_{8C} \approx \frac{h}{3}\left(y_0+y_8+4\left(y_1+y_3+y_5+y_7\right)+2\left(y_2+y_4+y_6\right)\right)=\frac{0{,}125}{3}(1+0{,}5+$$
$$+4(0{,}8889+0{,}7273+0{,}6154+0{,}5333)+2(0{,}8+0{,}6667+0{,}5714))\approx 0{,}6937.$$

Сравнивая два последовательных приближения (т. е. два приближения по каждому методу), приходим к выводу:

1) вычисляя по формуле прямоугольников, получили $\int_0^1 \frac{dx}{1+x} \approx 0{,}7$, погрешность этого приближенного равенства 10^{-1}, т. к.

$$\left|I_{8П}-I_{4П}\right|=\left|0{,}7254-0{,}7595\right|=0{,}0371<0{,}1;$$

2) вычисляя по формуле трапеций, пришли к результату $\int_0^1 \frac{dx}{1+x} \approx 0{,}69$, получили значение интеграла с точностью 10^{-2}, т. к.

$$\left|I_{8T}-I_{4T}\right|=\left|0{,}6941-0{,}6970\right|=0{,}0029<0{,}01;$$

3) вычисляя по формуле Симпсона, получили $\int_0^1 \frac{dx}{1+x} \approx 0{,}693$ и получили значение интеграла с требуемой точностью 10^{-3}, т. к.

$$\left|I_{8C}-I_{4C}\right|=\left|0{,}6937-0{,}6932\right|=0{,}0005<0{,}001.$$

Чтобы получить результат с необходимой точностью по формулам прямоугольников и трапеций, надо продолжить вычисления, выбирая $n=16$, $n=32$ и т. д.

Ответ: $\int_0^1 \frac{dx}{1+x} \approx 0{,}693$.

Проверка полученного результата.

Способ 1. Интеграл (7.1) можно вычислить точно:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x}=\int_0^1 \frac{d\left(1+x\right)}{1+x}=\ln\left|1+x\right|\Big|_0^1=\ln 2-\ln 1=\ln 2\approx 0{,}693.$$

Способ 2. Вычислим интеграл (7.1) с заданной точностью по формуле Симпсона на компьютере и получим результат $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x} \approx 0{,}693$.

Варианты заданий к лабораторной работе № 7

1 $\int\limits_0^1 x e^{-x^2} dx$.

2 $\int\limits_1^2 \frac{\ln x}{x} dx$.

3 $\int\limits_0^{\pi/2} x \cos x^2 dx$.

4 $\int\limits_0^{\pi/2} \cos\left(x + x^2\right) dx$.

5 $\int\limits_1^2 e^{-\left(x+\frac{1}{x}\right)} dx$.

6 $\int\limits_0^4 \frac{dx}{1+x^4}$.

7 $\int\limits_0^{\pi/2} e^{\sin x} dx$.

8 $\int\limits_0^{\pi/2} \ln\left(1 + \cos x\right) dx$.

9 $\int\limits_1^3 \frac{e^x}{x} dx$.

10 $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx$.

11 $\int\limits_0^2 \frac{dx}{1+x^3}$.

12 $\int\limits_0^2 \sqrt{x} \cos x dx$.

13 $\int\limits_0^2 \sqrt{x} e^x dx$.

14 $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} \frac{\cos x}{x} dx$.

15 $\int\limits_0^2 \frac{x}{e^x} dx$.

16 $\int\limits_1^3 \frac{dx}{x+x^2}$.

17 $\int\limits_0^{\pi/3} \sqrt{\cos x} dx$.

18 $\int\limits_1^2 \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$.

19 $\int\limits_2^3 \frac{dx}{\ln x}$.

20 $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+x} dx$.

21 $\int\limits_0^2 \sqrt{1+x^3} dx$.

22 $\int\limits_0^2 \ln\left(1+x\right) dx$.

23 $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+e^x}$.

24 $\int\limits_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$.

25 $\int\limits_0^1 x\sqrt{2-x^2} dx$.

26 $\int\limits_1^5 \frac{x dx}{\sqrt{4x+5}}$.

27 $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

28 $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$.

29 $\int\limits_1^4 \frac{dx}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}$.

30 $\int\limits_0^{\pi} \sin\sqrt{x} dx$.

8 Лабораторная работа № 8. Приближенное решение системы нелинейных уравнений методом итераций

Постановка задачи. Используя метод итераций, решить систему нелинейных уравнений (СНУ) с точностью $\varepsilon = 10^{-2}$:

$$\begin{cases} \sin(y+0,5) - x = 1, \\ \cos(x-2) + y = 0 \end{cases} \tag{8.1}$$

Приближенное решение СНУ методом итераций.

1 Графический метод. Графическим методом определим число решений и найдем нулевое приближение $(x_0; y_0)$ к искомому решению ($\tilde{x}, \tilde{y}$) СНУ (8.1). Для этого построим графики функций $\sin(y+0,5) - x = 1$ и $\cos(x-2) + y = 0$. Воспользуемся методом сдвига и деформации. Сначала построим график функции $x = \sin(y+0,5) - 1$:

1) $x = \sin y$;

2) $x = \sin(y+0,5)$ (сместим график функции $x = \sin y$ на 0,5 вниз параллельно оси Ox);

3) $x = \sin(y+0,5) - 1$ (сместим предыдущий график на 1 влево параллельно оси Ox).

Аналогично строим график функции $y = -\cos(x-2)$:

1) $y = \cos x$;

2) $y = \cos(x-2)$ (сместим график функции $y = \cos x$ на 2 вправо параллельно оси Ox);

3) $y = -\cos(x-2)$ (зеркально отобразим предыдущий график относительно оси Ox) (рисунок 8.1).

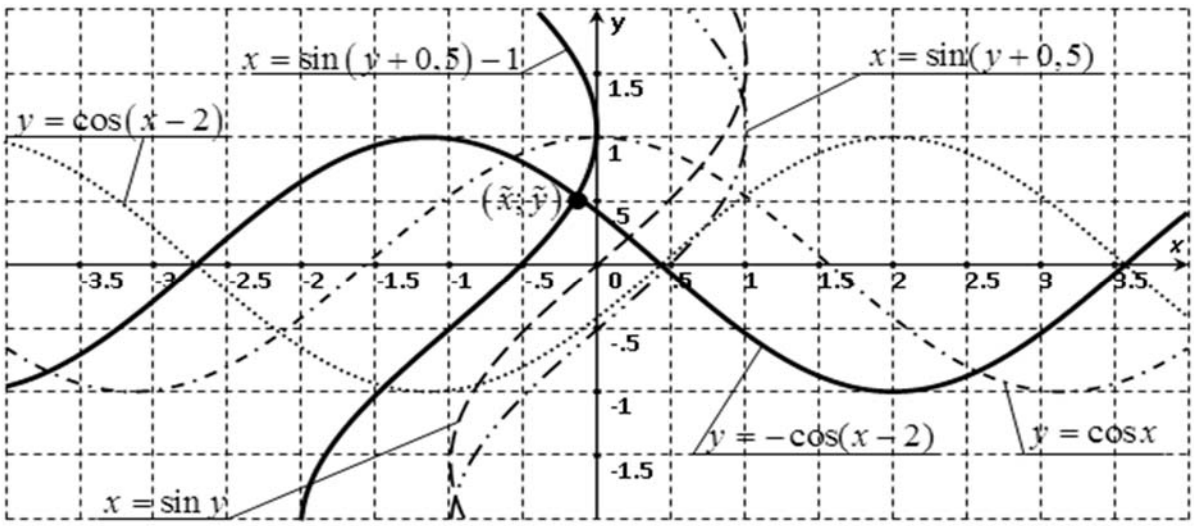

Рисунок 8.1

Вывод: СНУ (8.1) имеет одно решение ($\tilde{x};\tilde{y}$). Найдем нулевое приближение к решению ($\tilde{x};\tilde{y}$): из рисунка 8.1 видно, что $\tilde{x} \approx x_0 = -0,2$, $\tilde{y} \approx y_0 = 0,6$; получили точку P_0(–0,2; 0,6).

2 Проверка условий сходимости метода итераций. СНУ (8.1) представим в виде $\begin{cases} x = f\left(x,y\right); \\ y = \varphi\left(x,y\right). \end{cases}$

Имеем

$$\begin{cases} x = \sin\left(y+0,5\right)-1; \\ y = -\cos\left(x-2\right). \end{cases} \qquad (8.2)$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} f\left(x,y\right) = \sin(y+0,5)-1; \\ \varphi\left(x,y\right) = -\cos\left(x-2\right). \end{array}$$

Условия сходимости метода итераций для СНУ (8.2):

$$\begin{cases} \left|f'_x\left(x_0,y_0\right)\right| < 1, \quad \left|\varphi'_x\left(x_0,y_0\right)\right| < 1; \\ \left|f'_y\left(x_0,y_0\right)\right| < 1, \quad \left|\varphi'_y\left(x_0,y_0\right)\right| < 1. \end{cases} \qquad (8.3)$$

От функций $f\left(x,y\right)$ и $\varphi\left(x,y\right)$ находим частные производные и их значения в точке P_0:

$$f'_x = 0, \quad f'_y = \cos\left(y+0,5\right), \quad \left|f'_y\left(-0,2;0,6\right)\right| = \left|\cos\left(0,6+0,5\right)\right| \approx 0,453 < 1;$$

$$\varphi'_y\left(x,y\right) = \sin\left(x-2\right), \varphi\left(x,y\right), \left|\varphi'_x\left(-0,2;0,6\right)\right| = \left|\sin\left(-0,2-2\right)\right| \approx \left|-0,808\right| < 1.$$

Итак, условия сходимости метода итераций выполнены, процесс повторений будет сходящимся.

3 Расчетные формулы метода итераций. Используя СНУ (8.2), запишем расчетные формулы метода итераций:

$$\begin{cases} x_{n+1} = \sin\left(y_n+0,5\right)-1; \\ y_{n+1} = -\cos\left(x_n-2\right), \quad n = 0,1,2,.... \end{cases} \qquad (8.4)$$

Вычисляем по формулам (8.4), придавая n последовательно значения 0, 1, 2, … . Вычисления проводим, сохраняя два запасных десятичных знака (четыре знака после запятой). Окончим вычисления, когда выполнятся условия:

$$\begin{cases} |x_n - x_{n+1}| \le \varepsilon; \\ |y_n - y_{n+1}| \le \varepsilon. \end{cases} \tag{8.5}$$

Если условия (8.5) выполнены, то полагаем $\tilde{x} \approx x_{n+1}$, $\tilde{y} \approx y_{n+1}$.

4 Нахождение решения $(\tilde{x};\tilde{y})$ *с заданной точностью.*

Шаг 1. При $n = 0$ из формул (8.4) имеем

$$\begin{cases} x_1 = \sin(y_0 + 0,5) - 1 = \sin(0,6 + 0,5) - 1 \approx -0,1088; \\ y_1 = -\cos(x_0 - 2) = -\cos(-0,2 - 2) \approx 0,5885. \end{cases}$$

$(x_1; y_1) = (-0,1088; 0,5885)$ – первое приближение к решению $(\tilde{x};\tilde{y})$.

Шаг 2. При $n = 1$ из формул (8.4) имеем

$$\begin{cases} x_2 = \sin(y_1 + 0,5) - 1 = \sin(0,5885 + 0,5) - 1 \approx -0,1140; \\ y_2 = -\cos(x_1 - 2) = -\cos(-0,1088 - 2) \approx 0,5124. \end{cases}$$

$(x_2; y_2) = (-0,1140;\ 0,5124)$ – второе приближение к решению $(\tilde{x};\tilde{y})$.

Шаг 3. При $n = 2$ из формул (8.4) имеем

$$\begin{cases} x_3 = \sin(y_2 + 0,5) - 1 = \sin(0,5124 + 0,5) - 1 \approx -0,1519; \\ y_3 = -\cos(x_2 - 2) = -\cos(-0,1140 - 2) \approx 0,5169. \end{cases}$$

$(x_3; y_3) = (-0,1519; 0,5169)$ – третье приближение к решению $(\tilde{x};\tilde{y})$.

Шаг 4. При $n = 3$ из формул (8.4) имеем

$$\begin{cases} x_4 = \sin(y_3 + 0,5) - 1 = \sin(0,5169 + 0,5) - 1 \approx -0,1495; \\ y_4 = -\cos(x_3 - 2) = -\cos(-0,1519 - 2) \approx 0,5489. \end{cases}$$

Шаг 5. При $n = 4$ из формул (8.4) имеем

$$\begin{cases} x_5 = \sin(y_4 + 0,5) - 1 = \sin(0,5489 + 0,5) - 1 \approx -0,1331; \\ y_5 = -\cos(x_4 - 2) = -\cos(-0,1495 - 2) \approx 0,5469. \end{cases}$$

Шаг 6. При $n = 5$ из формул (8.4) имеем

$$\begin{cases} x_6 = \sin\left(y_5 + 0,5\right) - 1 = \sin\left(0,5469 + 0,5\right) - 1 \approx -0,1341; \\ y_6 = -\cos\left(x_5 - 2\right) = -\cos\left(-0,1331 - 2\right) \approx 0,5331. \end{cases}$$

Шаг 7. При $n = 6$ из формул (8.4) имеем

$$\begin{cases} x_7 = \sin\left(y_6 + 0,5\right) - 1 = \sin\left(0,5331 + 0,5\right) - 1 \approx -0,1411; \\ y_7 = -\cos\left(x_6 - 2\right) = -\cos\left(-0,1341 - 2\right) \approx 0,5340. \end{cases}$$

Результаты вычислений заносим в таблицу 8.1.

Таблица 8.1

n	x_n	y_n	$\lvert x_n - x_{n+1}\rvert$	$\lvert y_n - y_{n+1}\rvert$
0	–0,2	0,6	–	–
1	–0,1088	0,5885	0,0912	0,0115
2	–0,1141	0,5124	0,0053	0,0761
3	–0,1519	0,5170	0,0378	0,0046
4	–0,1495	0,5489	0,0024	0,0319
5	–0,1331	0,5469	0,0164	0,002
6	–0,1341	0,5331	0,001	0,0138
7	–0,1411	0,5340	0,007	0,0009

Условия (8.5) выполнены:

$$\lvert x_6 - x_7\rvert = \lvert -0,1341 + 0,1411\rvert = 0,007 < 10^{-2};$$

$$\lvert y_6 - y_7\rvert = \lvert 0,5331 - 0,5340\rvert = 0,0009 < 10^{-2}.$$

Следовательно, $\tilde{x} \approx x_7 = -0,1411$, $\tilde{y} \approx y_7 = 0,5340$.

Ответ: СНУ (8.1) имеет одно решение: $\tilde{x} \approx -0,14$, $\tilde{y} \approx 0,53$.

Проверка результата. Проведем проверку результата в лабораторной работе № 9.

Варианты заданий к лабораторной работе № 8

1 $\begin{cases} \sin(x+1) - y = 1{,}2; \\ 2x + \cos y = 2. \end{cases}$

2 $\begin{cases} \cos x + y = 1{,}5; \\ 2x - \sin(y - 0{,}5) = 1. \end{cases}$

3 $\begin{cases} \sin(x-1) = 1{,}3 - y; \\ x - \sin(y+1) = 0{,}8. \end{cases}$

4 $\begin{cases} \sin(x+2) - y = 1{,}5; \\ x + \cos(y-2) = 0{,}5. \end{cases}$

5 $\begin{cases} \sin y + 2x = 2; \\ \cos(x-1) + y = 0{,}7. \end{cases}$

6 $\begin{cases} \sin(y-1) + x = 1{,}3; \\ y - \sin(x+1) = 0{,}8. \end{cases}$

7 $\begin{cases} \sin(y+2) - x = 1{,}5; \\ y + \cos(x-2) = 0{,}5. \end{cases}$

8 $\begin{cases} \sin x + 2y = 1{,}6; \\ \cos(y-1) + x = 1. \end{cases}$

9 $\begin{cases} \cos(x+0{,}5) + y = 1; \\ \sin y - 2x = 2. \end{cases}$

10 $\begin{cases} \cos(y-1) + x = 0{,}8; \\ y - \cos x = 2. \end{cases}$

11 $\begin{cases} \sin x + 2y = 2; \\ \cos(y-1) + x = 0{,}7. \end{cases}$

12 $\begin{cases} \cos(x+0{,}5) + y = 0{,}8; \\ \sin y - 2x = 1{,}6. \end{cases}$

13 $\begin{cases} \cos(x+0{,}5) - y = 2; \\ \sin y - 2x = 1. \end{cases}$

14 $\begin{cases} \cos(x-1) + y = 0{,}5; \\ x - \cos y = 3. \end{cases}$

15 $\begin{cases} \sin(x+0{,}5) - y = 1; \\ \cos(y-2) + x = 0. \end{cases}$

16 $\begin{cases} 2y - \cos(x+1) = 0; \\ x + \sin y = -0{,}4. \end{cases}$

17 $\begin{cases} \sin(y+1) - x = 1{,}2; \\ 2y + \cos x = 2. \end{cases}$

18 $\begin{cases} \cos y + x = 1{,}5; \\ 2y - \sin(x-0{,}5) = 1. \end{cases}$

19 $\begin{cases} 2x - \cos(y+1) = 0; \\ y + \sin x = -0{,}4. \end{cases}$

20 $\begin{cases} \sin(x+1) - y = 1; \\ \cos y + 2x = 2. \end{cases}$

21 $\begin{cases} \cos x + y = 1{,}2; \\ 2x - \sin(y-0{,}5) = 2. \end{cases}$

22 $\begin{cases} \sin(x-1) + y = 1{,}5; \\ x - \sin(y+1) = 1. \end{cases}$

23 $\begin{cases} \cos(x-1) + y = 1; \\ \sin y + 2x = 1{,}6. \end{cases}$

24 $\begin{cases} \cos(y+0{,}5) - x = 2; \\ \sin x - 2y = 1. \end{cases}$

25 $\begin{cases} \cos(x-1) + y = 0{,}8; \\ x - \cos y = 2. \end{cases}$

26 $\begin{cases} \sin(x+0{,}5) - y = 1{,}2; \\ \cos(y-2) + x = 0. \end{cases}$

27 $\begin{cases}\cos(y-1)+x=0,5;\\ y-\cos x=3.\end{cases}$

28 $\begin{cases}\cos(y+0,5)+x=0,8;\\ \sin x-2y=1,6.\end{cases}$

29 $\begin{cases}\sin(y+1)-x=1;\\ 2y+\cos x=2.\end{cases}$

30 $\begin{cases}\sin(x-0,6)-y=1,6;\\ 3x-\cos y=0,9.\end{cases}$

9 Лабораторная работа № 9. Приближенное решение системы нелинейных уравнений методом Ньютона

Постановка задачи. Решить методом Ньютона систему нелинейных уравнений (СНУ) с точностью $\varepsilon=10^{-2}$:

$$\begin{cases}\sin\left(y+0,5\right)-x=1;\\ y=-\cos\left(x-2\right).\end{cases} \tag{9.1}$$

Решение СНУ (9.1) методом Ньютона с заданной точностью.

1 Графический метод. Найдем число решений СНУ (9.1) и нулевое приближение $\left(x_0;y_0\right)$ к искомому решению $\left(\tilde{x};\tilde{y}\right)$ СНУ (9.1) (см. лабораторную работу № 8); из рисунка 8.1 имеем $P_0\left(-0,2;\,0,6\right)$.

2 Проверка условия сходимости метода Ньютона. Проверим условие сходимости метода Ньютона (якобиан, вычисленный в точке $P_0\left(x_0;y_0\right)$, отличен от нуля):

$$\begin{vmatrix}F'_{\mathrm{x}}(\mathrm{P}_0) & F'_{\mathrm{y}}(\mathrm{P}_0)\\ \Phi'_{\mathrm{x}}\left(P_0\right) & \Phi'_{\mathrm{y}}\left(P_0\right)\end{vmatrix}\neq 0. \tag{9.2}$$

СНУ (9.1) приводим к виду $\begin{cases}F\left(x,y\right)=0;\\ \Phi\left(x,y\right)=0.\end{cases}$

Получим

$$\begin{cases}\sin\left(y+0,5\right)-x-1=0;\\ y+\cos\left(x-2\right)=0;\end{cases}\Rightarrow\begin{array}{l}F\left(x,y\right)=\sin\left(y+0,5\right)-x-1;\\ \Phi\left(x,y\right)=y+\cos\left(x-2\right).\end{array} \tag{9.3}$$

Найдем частные производные от функций $F\left(x,y\right)$ и $\Phi\left(x,y\right)$:

$$F'_x=-1,\quad F'_y=\cos\left(y+0,5\right),\quad \Phi'_x=-\sin\left(x-2\right),\quad \Phi'_y=1.$$

Вычислим их значения в точке $P_0\left(-0,2;\ 0,6\right)$:

$$F'_x(P_0) = -1, \qquad F'_y(P_0) = \cos\left(0,6+0,5\right) \approx 0,4535,$$

$$\Phi'_x(P_0) = -\sin\left(-0,2-2\right) \approx 0,8085, \qquad \Phi'_y(P_0) = 1.$$

Составим якобиан и вычислим его:

$$\begin{vmatrix} F'_x\left(P_0\right) & F'_y\left(P_0\right) \\ \Phi'_x\left(P_0\right) & \Phi'_y\left(P_0\right) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0,4535 \\ 0,8085 & 1 \end{vmatrix} = -1-0,3666 = -1,3666 \neq 0.$$

Следовательно, условие сходимости метода Ньютона выполнено и процесс повторений в методе Ньютона будет сходящимся.

3 Рабочие формулы метода Ньютона. Запишем рабочие формулы метода Ньютона:

$$\begin{cases} F\left(x_n, y_n\right) + F'_x\left(x_n, y_n\right)\left(x_{n+1}-x_n\right) + F'_y\left(x_n, y_n\right)\left(y_{n+1}-y_n\right) = 0; \\ \Phi\left(x_n, y_n\right) + \Phi'_x\left(x_n, y_n\right)\left(x_{n+1}-x_n\right) + \Phi'_y\left(x_n, y_n\right)\left(y_{n+1}-y_n\right) = 0, \end{cases} \tag{9.4}$$
$$n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Система уравнений (9.4) – СЛАУ. Решая ее по формулам Крамера, находим $\left(x_{n+1}; y_{n+1}\right)$ – ($n+1$)-е приближение к решению $\left(\tilde{x}; \tilde{y}\right)$ СНУ (9.1).

4 Нахождение решения $\left(\tilde{x}; \tilde{y}\right)$ с заданной точностью. Используя формулы (9.4), находим решение $\left(\tilde{x}; \tilde{y}\right)$ СНУ (9.1) с точностью ε, придавая в них последовательно значения 0, 1, 2, … . Заканчиваем вычисления, когда выполнятся неравенства:

$$\left|x_{n+1}-x_n\right| \le \varepsilon \quad \text{и} \quad \left|y_{n+1}-y_n\right| \le \varepsilon. \tag{9.5}$$

Если условия (9.5) выполнены, то полагаем $\tilde{x} \approx x_{n+1}, \quad \tilde{y} \approx y_{n+1}$.

Шаг 1. В формулах (9.4), полагая $n = 0$, будем иметь

$$\begin{cases} F\left(x_0, y_0\right) + F'_x\left(x_0, y_0\right)\left(x_1-x_0\right) + F'_y\left(x_0, y_0\right)\left(y_1-y_0\right) = 0; \\ \Phi\left(x_0, y_0\right) + \Phi'_x\left(x_0, y_0\right)\left(x_1-x_0\right) + \Phi'_y\left(x_0, y_0\right)\left(y_1-y_0\right) = 0. \end{cases} \tag{9.6}$$

Приняв за начальное приближение $x_0 = -0,2, \quad y_0 = 0,6$, получим

$$F\left(x_0; y_0\right) = F\left(-0,2; 0,6\right) = \sin\left(0,6+0,5\right) + 0,2 - 1 \approx 0,0912;$$

$$F'_x(x_0,y_0)=F'_x(-0,2;0,6)=-1;$$

$$F'_y(x_0,y_0)=F'_y(-0,2;0,6)=\cos(0,6+0,5)\approx 0,4535;$$

$$\Phi(x_0;y_0)=\Phi(-0,2;0,6)=0,6+\cos(-0,2-2)\approx 0,0115;$$

$$\Phi'_x(x_0,y_0)=\Phi'_x(-0,2;0,6)=-\sin(-0,2-2)\approx 0,8085;$$

$$\Phi'_y(x_0,y_0)=\Phi'_y(-0,2;\ 0,1)=1.$$

СЛАУ (9.6) принимает вид:

$$\begin{cases}0,0912-(x_1+0,2)+0,4535(y_1-0,6)=0;\\ 0,0115+0,8085(x_1+0,2)+y_1-0,6=0,\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}-x_1+0,4535y_1=0,3809;\\ 0,8085x_1+y_1=0,4268.\end{cases}$$

Эту СЛАУ решим по формулам Крамера:

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix}0,3809 & 0,4535\\ 0,4268 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-1 & 0,4535\\ 0,8085 & 1\end{vmatrix}}=\frac{0,3809-0,4535\cdot 0,4268}{-1-0,4535\cdot 0,8085}\approx\frac{0,1873}{-1,3666}\approx -0,1371;$$

$$y_1=\frac{\begin{vmatrix}-1 & 0,3809\\ 0,8085 & 0,4268\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-1 & 0,4535\\ 0,8085 & 1\end{vmatrix}}=\frac{-0,4268-0,3809\cdot 0,8085}{-1-0,4535\cdot 0,8085}\approx\frac{-0,7347}{-1,3666}\approx 0,5376.$$

$(x_1;y_1)$ – первое приближение к решению $(\tilde{x};\tilde{y})$, $P_1(-0,1371;\ 0,5376)$.

Шаг 2. Из формул (9.4) при $n=1$ получим

$$\begin{cases}F(x_1,y_1)+F'_x(x_1,y_1)(x_2-x_1)+F'_y(x_1,y_1)(y_2-y_1)=0;\\ \Phi(x_1,y_1)+\Phi'_x(x_1,y_1)(x_2-x_1)+\Phi'_y(x_1,y_1)(y_2-y_1)=0.\end{cases}\qquad(9.7)$$

Вычисляем:

$$F(P_1)=F(x_1;y_1)=\sin(y_1+0,5)-x_1-1=\sin(0,5376+0,5)+0,1371-1\approx -0,0017;$$

$$F'_x(P_1)=F'_x(-0,1371;\ 0,5376)=-1;$$

$$F'_y\left(P_1\right)=\cos\left(y_1+0,5\right)=\cos\left(0,5376+0,5\right)\approx 0,5083;$$

$$\Phi\left(P_1\right)=\Phi\left(x_1;y_1\right)=y_1+\cos\left(x_1-2\right)=0,5376+\cos\left(-0,1371-2\right)\approx 0,0011;$$
$$\Phi'_x\left(P_1\right)=-\sin\left(x_1-2\right)=-\sin\left(-0,1371-2\right)\approx 0,8439;$$

$$\Phi'_y\left(P_1\right)=\Phi'_y\left(-0,1371;0,5376\right)=1.$$

СЛАУ (9.7) принимает вид:

$$\begin{cases}-0,0017-(x_2+0,1371)+0,5083(y_2-0,5376)=0;\\ 0,0011+0,8439(x_2+0,1371)+y_2-0,5376=0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-x_2+0,5083y_2=0,4121;\\ 0,8439x_2+y_2=0,4208.\end{cases}$$

Решим эту СЛАУ по формулам Крамера:

$$x_2=\frac{\begin{vmatrix}0,4121 & 0,5083\\ 0,4208 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-1 & 0,5083\\ 0,8439 & 1\end{vmatrix}}=\frac{0,4121-0,5083\cdot 0,4208}{-1-0,5083\cdot 0,8439}\approx\frac{0,1982}{-1,4289}\approx -0,1387;$$

$$y_2=\frac{\begin{vmatrix}-1 & 0,4121\\ 0,8439 & 0,4208\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-1 & 0,5083\\ 0,8439 & 1\end{vmatrix}}=\frac{-0,4208-0,4121\cdot 0,8439}{-1-0,5083\cdot 0,8439}\approx\frac{-0,7686}{-1,4289}\approx 0,5379.$$

$\left(x_2;y_2\right)$ – второе приближение к решению $(\tilde{x};\tilde{y})$, $P_2(-0,1387;\ 0,5379)$.

*Шаг 3***.** Формулы (9.4) при $n=2$ таковы:

$$\begin{cases}F\left(x_2,y_2\right)+F'_x\left(x_2,y_2\right)\left(x_3-x_2\right)+F'_y\left(x_2,y_2\right)\left(y_3-y_2\right)=0;\\ \Phi\left(x_2,y_2\right)+\Phi'_x\left(x_2,y_2\right)\left(x_3-x_2\right)+\Phi'_y\left(x_2,y_2\right)\left(y_3-y_2\right)=0.\end{cases}\tag{9.8}$$

Вычисляем:

$$F\left(P_2\right)=F\left(x_2;y_2\right)=\sin\left(y_2+0,5\right)-x_2-1=\sin\left(0,5379+0,5\right)+0,1387-1\approx -0,0004;$$

$$F'_x\left(P_2\right)=F'_x\left(-0,1387;0,5379\right)=-1;$$

$$F'_y\left(P_2\right)=\cos\left(y_2+0,5\right)=\cos\left(0,5379+0,5\right)\approx 0,5080;$$

$$\Phi(P_2)=\Phi(x_2;y_2)=y_2+\cos(x_2-2)=0,5379+\cos(-0,1387-2)\approx 0,0003;$$

$$\Phi'_x(P_2)=-\sin(x_2-2)=-\sin(-0,1387-2)\approx 0,8430;$$

$$\Phi'_y(P_2)=\Phi'_y(-0,1384;0,5379)=1.$$

СЛАУ (9.8) принимает вид:

$$\begin{cases}-0,0004-(x_3+0,1387)+0,5080(y_3-0,5379)=0;\\ 0,0003+0,8430(x_3+0,1387)+y_3-0,5379=0.\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-x_3+0,508y_3=0,4123;\\ 0,8432x_3+y_3=0,4207.\end{cases}$$

Решим ее по формулам Крамера:

$$x_3=\frac{\begin{vmatrix}0,4123 & 0,5080\\ 0,4207 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-1 & 0,5080\\ 0,8432 & 1\end{vmatrix}}=\frac{0,4123-0,5080\cdot 0,4207}{-1-0,5080\cdot 0,8432}\approx\frac{0,1986}{-1,4283}\approx -0,1390;$$

$$y_3=\frac{\begin{vmatrix}-1 & 0,4123\\ 0,8432 & 0,4207\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-1 & 0,5080\\ 0,8432 & 1\end{vmatrix}}=\frac{-0,4207-0,4123\cdot 0,8432}{-1-0,5080\cdot 0,8432}\approx\frac{-0,7684}{-1,4283}\approx 0,5379.$$

$(x_3;y_3)$ – третье приближение к решению $(\tilde{x};\tilde{y})$, $P_3(-0,1390;\ 0,5379)$.

По результатам вычислений составим таблицу 9.1.

Таблица 9.1

n	x_n	y_n
0	–0,2	0,6
1	–0,1371	0,5376
2	–0,1387	0,5379
3	–0,1390	0,5379

Сравнивая второе и третье приближения, замечаем, что выполнены условия (9.5):

$$|x_3-x_2|=|-0,1390+0,1387|=0,0003<0,01,\quad |y_3-y_2|=|0,5379-0,5379|<0,01.$$

Итак, искомым решением СНУ (9.1) являются координаты точки P_3.

Ответ: $\tilde{x} \approx -0,14$; $\tilde{y} \approx 0,53$ – решение СНУ (9.1).

Результат, полученный на компьютере: $\tilde{x} \approx -0,139$, $\tilde{y} \approx 0,539$.

Список литературы

1 **Воробьёва, Г. Н.** Практикум по вычислительной математике / Г. Н. Воробьёва, А. Н. Данилова. – Москва: Высшая школа, 1990.

2 **Вержбицкий, В. М.** Численные методы. Линейная алгебра и нелинейные уравнения / В. М. Вержбицкий. – Москва: Высшая школа, 2000.

3 **Копченова, Н. В.** Вычислительная математика в примерах и задачах / Н. В. Копченова, И. А. Марон. – Санкт-Петербург; Москва; Краснодар: Лань, 2009.

4 **Бахвалов, Н. С.** Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. – Москва: БИНОМ; Лаборатория знаний, 2007.

5 **Пантелеев, А. В.** Методы оптимизации в примерах и задачах / А. В. Пантелеев, Т. А. Летова. – Санкт-Петербург; Москва; Краснодар: Лань, 2015.