

**ОХРАНА ТРУДА.
ОХРАНА ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЫ.
ГЕОЭКОЛОГИЯ**

УДК 614.39

В. А. Ильичев, В. И. Колчунов, В. А. Гордон

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ ЗАКРЫТОЙ
БИОСФЕРОСОВМЕСТИМОЙ ТЕРРИТОРИИ**

UDC 614.39

V. A. Ilichev, V. I. Kolchunov, V. A. Gordon

**MATHEMATICAL MODEL OF DYNAMICS OF CLOSED BIOSPHERE
COMPARTIBLE TERRITORY**

Аннотация

В рамках концепции биосферосовместимого и развивающего человека города предложена математическая модель открытой динамической системы для оценки численности населения урбанизированной территории как одной из составляющих человеческого потенциала. В минимальном варианте модель в виде системы трех дифференциальных уравнений с начальными условиями содержит три взаимозависимые функции времени, соответствующие численности населения и двум компонентам окружающей среды, оказывающим негативное влияние на человека: загрязненности атмосферного воздуха и воды. Разработанная методика позволяет перейти к количественной оценке и прогнозированию состояния и динамики составляющих гуманитарного баланса биотехносферы на рассматриваемой территории.

Ключевые слова:

биосфера, биосферосовместимые урбанизированные территории, составляющие гуманитарного баланса, человеческий потенциал, загрязнение окружающей среды, численность населения, математическая модель, динамическая система.

Abstract

Within the framework of the concept of the biosphere compatible and man developing city, the mathematical model of the open dynamic system for evaluating the population of the urbanized territory as the element of human potential is proposed. In the minimum version the model in the form of the system of three differential equations with initial conditions contains three interdependent functions of time, which correspond to the population size and to two components of environment, which have a negative effect on the man: the pollution of atmospheric air and water. The developed procedure creates the design possibility of quantitative assessment and prediction of state and dynamics of a change in the humanitarian balance of the biotechnosphere in the territory in question.

Key words:

biotechnosphere, biospherecompatible urbanized territories, components of the humanitarian balance, human potential, population, environmental pollution, mathematical model, the dynamic system.

В рамках фундаментальных исследований по проблеме «Человек и развитие биосферосовместимых урбанизированных территорий» в Российской академии архитектуры и строительных наук и в Орловском государственном техническом университете (ныне «Госуниверситет-УНПК») выполнены работы [1, 2], в которых с использованием многофакторного нелинейного анализа и систем одновременных уравнений получены регрессионные зависимости между переменной «численность населения» региона и экологическими, техно- и антропогенными факторами: «выбросы в атмосферу загрязняющих веществ, отходящих от стационарных источников», «объем загрязненных сточных вод», «лесовосстановление» и «прирост населения». Объектом исследования была принята территория Орловской области, в которой были собраны и обработаны необходимые статистические данные.

Корреляционный анализ показал, что среди перечисленных выше факторов наиболее сильно с результирующим признаком «численность населения» коррелируют объясняющие признаки «выбросы в атмосферу загрязняющих веществ, отходящих от стационарных источников» и «объем загрязненных сточных вод». Кроме того, решения системы одновременных уравнений показывают, что одни и те же переменные в различных уравнениях могут играть роль результирующих и объясняющих факторов.

Недостатком примененных подходов является, по существу, констатация фактов, т. е. построение статических балансовых соотношений. При этом регрессионные способы прогнозирования, т. е. продолжение набора данных на будущее, базируются на предположении, что правила, определяющие поведение системы в прошлом, сохраняются и в дальнейшем.

Предлагаемая в работе система

дифференциальных уравнений получена как обобщение известного экспоненциального закона развития видов [3]:

$$\frac{dN}{dt} = \varepsilon N,$$

где N – численность популяции; ε – коэффициент прироста; t – время.

Если рассматривать изменение во времени численности населения N_1 совместно с изменениями таких факторов внешней среды, как объемы выбросов газов N_2 и загрязненных вод N_3 , то можно в простейшем случае представить коэффициенты прироста каждого фактора в виде простых функций от каждого имеющегося фактора. В результате получаем систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{dN_r}{dt} = N_r \left(\varepsilon_r + \sum_{s=1}^3 p_{rs} N_s \right);$$

$$p_{rr} = 0; \quad r = 1, 2, 3, \quad (1)$$

где ε_r , p_{rs} – некоторые константы.

В развернутом виде система уравнений (1) выглядит следующим образом:

$$\frac{dN_1}{dt} = N_1(\varepsilon_1 + p_{12}N_2 + p_{13}N_3);$$

$$\frac{dN_2}{dt} = N_2(\varepsilon_2 + p_{23}N_3 + p_{21}N_1);$$

$$\frac{dN_3}{dt} = N_3(\varepsilon_3 + p_{31}N_1 + p_{32}N_2). \quad (2)$$

Таким образом, в предлагаемой модели коэффициенты прироста каждого из взаимодействующих факторов:

$$\varepsilon_r + \sum_{s=1}^3 p_{rs} N_s; \quad p_{rr} = 0, \quad r = 1, 2, 3,$$

приняты в виде линейной функции объемов факторов, что означает переменность коэффициентов во времени.

Проблему, как идентифицировать

параметры модели (ε_r, p_{rs}) и по какой информации, можно решать по-разному. Одним из подходов являются экспертные оценки. В работе коэффициенты математической модели подбирались путем обработки имеющейся статистической информации об изменениях фигурирующих в модели факторов в течение 16-летнего промежутка с 1992 по 2007 гг.

Знаки и числовые значения коэффициентов системы предлагается искать, используя аппроксимирующие функции [1]:

$$N_1^* = 41,5318t^3 - 1492,5805t^2 + 9199,7114t + 891635$$

(коэффициент детерминации $R^2 = 0,999$);

$$N_2^* = 0,1517t^2 - 4,0138t + 39,109$$

$$(R^2 = 0,9123);$$

$$N_3^* = 0,0258t^3 - 0,9945t^2 + 9,4645t + 62,62$$

$$(R^2 = 0,71), \quad (3)$$

полученные по результатам построения линий тренда временных рядов для N_1 , N_2 и N_3 , взятых из соответствующих статистических данных за 16-летний период (1992...2007 гг.).

Дифференцируя функции (3) и приравнявая их производные к правым частям системы (1), получим

$$N_r(\varepsilon_r + \sum_{s=1}^3 p_{rs}N_s) = \frac{dN_r^*}{dt};$$

$$r = 1, 2, 3.$$

Минимизируя далее невязку

$$R_r = (\varepsilon_r + \sum_{s=1}^3 p_{rs}N_s)N_r - \frac{dN_r^*}{dt},$$

получаем значения девяти коэффициентов системы уравнений (1):

$$\varepsilon_1 = -0,01447202218;$$

$$\varepsilon_2 = -1,465087554;$$

$$\varepsilon_3 = -0,1856613088;$$

$$p_{12} = 0,00076530074;$$

$$p_{21} = -0,1520899 \cdot 10^{-5};$$

$$p_{31} = 0,8150704 \cdot 10^{-7};$$

$$p_{13} = -0,000068067;$$

$$p_{23} = -0,0023447475;$$

$$p_{32} = 0,00572864.$$

Подставляя найденные коэффициенты в уравнения системы (1), получим их решения средствами Maple при заданных начальных условиях для $t = 0$ (1992 г.):

$$N_{10} = 899207 \text{ чел.}; \quad N_{20} = 38 \text{ тыс. т.};$$

$$N_{30} = 72 \text{ млн м}^3.$$

Адекватность предложенной модели взаимодействия и эволюции рассмотренных выше факторов подтверждается практическим совпадением на протяжении 16-летнего промежутка времени линий тренда N_1^* , N_2^* , N_3^* [1] с графиками уравнений (1) (рис. 1).

Можно показать, что долгосрочная аппроксимация полиномами (функции (3) и пунктирные линии на рис. 1) некорректна, т. к. согласно ей объемы факторов неограниченно возрастают, что в действительности невозможно для населения ввиду ограниченности жизненных ресурсов: питания, жизненного пространства, энергетических ресурсов и т. д. Численность населения с течением длительного промежутка времени t должна стабилизироваться, а не расти.

Применение динамической модели (1) для долгосрочного прогнозирования (~80 лет) позволило установить возможность существования осциллирующих режимов функционирования составляющих рассматриваемой биосфе-

росовместимой системы. На рис. 2 изображены графики функций $N_1(t)$ с убывающей амплитудой колебаний, $N_3(t)$ –

с возрастающей амплитудой и $N_2(t)$ – с практически постоянной амплитудой.

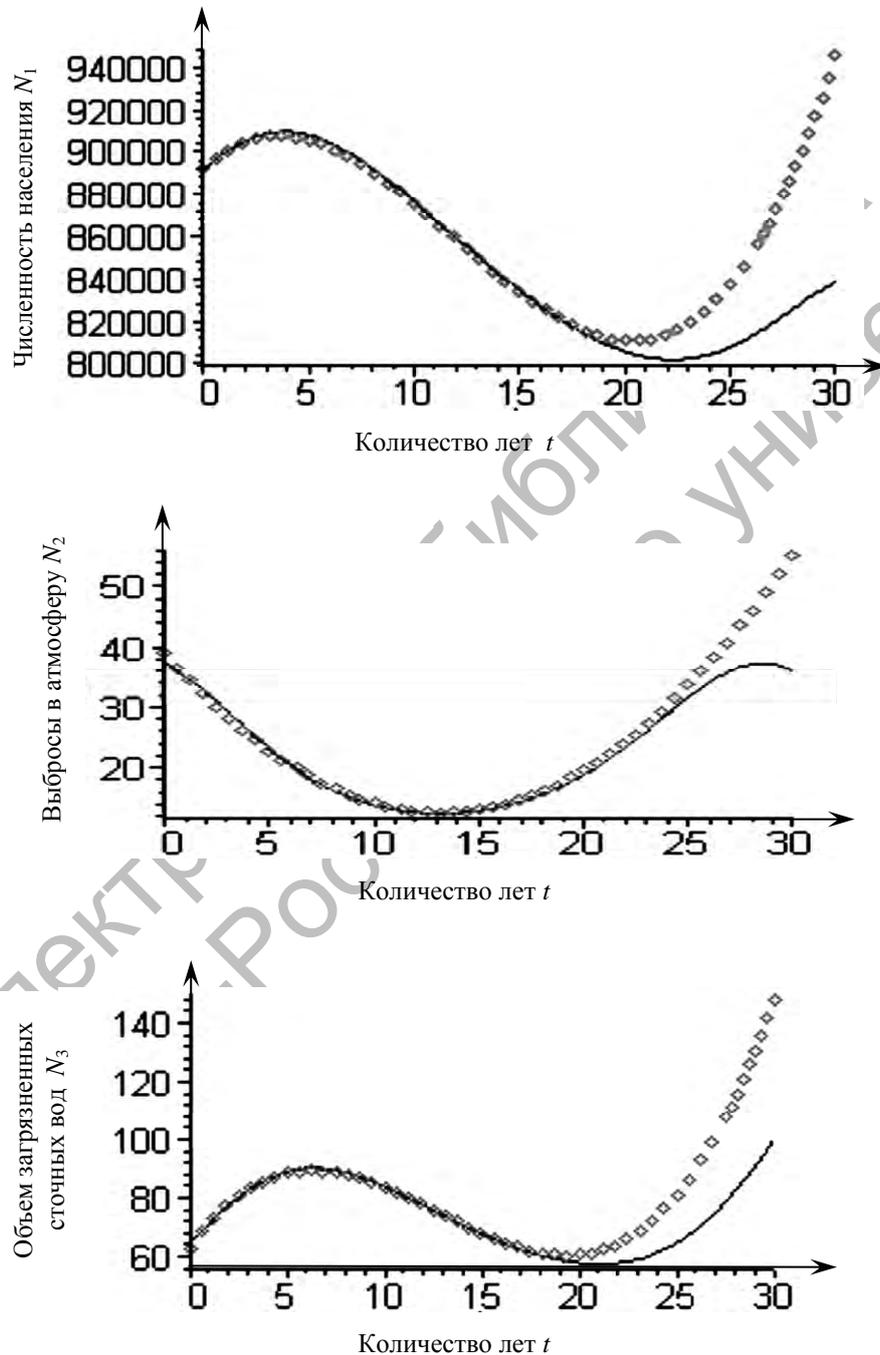


Рис. 1. Графики функций, описывающих изменения факторов N_1, N_2, N_3 : сплошная линия – решение системы (1); пунктир – полиномиальная аппроксимация (3) [1]

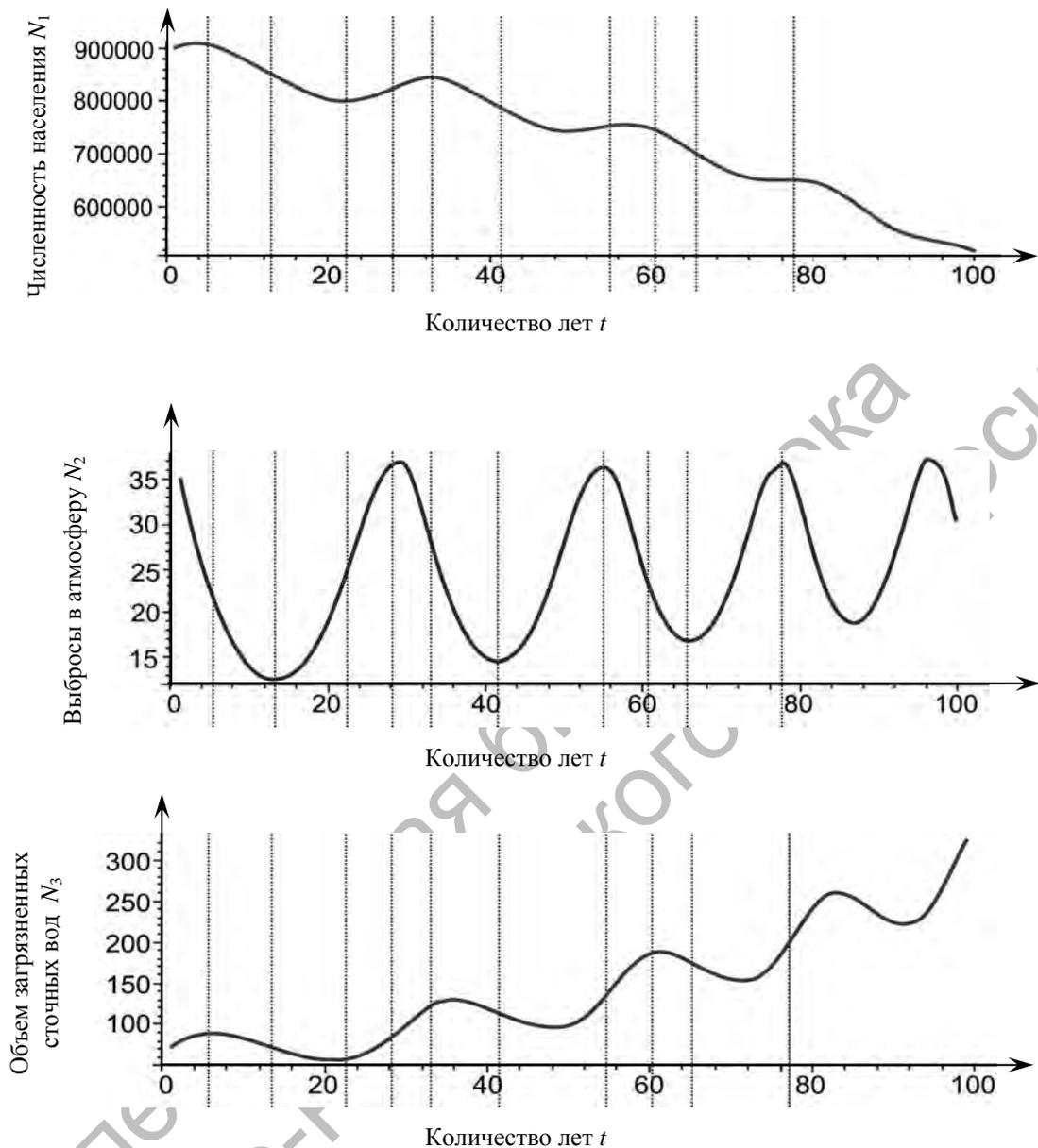


Рис. 2. Прогнозируемые изменения факторов

Как показал анализ графиков (см. рис. 2), изменения всех взаимодействующих факторов: населения, выбросов в атмосферу и загрязнения вод – имеют циклический характер. При этом можно выделить следующие компоненты изменения:

- более или менее монотонный тренд: $N_1(t)$ – убывает, $N_2(t)$ и $N_3(t)$ – возрастают;

- колебания с переменными во времени периодом: первый цикл ~30 лет, второй цикл ~25 лет, третий цикл ~18 лет.

Сравнив три графика (см. рис. 2), можно отметить различие в характере взаимозависимости человека и вредных воздействий, порожденных его жизнедеятельностью.

Из сопоставления графиков $N_1(t)$

и $N_3(t)$ следует, что изменение численности населения практически синхронно изменяется с уровнем загрязнения вод, тогда как уровень выбросов в атмосферу $N_2(t)$ изменяется так, что экстремумы (точки перегиба графика) этой функции совпадают по времени с точками перегиба (экстремумами) на графиках изменения функций $N_1(t)$ и $N_3(t)$. Заметим, что точки перегиба на графиках определяют момент перемены знака ускорения соответствующего процесса. В начале цикла ускоренное снижение численности населения сопровождается уменьшением выбросов до минимального значения, соответствующего точке перегиба на графике изменения численности населения. Продолжающееся замедленное снижение численности и переход через минимум к медленному возрастанию населения приводят к возрастанию выбросов, максимум которых достигается к моменту перегиба – ускоренному возрастанию численности. Население ускоренно увеличивается и более интенсивно производит выбросы.

Оба фактора растут, пока выбросы не достигнут максимума – начинается медленный рост населения. Далее циклы повторяются с уменьшением их длительности.

Рост объемов загрязненных вод $N_3(t)$ при общем снижении численности населения $N_1(t)$ можно объяснить

аккумуляцией загрязнений вод и сложным, длительным процессом естественной регенерации. Стремление объемов выбросов в атмосферу $N_2(t)$ к некоторой средней константе с уменьшением амплитуды осцилляций связано с возможностью рассеивания загрязнений на рассматриваемой территории.

Построенная модель и метод ее исследования позволяют включить в коэффициенты прироста различные естественные и искусственные управляющие воздействия из матрицы В. А. Ильичева, предположительно влияющие на динамику рассматриваемой системы.

Предлагаемый в работе метод идентификации параметров динамической системы не предполагает какого-либо механизма формирования состояния системы, он лишь строит долгосрочный прогноз, опираясь на начальные условия и на предположение, что те факторы (внешние воздействия, обстоятельства, допущения, ограничения и т. д.), которые 16 лет обуславливали поведение системы, останутся теми же на прогнозируемый период.

Из анализа графиков (см. рис. 1 и 2) следует важный вывод о том, что в долгосрочной перспективе при сохранении существующих уровней загрязнения биосферы темпы сокращения населения в регионах останутся высокими и перелома кризисных тенденций в демографической сфере нет оснований ожидать.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ильичев, В. А.** Методика прогнозирования показателей биосферосовместимости урбанизированных территорий / В. А. Ильичев, В. И. Колчунов, В. А. Гордон // Градостроительство. – 2010. – № 1. – С. 37–43.
2. **Ильичев, В. А.** Методика моделирования параметров биосферосовместимости урбанизированных территорий / В. А. Ильичев, В. И. Колчунов, В. А. Гордон // Строительство и реконструкция. – 2010. – № 5. – С. 67–75.
3. **Вольтерра, В.** Математическая теория борьбы за существование / В. Вольтерра. – М.: Наука, 1976. – 286 с.

Статья сдана в редакцию 10 октября 2012 года

Вячеслав Александрович Ильичев, д-р техн. наук, проф., вице-президент Российской академии архитектуры и строительных наук (РААСН), Москва.

Виталий Иванович Колчунов, д-р техн. наук, проф., академик РААСН, директор Архитектурно-строительного института Госуниверситета–УНПК, Орел.

Владимир Александрович Гордон, д-р техн. наук, проф., советник РААСН, зав. кафедрой Госуниверситета–УНПК, Орел. Тел.: 8-4862-41-98-48, 8-92-08-01-50-39. E-mail: Gordon@ostu.ru.

Vyacheslav Alexandrovich Pichev, DSc (Engineering), Prof., Vice President of the Russian Academy of Architecture and Building science (RAABS), Moscow.

Vitaliy Ivanovich Kolchunov, DSc (Engineering), Prof., academician of the RAABS, Director of Institute of Architecture and Building of State University-UNPK, Oryol.

Vladimir Alexandrovich Gordon, DSc (Engineering), Prof., advisor of the RAABS, Head of the department of State University-UNPK, Oryol. Tel.: 8-4862-41-98-48, 8-92-08-01-50-39. E-mail:Gordon@ostu.ru.