УДК 517.925

К ЗАДАЧЕ ВАЛЛЕ-ПУССЕНА ДЛЯ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПАРАМЕТРОМ

А. И. КАШПАР
Белорусско-Российский университет
Могилев, Беларусь

Исследуется краевая задача типа [1, с. 155; 2, с. 491]

$$\ddot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}(t)\dot{\mathbf{X}} + \dot{\mathbf{X}}\mathbf{B}(t) + \lambda\left(\mathbf{A}_1(t)\mathbf{X} + \mathbf{P}_1(t)\mathbf{X}\mathbf{Q}_1(t) + \mathbf{X}\mathbf{B}_1(t)\right) +$$

$$+ \lambda(\mathbf{A}_2(t)\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{P}_2(t)\dot{\mathbf{X}}\mathbf{Q}_2(t) + \dot{\mathbf{X}}\mathbf{B}_2(t)) + \mathbf{F}(t), \qquad (1)$$

$$\mathbf{X}(0,\lambda) = \mathbf{M},\ \ \mathbf{X}(\omega,\lambda) = \mathbf{N},\ \ \mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n\times m}, \qquad (2)$$

где $\mathbf{F}(t),\ \mathbf{A}(t),\ \mathbf{B}(t), \mathbf{A}_i(t), \mathbf{B}_i(t), \mathbf{P}_i(t), \mathbf{Q}_i(t)\ (i = 1, 2)$ – матрицы класса $\mathbb{C}[0,\omega]$ соответствующих размерностей, $\mathbf{M}, \mathbf{N}$ – заданные вещественные матрицы, $\omega > 0,\ \lambda \in \mathbb{R}$.

В данной работе, являющейся продолжением и развитием [3–7], с помощью метода [8, гл. 2] получены коэффициентное достаточное условие однозначной разрешимости задачи (1), (2), оценки области локализации ее решения и его производной. Кроме того, разработан алгоритм построения решения этой задачи.

Введены следующие обозначения:

$$\alpha_i = \max_{0\le t\le\omega}\|\mathbf{A}_i(t)\|,\ \beta_i = \max_{0\le t\le\omega}\|\mathbf{B}_i(t)\|,\ p_i = \max_{0\le t\le\omega}\|\mathbf{P}_i(t)\|,\ q_i = \max_{0\le t\le\omega}\|\mathbf{Q}_i(t)\|,$$

$$h = \max_{0\le t\le\omega}\|\mathbf{F}(t)\|,\ \varepsilon = |\lambda|,\ q = \frac{\omega}{2}\left[(\alpha_1 + p_1q_1 + \beta_1)\omega + \alpha_2 + p_2q_2 + \beta_2\right],$$

$$H = \frac{1}{\omega}\|\mathbf{M} - \mathbf{N}\| + \frac{\omega h}{2} + \frac{\varepsilon\omega}{2}(\alpha_1 + p_1q_1 + \beta_1)\|\mathbf{M}\|.$$

Теорема. Пусть выполнено условие $\varepsilon q < 1$. Тогда задача (1), (2) однозначно разрешима, при этом справедливы оценки

$$\|\mathbf{X}(t,\lambda)\| \le \|\mathbf{M}\| + \frac{H\omega}{1-\varepsilon q},\quad \|\dot{\mathbf{X}}(t,\lambda)\| \le \frac{H\omega}{1-\varepsilon q}.$$

На основе применения метода малого параметра Ляпунова – Пуанкаре разработан алгоритм построения решения этой задачи, при этом вместо уравнения (1) рассмотрена эквивалентная интегральная задача

$$\mathbf{X}(t,\lambda) = \mathbf{M} + \int_0^t \mathbf{Y}(\tau,\lambda)d\tau, \qquad \mathbf{Y}(t,\lambda) = \frac{1}{\omega}(\mathbf{N} - \mathbf{M}) + \frac{1}{\omega}\int_0^\omega\left(\int_\tau^t H(s,\lambda)ds\right)d\tau,$$

где $\mathbf{H}(t,\lambda) = \lambda\left(\mathbf{A}_1(t)\mathbf{X} + \mathbf{P}_1(t)\mathbf{X}\mathbf{Q}_1(t) + \mathbf{X}\mathbf{B}_1(t)\right) + \lambda(\mathbf{A}_2(t)\mathbf{Y} + \mathbf{P}_2(t)\mathbf{Y}\mathbf{Q}_2(t) + \mathbf{Y}\mathbf{B}_2(t)) + \mathbf{F}(t) \equiv$

$\equiv \mathbf{H}_0(t) + \lambda \mathbf{H}_1(t) + \ldots + \lambda^k \mathbf{H}_k(t) + \ldots$.

Решение задачи строится в виде

$$\mathbf{X}(t,\lambda) = \mathbf{X}_0(t) + \lambda \mathbf{X}_1(t) + \ldots + \lambda^k \mathbf{X}_k(t) + \ldots, \tag{3}$$

$$\mathbf{Y}(t,\lambda) = \mathbf{Y}_0(t) + \lambda \mathbf{Y}_1(t) + \ldots + \lambda^k \mathbf{Y}_k(t) + \ldots , \tag{4}$$

где $\mathbf{X}_0(t) = \mathbf{M} + \frac{t}{\omega}(\mathbf{N} - \mathbf{M}) + \frac{1}{\omega}\int\limits_0^t \left(\int\limits_0^\omega \left(\int\limits_\tau^\varphi \mathbf{H}_0(s)ds \right) d\tau \right) d\varphi,$

$$\mathbf{Y}_0(t) = \frac{1}{\omega}(\mathbf{N} - \mathbf{M}) + \frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega \left(\int\limits_\tau^t \mathbf{H}_0(s)ds \right) d\tau, \qquad \mathbf{X}_{m+1}(t) = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^t \left(\int\limits_0^\omega \left(\int\limits_\tau^\varphi \mathbf{H}_m(s)ds \right) d\tau \right) d\varphi,$$

$$\mathbf{Y}_{m+1}(t) = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega \left(\int\limits_\tau^t \mathbf{H}_m(s)ds \right) d\tau,\ m = 0, 1, 2, \ldots .$$

Доказано, что при $|\lambda| < 1/q$ ряды (3), (4) сходятся равномерно по $t \in [0,\omega]$ к решению интегральной задачи.

Полученные результаты использованы для расчета стационарного температурного поля в круговой цилиндрической оболочке [9].

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Сансоне, Дж.** Обыкновенные дифференциальные уравнения / Дж. Сансоне. – Москва: ИЛ, 1953. – Т. 1. – 348 с.

2. **Хартман, Ф.** Обыкновенные дифференциальные уравнения / Ф. Хартман. – Москва: Мир, 1970. – 720 с.

3. **Кашпар, А. И.** О построении решения краевой задачи Валле-Пуссена для линейного матричного уравнения Ляпунова второго порядка / А. И. Кашпар // Весн. МДУ імя А. А. Куляшова. Сер. B. Прыродазнаўчыя навукі (матэматыка, фізіка, біялогія). – Могилев: МГУ им. А. А. Кулешова, 2018. – № 2. – С. 45–54.

4. **Кашпар, А. И.** О разрешимости и построении решения задачи Валле-Пуссена для матричного уравнения Ляпунова второго порядка с параметром / А. И. Кашпар, В. Н. Лаптинский // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-матэм. навук. – 2019. – Т. 55, № 1. – С. 50–61.

5. **Кашпар, А. И.** Разрешимость и построение решения краевой задачи Валле-Пуссена для нелинейного матричного уравнения Ляпунова второго порядка / А. И. Кашпар, В. Н. Лаптинский // Дифференциальные уравнения. – 2020. – Т. 56, № 5. – С. 570–583.

6. **Кашпар, А. И.** К разрешимости краевой задачи Валле-Пуссена для линейного матричного уравнения Ляпунова второго порядка / А. И. Кашпар // Актуальные проблемы науки и техники: материалы I Междунар. науч.-техн. конф. – Ижевск, 2021. – С. 76–80.

7. **Кашпар, А. И.** О краевой задаче Валле-Пуссена для матричного уравнения Ляпунова второго порядка / А. И. Кашпар, В. Н. Лаптинский // Весн. МДУ імя А. А. Куляшова. Сер. B. Прыродазнаўчыя навукі (матэматыка, фізіка, біялогія). – Могилев: МГУ им. А. А. Кулешова, 2021. – № 2.– С. 16–27.

8. **Лаптинский, В. Н.** Конструктивный анализ управляемых колебательных систем / В. Н. Лаптинский. – Минск: ИМ НАН Беларуси, 1998. – 300 с.

9. **Кашпар, А. И.** К аналитическим методам расчета стационарного температурного поля в круговой цилиндрической оболочке / А. И. Кашпар, В. Н. Лаптинский // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-матэм. навук. – 2021. – Т. 57, № 4. – С. 435–446.