

УДК 517.927.4

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ  
МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА ВТОРОГО ПОРЯДКА

В. А. ЛИВИНСКАЯ

Белорусско-Российский университет

Могилев, Беларусь

Изучается задача о периодических решениях с периодом  $\omega$  уравнения типа [1–5]

$$\ddot{X} = \lambda A(t)X + \lambda^3(P(t)X + Q_1(t)XQ_2(t) + XB(t)) + F(t), \quad X \in \mathbb{R}^{n \times m}, \quad (1)$$

с непрерывными  $\omega$ -периодическими коэффициентами соответствующих размерностей;  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\dot{X} = dX/dt$ .

На основе применения метода [6, гл. II] получены коэффициентные достаточные условия существования и единственности решения данной задачи, а также оценки области локализации и алгоритм построения решения и его производной.

Вместо уравнения (1) рассматривается эквивалентная система матричных дифференциальных уравнений

$$dX/dt = Y, \quad (2)$$

$$dY/dt = \lambda A(t)X + \lambda^3(P(t)X + Q_1(t)XQ_2(t) + XB(t)) + F(t). \quad (3)$$

Фактически вместо данной задачи исследуется периодическая краевая задача для (2), (3) с условиями

$$X(0, \lambda) = X(\omega, \lambda), \quad Y(0, \lambda) = Y(\omega, \lambda). \quad (4)$$

В свою очередь, задача (2)–(4) сведена к эквивалентной интегральной задаче, к которой применена модификация [6, гл. III] обобщенного принципа сжимающих отображений [7].

Введены следующие обозначения:

$$\tilde{A}(\omega) = \int_0^{\omega} A(\tau) d\tau, \quad \gamma = \|\tilde{A}^{-1}(\omega)\|, \quad \varepsilon = |\lambda|, \quad \alpha = \max_t \|A(t)\|, \quad \beta = \max_t \|B(t)\|,$$

$$\mu = \max_t \|P(t)\|, \quad \delta_i = \max_t \|Q_i(t)\|, \quad h = \max_t \|F(t)\|, \quad q_1 = \frac{1}{4}\gamma\alpha^2\omega^3 + \gamma(\beta + \delta_1\delta_2 + \mu)\omega,$$

$$q_2 = \frac{1}{4}\gamma\alpha(\beta + \delta_1\delta_2 + \mu)\omega^3, \quad q(\varepsilon) = \varepsilon q_1 + \varepsilon^3 q_2, \quad K(\varepsilon) = \frac{1}{2}\varepsilon\omega[\alpha + \varepsilon^2(\beta + \delta_1\delta_2 + \mu)],$$

$$H(\varepsilon) = \gamma\omega\left(\frac{1}{4}\alpha\omega^2 + \frac{1}{\varepsilon}\right)h,$$

где  $i=1,2$ ,  $t \in [0, \omega]$ ,  $\|\cdot\|$  – норма матриц в конечномерной банаховой алгебре  $\mathcal{B}(n)$  непрерывных матриц-функций с нормой  $\|X\|_C = \max_t \|X(t)\|$ .

**Теорема.** Пусть выполнены условия  $\det \tilde{A}(\omega) \neq 0$ ,  $0 < \varepsilon q_1 + \varepsilon^3 q_2 < 1$ . Тогда решение  $X(t, \lambda), Y(t, \lambda)$  задачи (2)–(4) существует и единственно; оно представимо в виде

$$X(t, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{k-1} X_{k-1}(t), \quad (5)$$

$$Y(t, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k Y_k(t), \quad (6)$$

где матрицы  $X_{k-1}(t), Y_k(t)$  строятся по алгоритму типа [1, 2].

На основе методики, используемой в [1–5], изучены вопросы сходимости, скорости сходимости рядов (5), (6), при этом получены оценки

$$\|X(t, \lambda)\|_C \leq \frac{H(\varepsilon)}{1 - q(\varepsilon)}, \quad \|Y(t, \lambda)\|_C \leq \frac{K(\varepsilon)H(\varepsilon)}{1 - q(\varepsilon)} + \frac{1}{2} \omega h.$$

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Лаптинский, В. Н.** Об аналитической структуре периодических решений матричного дифференциального уравнения типа Ляпунова / В. Н. Лаптинский, В. А. Ливинская // Дифференциальные уравнения. – 2000. – Т. 36, № 9. – С. 1290–1291.
2. **Лаптинский, В. Н.** К теории периодических решений матричного дифференциального уравнения второго порядка типа Ляпунова / В. Н. Лаптинский, В. А. Ливинская // Дифференциальные уравнения. – 2002. – Т. 38, № 8. – С. 1133–1134.
3. **Ливинская, В. А.** К построению периодических решений матричного уравнения Ляпунова второго порядка с параметром / В. А. Ливинская // Еругинские чтения–2014: материалы XVI Междунар. науч. конф. по дифференциальным уравнениям, Новополоцк, 20–22 мая 2014 г. – Полоцк: Полоц. гос. ун-т, 2014. – С. 66–67.
4. **Ливинская, В.А.** К теории периодических решений матричного уравнения Ляпунова второго порядка с параметром / В. А. Ливинская // Материалы, оборудование и ресурсосберегающие технологии: материалы Междунар. науч.-техн. конф. – Могилев: Беларус.-Рос. ун-т, 2019. – С. 521–522.
5. **Ливинская, В. А.** О периодических решениях уравнения Ляпунова второго порядка с параметром / В. А. Ливинская // Материалы, оборудование и ресурсосберегающие технологии: материалы Междунар. науч.-техн. конф. – Могилев: Беларус.-Рос. ун-т, 2021. – С. 388–389.
6. **Лаптинский, В. Н.** Конструктивный анализ управляемых колебательных систем / В. Н. Лаптинский. – Минск: ИМ НАН Беларуси, 1998. – 300 с.
7. Приближенное решение операторных уравнений / М. А. Красносельский [и др.]. – Москва: Наука, 1969. – 456 с.