

УДК 533.6

К АНАЛИТИЧЕСКОМУ РЕШЕНИЮ УРАВНЕНИЯ ФОЛКНЕРА – СКЭН

В. Н. ЛАПТИНСКИЙ, А. А. РОМАНЕНКО

Белорусско-Российский университет

Могилев, Беларусь

В градиентном случае изучается классическая задача о динамическом ламинарном пограничном слое для течения вязкой жидкости вдоль плоской пластины (задача Фолкнера – Скэн [1, 2])

$$f''' + a f f'' + b(1 - f'^2) = 0, \quad (1)$$

$$f(0) = f'(0) = 0, \quad f'(\infty) = 1, \quad (2)$$

где $f' = df(\eta)/d\eta$, $a = (m+1)/2$, $b = m$; m – параметр, характеризующий скорость $U(x) = U_0 x^m$ внешнего течения.

Поскольку эта задача не имеет точного решения, а численные методы неэффективны для исследования влияния ее физических параметров на формирование пограничного слоя, то разработка аналитических методов решения актуальна и в нынешнем столетии (см. библиографию в [3]).

В [4] приведено приближенное решение задачи (1), (2) для случая градиентного обтекания и значений $m \in [0, 1/3)$ в виде

$$f(\eta, m) \approx \lambda \int_0^\eta (\eta - \tau) \exp \left(- \left(\frac{b}{\lambda} \tau + \left(\frac{b}{\lambda} \right)^2 \frac{\tau^2}{2!} + \left(2 \left(\frac{b}{\lambda} \right)^3 + (a - 2b) \lambda \right) \frac{\tau^3}{3!} \right) \right) d\tau, \quad (3)$$

где значения параметра $\lambda = f''(0, m)$ вычисляются из трансцендентного уравнения

$$\lambda \int_0^\infty \exp \left(- \left(\frac{b}{\lambda} \tau + \left(\frac{b}{\lambda} \right)^2 \frac{\tau^2}{2!} + \left(2 \left(\frac{b}{\lambda} \right)^3 + (a - 2b) \lambda \right) \frac{\tau^3}{3!} \right) \right) d\tau - 1 = 0. \quad (4)$$

В работе [5] вместо (4) предложена формула

$$\lambda(m) = a_0 + a_1 m + a_2 m^2, \quad (5)$$

где $a_0 = 0,33532$, $a_1 = 1,722757$, $a_2 = -1,388347$.

В данной работе, являющейся продолжением и развитием [4–6], получена следующая аппроксимация:

$$\lambda(m) = p + \ln(1 + qm), \quad (6)$$

содержащая только два параметра – $p = a_0$ и $q = 1.6458126$.

На рис. 1 приведены графики зависимостей (5) и (6).

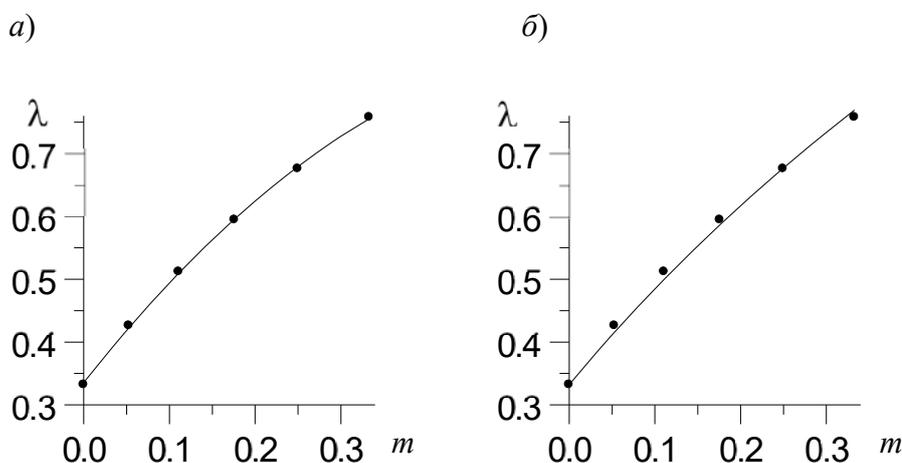


Рис. 1. Графики зависимостей. Точки соответствуют точным значениям $\lambda(m)$; сплошные линии: а – приближение (5); б – приближение (6)

Установлено, что приближение (3) и (6) и его первые две производные не уступают приближению (3), (5) для $f(\eta)$, $f'(\eta)$ и $f''(\eta)$ по точности, принятой в прикладных расчетах [1, 2].

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шлихтинг, Г. Теория пограничного слоя / Г. Шлихтинг. – Москва: Наука, 1974. – 712 с.
2. Теория теплообмена: учебник / С. И. Исаев [и др.]; под ред. А. И. Леонтьева. – Москва: Высшая школа, 1979. – 495 с.
3. Khidir, A. A note on the solution of general Falkner – Skan problem by two novel semi-analytical techniques. Propulsion and Power Research / A. Khidir. – 2015. – Vol. 4, iss. 4. – P. 212–220.
4. Лаптинский, В. Н. Об одном аналитическом методе построения решения задачи о динамическом ламинарном пограничном слое в автомоделном случае / В. Н. Лаптинский, А. А. Романенко // Актуальные проблемы науки и техники: материалы Междунар. науч.-техн. конф., Сарапул, 22–24 мая 2021 г. – Сарапул: СПИ, 2021. – С. 86–90.
5. Лаптинский, В. Н. Аналитическое решение задачи о динамическом ламинарном пограничном слое в автомоделном случае / В. Н. Лаптинский, А. А. Романенко // Материалы, оборудование и ресурсосберегающие технологии: материалы Междунар. науч.-техн. конф. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2021. – С. 386–387.
6. Лаптинский, В. Н. Об одном аналитическом методе решения задачи о динамическом ламинарном пограничном слое в автомоделном случае / В. Н. Лаптинский // Ученые записки ЦАГИ. – 2013. – Т. XLIV, № 5. – С. 72–93.