УДК 517.927.4

К ЛЕВОСТОРОННЕЙ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА АБЕЛЯ

И. И. МАКОВЕЦКИЙ
Белорусско-Российский университет
Могилев, Беларусь

Изучается краевая задача

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + C(t)XB(t) + S(t)X^3 + F(t), \tag{1}$$

$$MX(0) + NX(\omega) = 0, \tag{2}$$

где $(t,X) \in I \times \mathbb{R}^{n\times n}$, $A,B,C,S,F \in \mathbb{C}\left(I,\mathbb{R}^{n\times n}\right)$, M, N – вещественные постоянные матрицы; $I = [0,\omega]$, $\omega > 0$.

Методологическая основа исследования изложена в [1, гл. 2], на основе которой получены коэффициентные достаточные условия однозначной разрешимости задачи (1), (2), разработан и исследован итерационный алгоритм классического типа построения ее решения.

Обозначения:

$$D_\rho = \left\{(t,X) : t \in I, \|X\| \le \rho\right\},\ \Phi = E + U^{-1}(\omega)N^{-1}M,\ \gamma = \left\|\Phi^{-1}\right\|,\ m = \max\left\{\|\Phi - E\|, 1\right\},$$

$$\beta = \max_t \|B(t)\|,\ \sigma = \max_t \|C(t)\|,\ \delta = \max_t \|S(t)\|,\ h = \max_t \|F(t)\|,$$

$$\lambda_1 = \max_t \|U(t)\|,\ \lambda_2 = \max_t \left\|U^{-1}(t)\right\|,\ q = \gamma\lambda m\omega\left(\sigma\beta + 3\delta\rho^2\right),\ p = \gamma\lambda m\omega h,$$

где $\rho > 0$, $t \in I$, $\lambda = \lambda_1\lambda_2$, E – единичная матрица, $U(t)$ – решение уравнения $dU/dt = A(t)U$, $U(0) = E$. Краевая задача (1), (2) исследуется в конечномерной банаховой алгебре $\mathcal{B}(n)$ непрерывных матриц-функций с нормой $\|X\|_{\mathbb{C}} = \max_{t\in I}\|X(t)\|$, где $\|\bullet\|$ – норма матриц в рамках определения этой алгебры, например, любая из приведенных в [2, с.21].

В работе, являющейся продолжением [3, 4], развиты подходы [5, гл.1].

Теорема. Пусть выполнены условия:

$$\det N\Phi \ne 0, \tag{3}$$

$$q < 1, \tag{4}$$

$$p/(1-q) \le \rho. \tag{5}$$

Тогда в области D_ρ решение задачи (1), (2) существует и единственно. Это решение представимо как предел равномерно сходящейся последовательности матричных функций, определяемых рекуррентным интегральным соотношением, при этом справедлива оценка $\|X(t)\| \le p/(1-q)$.

Для построения решения задачи (1), (2) на основе левостороннего матричного регуляризатора [1, гл. 2] и условия (3) разработан итерационный алгоритм классического типа [6, с. 605]

$$X_{k+1}(t)=U(t)\Phi^{-1}\left[P\int_0^t U^{-1}(\tau)\big(C(\tau)X_k(\tau)B(\tau)+S(\tau)X_k^3(\tau)+F(\tau)\big)d\tau-\right.$$

$$\left.-\int_t^{\omega} U^{-1}(\tau)\big(C(\tau)X_k(\tau)B(\tau)+S(\tau)X_k^3(\tau)+F(\tau)\big)d\tau\right],\ k=0,1,2,\ldots, \quad (6)$$

где $X_0(t)$ – произвольная матричная функция класса $\mathbb{C}\left(I,\mathbb{R}^{n\times n}\right)$, подчиненная неравенству $\|X_0\|_{\mathbb{C}}\le\rho$, в частности, в качестве начального приближения можно использовать $X_0=0$. Установлено, что все приближения, полученные с помощью алгоритма (6), удовлетворяют краевому условию (2).

На основании условия (4) получена оценка, характеризующая скорость сходимости алгоритма (6):

$$\|X_k-X\|_{\mathbb{C}}\le q^k\frac{\|X_1-X_0\|_{\mathbb{C}}}{1-q},\ k=0,1,2,\ldots, \quad (7)$$

откуда при $k=0$, $X_0=0$ следует оценка (5), а именно

$$\|X(t)\|\le\frac{\|X_1\|_{\mathbb{C}}}{1-q}=\frac{\max\limits_t\left\|U(t)\Phi^{-1}\left[P\int_0^t U^{-1}(\tau)F(\tau,0)d\,\mathrm{t}-\int_t^{\omega}U^{-1}(\tau)F(\tau,0)d\tau\right]\right\|}{1-q}\le$$

$$\le\frac{\lambda\gamma m\int_0^{\omega}\left\|U^{-1}(\tau)\right\|\left\|F(\tau,0)\right\|d\tau}{1-q}\le\frac{\lambda\gamma\mathrm{m}\omega\mathrm{h}}{1-q}=\frac{p}{1-q}.$$

Как и оценка (7), эта оценка является коэффициентной.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Лаптинский, В. Н.** Конструктивный анализ управляемых колебательных систем / В. Н. Лаптинский. – Минск: ИМ НАН Беларуси, 1998. – 300 с.
2. **Демидович, Б. П.** Лекции по математической теории устойчивости / Б. П. Демидович. – Москва: Наука, 1967. – 472 с.
3. **Лаптинский, В. Н.** К построению решения двухточечной краевой задачи для нелинейного матричного уравнения Ляпунова / В. Н. Лаптинский, И. И. Маковецкий // Дифференциальные уравнения. – 2020. – Т. 56, № 1. – С. 137–141.
4. **Маковецкий, И. И.** К регуляризации нелинейно возмущенной двухточечной краевой задачи для матричного уравнения Ляпунова с параметром / И. И. Маковецкий // Актуальные проблемы науки и техники: материалы I Междунар. науч.-техн. конф. – Ижевск: ИжГТУ им. М. Т. Калашникова, 2021. – С. 10–15.
5. **Лаптинский, В. Н.** Матричные дифференциальные уравнения Ляпунова и Риккати / В. Н. Лаптинский, И. И. Маковецкий, В. В. Пугин. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2012. – 167 с.
6. **Канторович, Л. В.** Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. – Москва : Наука, 1977. – 744 с.