УДК 517.5

К РЕШЕНИЮ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ЗАДАЧ

В. Н. ЛАПТИНСКИЙ
Белорусско-Российский университет
Могилев, Беларусь

Рассматривается система уравнений относительно $x \in \mathbb{C}\left(I, \mathbb{R}^n\right)$

$$\int_0^\omega \Psi_i(\tau) x(\tau) d\tau = \mu_i, \tag{1}$$

где $\Psi_i \in \mathbb{C}\left(I, \mathbb{R}^{n\times n}\right)$, $\mu_i \in \mathbb{R}^n$, $i = \overline{1,k}$, $I = [0, \omega]$, $\omega > 0$.

При $k = \infty$ система (1) представляет собой интегральную задачу типа [1, с. 264], более широкий круг таких задач описан в [2, гл. IX, § 5]. Введены также матрицы-функции $\Phi_i \in \mathbb{C}\left(I, \mathbb{R}^{n\times n}\right)$ базисного типа [3, гл. 4], в частности, $\Phi_i(t) = \Psi_i(t)$.

В данной работе предлагается алгоритм построения возможных решений системы (1). На основе методики [4, 5] при выполнении условия невырожденности матриц, определяемых далее по тексту, получено выражение

$$x(t) = y(t) + \int_0^\omega H(t,\tau) y(\tau) d\tau + g(t), \tag{2}$$

где $y(t)-$ вспомогательная функция, аналогичная [3, гл. 4], вырожденное ядро $H(t,\tau)$ представлено через $\Psi_i(t)$, $\Phi_i(t)$ на основе алгоритма

$$H_{j+1}(t,\tau) = H_j(t,\tau) - \left[\Phi_{j+1}(t) + \int_0^\omega H_j(t,s)\Phi_{j+1}(s) ds\right]\left(\widetilde{\Psi_{j+1}R_{j+1}}\right)^{-1} \times$$
$$\times \left[\Psi_{j+1}(\tau) + \int_0^\omega \Psi_{j+1}(s) H_j(s,\tau) ds\right], \tag{3}$$

где $j = \overline{0, k-1}$, тильдой сверху обозначен интеграл по промежутку I.

Функция $y(t)$ последовательно в рамках соответствующего алгоритма доопределяется (с сохранением произвола) при построении функции $H_m(t,\tau)$, $g_m(t)$, $m = \overline{0,k}$, так, что $H_0(t,\tau) = 0$, $g_0(t) = 0$, $H(t,\tau) = H_k(t,\tau)$, $g(t) = g_k(t)$, $y(t) = y_k(t)$,

$$R_{j+1}(t)=\Phi_{j+1}(t)+\int_0^{\omega}H_j(t,\tau)\Phi_{j+1}(\tau)d\tau,$$

$$g_{j+1}(t)=g_j(t)+\delta_{j+1}(t)+\int_0^{\omega}H_j(t,\tau)\delta_{j+1}(\tau)d\tau,$$

где

$$\delta_{j+1}(t)=\Phi_{j+1}(t)\left(\widetilde{\Psi_{j+1}R_{j+1}}\right)^{-1}\left(\mu_{j+1}-\int_0^{\omega}\Psi_{j+1}(\tau)g_j(\tau)d\tau\right),$$

при этом

$$\det\widetilde{\Psi_{j+1}R_{j+1}}\neq 0,\ j=\overline{0,k-1}.$$

Замечание 1. Применение метода Гаусса к системе (1) на основе

$$x(t)=\sum_{i=1}^{k}\Phi_i(t)c_i+y(t) \tag{4}$$

приводит к ее решению с более сложным алгоритмом построения векторов c_i. Предлагаемый алгоритм при $k=\infty$ дает основу для обоснования его сходимости в $\mathbb{C}$ и других пространствах, а также оценки соответствующих погрешностей для

$$\tilde{x}(t)=\sum_{i=1}^{k}\Phi_i(t)c_i,$$

при этом функция $y(t)$ характеризует остаток соответствующего ряда.

Замечание 2. Круг задач типа (1) может быть расширен: ортогонализация базисов в различных гильбертовых пространствах, линейные и нелинейные операторные уравнения первого и второго родов, в частности, интегральные уравнения. Используемая методика представляет собой основу для развития конструктивных методов регуляризации [3] краевых задач с дополнительными условиями типа (1).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Канторович, Л. В.** Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. – Москва: Наука, 1977. – 744 с.

2. **Канторович, Л. В.** Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах / Л. В. Канторович, Б. З. Вулих, А. Г. Пинскнер. – Москва; Ленинград: ГИТТЛ, 1950. – 549 с.

3. **Лаптинский, В. Н.** Конструктивный анализ управляемых колебательных систем / В. Н. Лаптинский. – Минск: Ин-т математики НАН Беларуси, 1998. – 300 с.

4. **Лаптинский, В. Н.** К методике решения одной задачи теории гильбертовых пространств / В. Н. Лаптинский // IX Белорусская математическая конференция: материалы Междунар. конф. – Гродно: ГрГУ, 2004. – Ч. 1. – С. 81–82.

5. **Лаптинский, В. Н.** Об одной задаче теории векторных пространств / В. Н. Лаптинский // X Белорусская математическая конференция: материалы Междунар. конф., Минск, 3–7 нояб. 2008 г. – Минск: НАН Беларуси; Ин-т матем., 2008. – Ч. 3. – С. 65–66.