УДК 517.988.52

О ПРОВЕРКЕ ПОЛУНЕПРЕРЫВНОСТИ ИЗНУТРИ МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

В. Г. ЗАМУРАЕВ
Белорусско-Российский университет
Могилев, Беларусь

При исследовании разрешимости ряда задач оптимизации возникает необходимость проверки полунепрерывности изнутри многозначных отображений, ставящих в соответствие элементам некоторого метрического пространства (допустимым управлениям) подпространства гильбертова пространства [1, 2]. На практике такая проверка может быть весьма затруднительна для произвольных элементов подпространств и осуществляется гораздо проще для элементов некоторых линейных множеств, плотных в рассматриваемых подпространствах. Докажем, что проверки полунепрерывности изнутри многозначного отображения для элементов плотных множеств будет достаточно для проверки полунепрерывности изнутри этого отображения.

Рассмотрим метрическое пространство M и вещественное сепарабельное гильбертово пространство H со скалярным произведением (u,v) и нормой $\|u\| = (u,u)^{1/2}$. Каждому элементу $x \in M$ поставим в соответствие некоторое замкнутое подпространство $H(x)$ пространства H. Рассмотрим многозначное отображение $H : M \to H$, $H : x \mapsto H(x)$.

Отображение H называется [3] полунепрерывным изнутри на множестве M, если из условия $x_n \to x \in M$ следует, что для произвольного $u \in H(x)$ найдется $u_n \in H(x_n)$ такой, что $u_n \to u$ сильно в H.

Пусть $D(x)$ – некоторое линейное множество, плотное в $H(x)$.

Утверждение 1. Пусть из условия $x_n \to x \in M$ следует, что для произвольного $\varphi \in D(x)$ найдется $u_n \in H(x_n)$ такой, что $u_n \to \varphi$ сильно в H. Тогда из условия $x_n \to x \in M$ следует, что для произвольного $u \in H(x)$ и для любой окрестности $O(u)$ найдется натуральное число N такое, что пересечение $O(u) \cap H(x_n) \neq \varnothing$ $\forall n \geq N$.

Доказательство. Множество $D(x)$ плотно в пространстве $H(x)$. Следовательно, для любого $u \in H(x)$ найдется последовательность $\varphi_m \in D(x)$, сходящаяся в H к u: $\forall \varepsilon > 0$ существует $M(\varepsilon)$ такое, что $\|\varphi_m - u\| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ $\forall m \geq M$. В частности, $\|\varphi_M - u\| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Пусть $x_n \to x \in M$. По условию для $\varphi_M \in D(x)$

найдется элемент $v_{Mn} \in H(x_n)$ и натуральное N такие, что $\| v_{Mn} - \varphi_M \| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ $\forall n \geq N$. Тогда $\| v_{Mn} - u \| \leq \| v_{Mn} - \varphi_M \| + \| \varphi_M - u \| < \varepsilon$, т. е. при $n \geq N$ элементы $v_{Mn} \in H(x_n)$ содержатся в произвольной ε-окрестности точки $u \in H(x)$.

Утверждение 2. Пусть из условия $x_n \to x \in M$ следует, что для произвольного $u \in H(x)$ и для любой окрестности $O(u)$ найдется натуральное число N такое, что пересечение $O(u) \cap H(x_n) \neq \varnothing$ $\forall n \geq N$. Тогда существует натуральное число N_{n_0} и последовательность $u_n \in H(x_n)$, $n \geq N_{n_0}$ такие, что $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u$.

Доказательство. Рассмотрим семейство вложенных окрестностей точки u: $O_{m+1}(u) \subset O_m(u)$ $\forall m \in \mathbb{N}$.

По условию $\forall m \in \mathbb{N}$ найдется N_m такое, что $O_m(u) \cap H(x_n) \neq \varnothing$ $\forall n \geq N_m$. Поскольку окрестности рассматриваемого семейства вложены друг в друга, можно считать, что $N_{m+1} > N_m$ $\forall m \in \mathbb{N}$.

Зафиксируем некоторое натуральное число n_0 и рассмотрим число N_{n_0}. Для каждого $n \geq N_{n_0}$ выберем некоторый элемент $v_{nm} \in O_m(u) \cap H(x_n)$. Для любого $n \geq N_{n_0}$ существует N_m такое, что $N_m \leq n < N_{m+1}$. Определим последовательность $u_n = v_{nm}$ для любых $n \geq N_{n_0}$ таких, что $N_m \leq n < N_{m+1}$.

Зафиксируем окрестность $O(u)$ и возьмем k так, чтобы $O_k(u) \subset O(u)$. Тогда из определения u_n и из вложенности окрестностей рассматриваемого семейства следует, что $u_n \in O_k(u)$ $\forall n \geq N_k$. Следовательно, u_n, $n \geq N_{n_0}$, сходится к u.

Из утверждений 1 и 2 следует, что в приложениях достаточно проверять полунепрерывность изнутри отображения H лишь для элементов некоторого множества $D(x)$, плотного в пространстве $H(x)$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Замураев, В. Г.** Условия разрешимости задач оптимизации с линейными функциональными уравнениями состояний / В. Г. Замураев // Материалы, оборудование и ресурсосберегающие технологии : материалы Междунар. науч.-техн. конф. – Могилев : Белорус.-Рос. ун-т, 2019. – С. 516.

2. **Замураев, В. Г.** О достаточных условиях существования оптимальных пространств для линейных функциональных уравнений / В. Г. Замураев // Актуальные проблемы науки и техники: материалы I Международной науч.-техн. конф., Сарапул, 20–22 мая 2021 г. – Ижевск: ИжГТУ им. М. Т. Калашникова, 2021. – С. 45–49.

3. **Burachik, R. S.** Set-valued mappings and enlargements of monotone operators / R. S. Burachik, A. N. Uisem. – New York: Springer, 2008. – 305 p.