УДК 517.927.4

АНАЛИЗ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ РИККАТИ

Д. В. РОГОЛЕВ
Белорусско-Российский университет
Могилев, Беларусь

Рассматривается краевая задача [1]

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = A_1(t)X + XB_1(t) + X\big(S_1(t)X + S_2(t)Y\big) + C_1(t)X^2 + X^2C_2(t) + F_1(t), \\ \dfrac{dY}{dt} = A_2(t)Y + YB_2(t) + Y\big(P_1(t)X + P_2(t)Y\big) + Q_1(t)Y^2 + Y^2Q_2(t) + F_2(t), \end{cases} \tag{1}$$

$$X(0) = X(\omega),\ Y(0) = Y(\omega), \tag{2}$$

с коэффициентами класса $\mathbb{C}\big(I, \mathbb{R}^{n\times n}\big)$, $(t, X, Y) \in I \times \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times n}$; $I = [0,\omega]$, $\omega > 0$.

Используются следующие обозначения:

$$D = \{(t, X, Y) : 0 \le t \le \omega, \|X\| \le \rho_1, \|Y\| \le \rho_2\},\ M_i = \int_0^{\omega} A_i(\tau)d\tau,\ N_i = -\int_0^{\omega} B_i(\tau)d\tau,$$

$$\gamma_i = \left\|\Phi_i^{-1}(\omega)\right\|,\ \alpha_i = \max_t \|A_i(t)\|,\ \beta_i = \max_t \|B_i(t)\|,\ \delta_i = \max_t \|S_i(t)\|,\ \mu_i = \max_t \|P_i(t)\|,$$

$$\sigma_i = \max_t \|C_i(t)\|,\ \nu_i = \max_t \|Q_i(t)\|,\ h_i = \max_t \|F_i(t)\|,$$

$$\varphi_1(\rho_1,\rho_2) = \gamma_1 \Big\{ \frac{1}{2}(\alpha_1+\beta_1)\Big[(\alpha_1+\beta_1)\rho_1 + (\delta_1+\sigma_1+\sigma_2)\rho_1^2 + \delta_2\rho_1\rho_2 + h_1\Big]\omega^2 +$$

$$+\Big((\delta_1+\sigma_1+\sigma_2)\rho_1^{\,2} + \delta_2\rho_1\rho_2 + h_1\Big)\omega\Big\},$$

$$\varphi_2(\rho_1,\rho_2) = \gamma_2 \Big\{ \frac{1}{2}(\alpha_2+\beta_2)\Big[(\alpha_2+\beta_2)\rho_2 + \mu_1\rho_1\rho_2 + (\mu_2+\nu_1+\nu_2)\rho_2^2 + h_2\Big]\omega^2 +$$

$$+\Big(\mu_1\rho_1\rho_2 + (\mu_2+\nu_1+\nu_2)\rho_2^2 + h_2\Big)\omega\Big\},\ \rho = \begin{pmatrix}\rho_1\\ \rho_2\end{pmatrix},\ \varphi(\rho) = \begin{pmatrix}\varphi_1(\rho_1,\rho_2)\\ \varphi_2(\rho_1,\rho_2)\end{pmatrix},\ A = \varphi'(\rho),$$

где $i = 1,2$, $t \in I$, $\rho_1, \rho_2 > 0$, Φ_i – линейные операторы, $\Phi_i Z = M_i Z - Z N_i$, $\varphi'(\rho)$ – матрица Якоби для $\varphi(\rho)$.

В работе, являющейся продолжением и развитием [1], с помощью метода [2, гл. 3] получена следующая теорема.

Теорема. *Пусть выполнены следующие условия*:

1) $\sigma(M_i)\cap\sigma(N_i)=\varnothing$ $(i=1,2)$ ($\sigma\left(K\right)$ *– множество характеристических чисел матрицы* K);

2) $\varphi\left(\rho\right)\le\rho$;

3) $a_{11}<1$, $\det\left(E-A\right)>0$,

где $E=diag\left(1,1\right)$. *Тогда задача* (1), (2) *однозначно разрешима в области* D.

Разработан алгоритм построения решения, основанный на вычислительной схеме типа [2, гл. 3] и имеющий в дифференциальной форме вид

$$\frac{dX_{k+1}}{dt}=A_1(t)X_k+X_kB_1(t)+X_k\left(S_1(t)X_k+S_2(t)Y_k\right)+C_1(t)X_k^2+X_k^2C_2(t)+F_1(t), \quad (3)$$

$$\frac{dY_{k+1}}{dt}=A_2(t)Y_k+Y_kB_2(t)+Y_k\left(P_1(t)X_k+P_2(t)Y_k\right)+Q_1(t)Y_k^2+Y_k^2Q_2(t)+F_2(t), \quad (4)$$

$$X_{k+1}(0)=X_{k+1}(\omega), \quad (5)$$

$$Y_{k+1}(0)=Y_{k+1}(\omega),\ k=0,1,2,\ldots, \quad (6)$$

где в качестве начального приближения X_0, Y_0 приняты постоянные матрицы, определяемые из условий (5), (6) для приближений $X_1(t)$, $Y_1(t)$ соответственно:

$$\int_0^{\omega}\left[A_1(\tau)X_0+X_0B_1(\tau)+X_0\left(S_1(\tau)X_0+S_2(\tau)Y_0\right)+C_1(\tau)X_0^2+X_0^2C_2(\tau)+F_1(\tau)\right]d\tau=0,$$

$$\int_0^{\omega}\left[A_2(\tau)Y_0+Y_0B_2(\tau)+Y_0\left(P_1(\tau)X_0+P_2(\tau)Y_0\right)+Q_1(\tau)Y_0^2+Y_0^2Q_2(\tau)+F_2(\tau)\right]d\tau=0.$$

С помощью конструктивного регуляризатора [2, гл. 3] на основе (3)–(6) получено рекуррентное интегральное соотношение для вычисления функций $X_j(t),\ Y_j(t),\ j=0,1,2,\ldots.$

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Лаптинский, В. Н.** Конструктивные методы построения решения периодической краевой задачи для системы матричных дифференциальных уравнений типа Риккати / В. Н. Лаптинский, Д. В. Роголев // Дифференциальные уравнения. – 2011. – Т. 47, № 10. – С. 1412–1420.

2. **Лаптинский, В. Н.** Конструктивный анализ управляемых колебательных систем / В. Н. Лаптинский. – Минск : Ин-т математики НАН Беларуси, 1998. – 300 с.