УДК 517.927.6

ЛЕВОСТОРОННЯЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ МНОГОТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА

А. Н. БОНДАРЕВ
Белорусско-Российский университет
Могилев, Беларусь

Рассматривается краевая задача типа [1]

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + A_1(t)XA_2(t) + B_1(t)XB_2(t) + C_1(t)XC_2(t) + F(t), \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{k} M_i X(t_i) = 0, \quad 0 = t_1 < t_2 < \ldots < t_k = \omega, \tag{2}$$

где $X \in \mathbb{R}^{n\times m}$, A, A_j, B_j, C_j $(j = 1,2)$, F – матрицы-функции класса $\mathbb{C}[0,\omega]$ соответствующих размерностей, M_i – заданные постоянные $(n\times n)$-матрицы, $\omega > 0$.

В данной работе, являющейся продолжением и развитием [1, 2], с помощью метода [3, гл. 1] получены конструктивные достаточные условия однозначной разрешимости задачи (1), (2) и дан итерационный алгоритм классического типа построения решения.

Приняты следующие обозначения:

$$H = \sum_{i=1}^{k} M_i U_i,\ U_i = U(t_i),\ \alpha_j = \max_t \left\| A_j(t) \right\|,\ \beta_j = \max_t \left\| B_j(t) \right\|,\ \sigma_j = \max_t \left\| C_j(t) \right\|,$$

$$h = \max_t \left\| F(t) \right\|,\ \lambda_1 = \max_t \left\| U(t) \right\|,\ \lambda_2 = \max_t \left\| U^{-1}(t) \right\|,\ \gamma = \left\| H^{-1} \right\|,\ m_i = \left\| M_i \right\|,\ u_i = \left\| U_i \right\|,$$

$$q = \gamma\lambda_1\lambda_2(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \sigma_1\sigma_2)\omega\sum_{i=1}^{k} m_i u_i,\ N = \gamma\lambda_1\lambda_2\omega h\sum_{i=1}^{k} m_i u_i,\ \left\| X \right\|_C = \max_t \left\| X(t) \right\|,$$

где $t \in [0,\omega]$, $i = \overline{1,k}$, $j = 1,2$, $\left\| \cdot \right\|$ – норма матриц в конечномерной банаховой алгебре $\mathfrak{B}(n)$ непрерывных матричнозначных функций, например, любая из норм, приведенных в [4, с. 21], $U(t)$ – фундаментальная матрица уравнения $dU/dt = A(t)U$.

Теорема. *Пусть выполнены условия* $\det H \neq 0$ *и* $q < 1$. *Тогда задача* (1), (2) *однозначно разрешима*; *ее решение* $X(t)$ *представимо как предел равномерно сходящейся последовательности матричных функций*, *определяемых рекуррентным интегральным соотношением и удовлетворяющих условию* (2), *при этом справедлива оценка*

$$\left\| X \right\|_C \le N/(1-q). \tag{3}$$

Задача (1), (2) сведена к эквивалентной интегральной задаче

$$X(t) = U(t)H^{-1}\sum_{i=1}^{k} M_i U_i \int_{t_i}^{t} U^{-1}(\tau)[A_1(\tau)X(\tau)A_2(\tau) + B_1(\tau)X(\tau)B_2(\tau) +$$

$$+ C_1(\tau)X(\tau)C_2(\tau) + F(\tau)]\,d\tau, \tag{4}$$

однозначная разрешимость которой установлена с помощью принципа сжимающих отображений Каччопполи – Банаха (см., например, [5, с. 605]).

Для построения решения уравнения (4) используется алгоритм с вычислительной схемой классического метода последовательных приближений [5, с. 605]

$$X_p(t) = U(t)H^{-1}\sum_{i=1}^{k} M_i U_i \int_{t_i}^{t} U^{-1}(\tau)[A_1(\tau)X_{p-1}(\tau)A_2(\tau) + B_1(\tau)X_{p-1}(\tau)B_2(\tau) +$$
$$+ C_1(\tau)X_{p-1}(\tau)C_2(\tau) + F(\tau)]\,d\tau, \quad p = 1,2,... \tag{5}$$

В качестве начального приближения принята произвольная матрица $X_0(t) \in \mathbb{C}[0,\omega]$. Очевидно, алгоритм (5) определяет последовательность $\{X_p(t)\}_0^\infty \subset \mathbb{C}[0,\omega]$, при этом $\{X_p(t)\}_1^\infty \subset \mathbb{C}^1[0,\omega]$. Установлено, что функции $X_1(t)$, $X_2(t)$, … удовлетворяют краевому условию (2).

В рамках принципа сжимающих отображений доказана равномерная по $t \in [0,\omega]$ сходимость этой последовательности, при этом получены оценки

$$\|X - X_r\|_C \le \frac{q^r}{1-q}\|X_1 - X_0\|_C, \quad r = 0,1,2,...;$$
$$\|X\|_C \le \|X_0\|_C + \frac{\|X_1 - X_0\|_C}{1-q}, \tag{6}$$

где $\|X_1 - X_0\|_C = \|\mathfrak{L}(X_0) - X_0\|_C$.

При $X_0 \equiv 0$ имеем $\|X_1 - X_0\|_C = \|X_1\|_C = \|\mathfrak{L}(0)\|_C$. Поскольку

$$\|\mathfrak{L}(0)\| = \left\| U(t)H^{-1}\sum_{i=1}^{k} M_i U_i \int_{t_i}^{t} U^{-1}(\tau)F(\tau)d\tau \right\| \le$$
$$\le \|U(t)\|\|H^{-1}\|\sum_{i=1}^{k}\|M_i\|\|U_i\|\int_0^{\omega}\|U^{-1}(\tau)F(\tau)d\tau\| \le \gamma\lambda_1\lambda_2\omega h\sum_{i=1}^{k} m_i u_i = N,$$

то из (6) следует оценка (3).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бондарев, А. Н.** Многоточечная краевая задача для уравнения Ляпунова в случае сильного вырождения краевых условий / А. Н. Бондарев, В. Н. Лаптинский // Дифференциальные уравнения. – 2011. – Т. 47, № 6. – С. 776–784.

2. **Бондарев, А. Н.** Многоточечная краевая задача для уравнения Ляпунова в случае слабого вырождения краевых условий / А. Н. Бондарев, В. Н. Лаптинский // Дифференциальные уравнения. – 2019. – Т. 55, № 3. – С. 423–427.

3. **Лаптинский, В. Н.** Конструктивный анализ управляемых колебательных систем / В. Н. Лаптинский. – Минск : ИМ НАН Беларуси, 1998. – 300 с.

4. **Демидович, Б. П.** Лекции по математической теории устойчивости / Б. П. Демидович. – Москва : Наука, 1967. – 472 с.

5. **Канторович, Л. В.** Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. – Москва: Наука, 1977. – 744 с.