

УДК 517.927.4

К ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ОБОБЩЕНИЯ
МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ ЛЯПУНОВА И РИККАТИ

О. А. МАКОВЕЦКАЯ

Белорусско-Российский университет

Могилев, Беларусь

На основе конструктивного метода [1, гл. 2] исследуется задача

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + C(t)XB(t) + XQ(t)X + F(t, X), \quad (1)$$

$$X(0) = X(\omega), \quad (2)$$

где $(t, X) \in I \times \mathbb{R}^{n \times n}$, $A, B, C, Q \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^{n \times n})$, $F \in \mathcal{C}(D_{\tilde{\rho}}, \mathbb{R}^{n \times n})$; $I = [0; \omega]$, $D_{\tilde{\rho}} = \{(t, X); t \in I, \|X\| < \tilde{\rho}\}$; $\omega > 0$, $0 < \tilde{\rho} \leq \infty$. Предполагается, что функция $F(t, X)$ удовлетворяет условию Липшица по X локально в $D_{\tilde{\rho}}$, $F(t, 0) \neq 0$.

Введены следующие обозначения:

$$D_{\rho} = \{(t, X): 0 \leq t \leq \omega, \|X\| \leq \rho\}, \quad \tilde{A}(\omega) = \int_0^{\omega} A(\tau) d\tau, \quad \gamma = \|A^{-1}(\omega)\|, \quad \alpha = \max_t \|A(t)\|,$$

$$\beta = \max_t \|B(t)\|, \quad \sigma = \max_t \|C(t)\|, \quad \delta = \max_t \|Q(t)\|,$$

$$q(\rho) = \gamma \left[\frac{1}{2} \alpha (\alpha + \sigma\beta + L + 2\delta\rho) \omega^2 + (\sigma\beta + L + 2\delta\rho) \omega \right];$$

$$\varphi(\rho) = \gamma \left\{ h + \frac{1}{2} \alpha [(\alpha + \sigma\beta + L)\rho + \delta\rho^2] \omega^2 + [h + (\sigma\beta + L)\rho + \delta\rho^2] \omega \right\},$$

где $0 < \rho < \tilde{\rho}$, $t \in I$, $L = L(\rho) > 0$ – постоянная Липшица для $F(t, X)$. Краевая задача (1), (2) исследуется в конечномерной банаховой алгебре $\mathcal{B}(n)$ непрерывных матриц-функций с нормой $\|X\|_{\mathcal{C}} = \max_{t \in I} \|X(t)\|$, где $\|\cdot\|$ – подходящая норма матриц в рамках определения этой алгебры, например, любая из норм, приведенных в [2, с.21].

Работа является продолжением и развитием исследований, выполненных в [3–5], на основе которых с применением конструктивных методов [1, гл. 2] получена следующая теорема.

Теорема. Пусть выполнены условия:

$$\det \tilde{A}(\omega) \neq 0, \quad (3)$$

$$q(\rho) < 1, \quad (4)$$

$$\varphi(\rho) \leq \rho. \quad (5)$$

Тогда в области D_ρ решение задачи (1), (2) существует и единственно. Это решение представимо как предел равномерно сходящейся последовательности матричных функций, определяемых рекуррентным интегральным соотношением

$$X_{k+1}(t) = \tilde{A}^{-1}(\omega) \left\{ \int_0^t \left(\int_0^\tau A(\sigma) d\sigma \right) G(\tau, X_k(\tau)) d\tau - \int_t^\omega \left(\int_\tau^\omega A(\sigma) d\sigma \right) G(\tau, X_k(\tau)) d\tau - \right. \\ \left. - \int_0^\omega [CX_k(\tau)B(\tau) + X_k(\tau)Q(\tau)X_k(\tau) + F(\tau, X_k(\tau))] d\tau \right\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (6)$$

при этом справедлива оценка $\|X\|_{\mathbb{C}} \leq \varphi(\rho)$.

Здесь $X_0(t)$ – произвольная матричная функция класса $\mathbb{C}[0, \omega]$, принадлежащая множеству D_ρ .

$$G(t, X) = A(t)X + CXB(t) + XQ(t)X + F(t, X).$$

При получении алгоритма (6) используется условие (3) и матричный левосторонний регуляризатор [3].

На основе условий (4), (5) получена рекуррентная оценка

$$\|X_{m+1} - X_m\|_{\mathbb{C}} \leq q \|X_m - X_{m-1}\|_{\mathbb{C}}, \quad m = 1, 2, \dots,$$

с помощью которой выведена оценка, характеризующая скорость сходимости алгоритма (6), а также оценка области локализация решения

$$\|X - X_k\|_{\mathbb{C}} \leq \frac{q^k}{1-q} \|X_1 - X_0\|_{\mathbb{C}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\|X\|_{\mathbb{C}} \leq \|X_0\|_{\mathbb{C}} + \frac{\|X_1 - X_0\|_{\mathbb{C}}}{1-q}.$$

Как и алгоритм (6), эти оценки достаточно удобны для применений.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Лаптинский, В. Н.** Конструктивный анализ управляемых колебательных систем / В. Н. Лаптинский. – Минск: ИМ НАН Беларуси, 1998. – 300 с.
2. **Демидович, Б. П.** Лекции по математической теории устойчивости / Б. П. Демидович. – Москва: Наука, 1967. – 472 с.
3. **Лаптинский, В. Н.** Построение и структурные свойства решений периодической краевой задачи для обобщения матричных уравнений Ляпунова и Риккати / В. Н. Лаптинский, О. А. Маковецкая // Дифференциальные уравнения. – 2018. – Т. 54, № 7. – С. 919–928.
4. **Маковецкая, О. А.** К периодической краевой задаче для матричного уравнения Ляпунова – Риккати / О. А. Маковецкая // Материалы, оборудование и ресурсосберегающие технологии: материалы Междунар. науч.-техн. конф. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2020. – С. 495–496.
5. **Маковецкая, О. А.** Регуляризация периодической краевой задачи для матричного уравнения Ляпунова – Риккати / О. А. Маковецкая // Актуальные проблемы науки и техники: материалы I Междунар. науч.-техн. конф. – Ижевск: ИжГТУ им. М. Т. Калашникова, 2021. – С. 16–20.