МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Высшая математика»

ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОЕКТНЫХ РЕШЕНИЙ

Методические рекомендации к лабораторным работам для студентов специальности 1-40 05 01 «Информационные системы и технологии (по направлениям)» дневной и заочной форм обучения

Часть 2

Могилев 2022

УДК 519.6
ББК 22.19
О62

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Высшая математика» «24» февраля 2022 г., протокол № 6

Составители: ст. преподаватель А. Н. Бондарев;
ст. преподаватель А. М. Бутома;
ст. преподаватель А. Г. Козлов;
доц. Д. В. Роголев

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доц. И. И. Маковецкий

Методические рекомендации к лабораторным работам по дисциплине «Оптимизация проектных решений» предназначены для студентов специальности 1-40 05 01 «Информационные системы и технологии (по направлениям)» дневной и заочной форм обучения.

Учебно-методическое издание

ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОЕКТНЫХ РЕШЕНИЙ

Ответственный за выпуск В. Г. Замураев

Корректор И. В. Голубцова

Компьютерная верстка Н. П. Полевничая

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 56 экз. Заказ № .

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.

Содержание

Требования к составлению отчётов

Отчёты к лабораторным работам оформляются с использованием текстовых редакторов (LibreOffice и т. п.) и должны включать следующее:
– название и цель работы;
– постановку задачи для своего варианта;
– выведенные вспомогательные формулы и (или) функции;
– таблицы с результатами расчётов;
– анализ полученных результатов и выводы.

1 Лабораторная работа № 10. Графическое решение задачи линейного программирования

Цель работы: изучение решения задачи линейного программирования (ЗЛП) графическим методом.

1 Постановка задачи.

Привести ЗЛП к стандартному виду и решить её графически.

2 Теоретические сведения.

Пусть дана следующая ЗЛП:

$$\max\left(\min\right) Z = -4x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5,$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_3 - x_4 = 4, \\ 4x_1 + 4x_2 - x_3 - x_5 = 32, \\ 5x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 20, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

Решая систему ограничений ЗЛП как систему линейных уравнений методом Гаусса, выразим базисные переменные x_3, x_4, x_5 через свободные x_1, x_2:

$$\begin{cases} x_3 = -16 + 3x_1 + x_2, \\ x_4 = 12 - x_1 - x_2, \\ x_5 = -16 + x_1 + 3x_2. \end{cases} \tag{1.1}$$

Подставляя значения для базисных переменных в функцию цели, получим

$$Z = -4x_1 - 2x_2 - 16 + 3x_1 + x_2 - 12 + x_1 + x_2 - 16 + x_1 + 3x_2 = x_1 + 3x_2 - 44.$$

Используя условие неотрицательности переменных, имеем

$$\begin{cases} x_3 = -16 + 3x_1 + x_2 \ge 0, \\ x_4 = 12 - x_1 - x_2 \ge 0, \\ x_5 = -16 + x_1 + 3x_2 \ge 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + x_2 \ge 16, \\ x_1 + x_2 \le 12, \\ x_1 + 3x_2 \ge 16. \end{cases}$$

В результате ЗЛП примет вид:

$$\max(\min) Z = x_1 + 3x_2 - 44,$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \ge 16, \\ x_1 + x_2 \le 12, \\ x_1 + 3x_2 \ge 16, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Построим область допустимых решений ЗЛП и градиентный вектор $\vec{c} = (1;3)$ (рисунок 1.1).

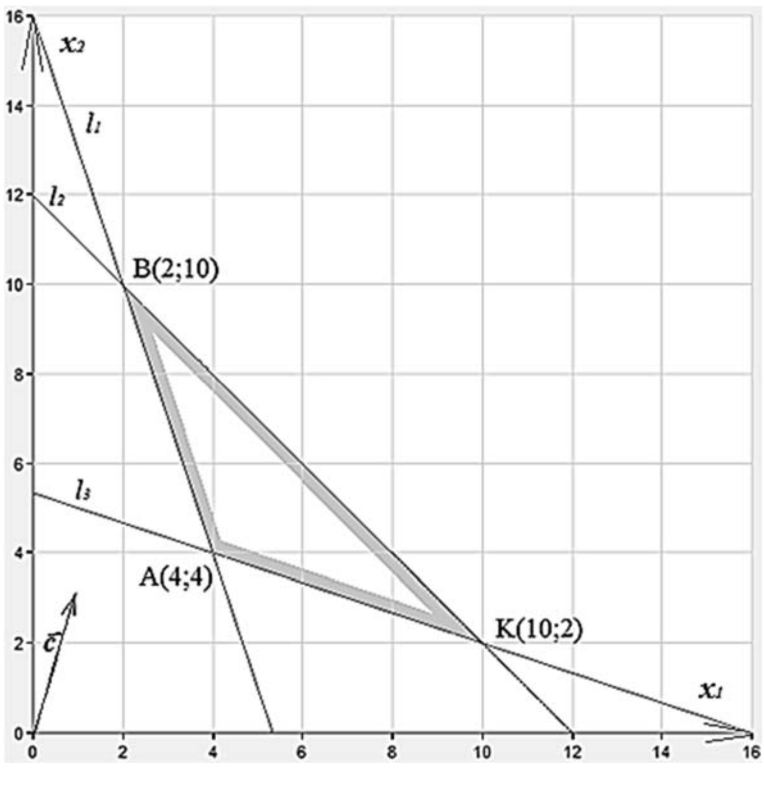


Рисунок 1.1

Найдём координаты угловых точек области допустимых решений:

$$A(4;4), \qquad B(2;10), \qquad K(10;2).$$

Если построенную перпендикулярно к вектору $\vec{c}$ линию уровня переместить вдоль вектора градиентного направления, получим

$$X_{\max} = X_B, \qquad Z_{\max} = 2 + 3 \cdot 10 - 44 = -12.$$

Перемещая линию уровня в антиградиентом направлении (на рисунке 1.1 совпадает с прямой l_3), получим

$$X_{\min}^1 = X_A, \qquad X_{\min}^2 = X_K.$$

По основной теореме линейного программирования (если ЗЛП достигает экстремального значения более чем в одной угловой точке, то этого значения ЗЛП достигает и в выпуклой линейной комбинации этих угловых точек) имеем

$$X_{\min} = \lambda \cdot X_{\min}^1 + (1-\lambda) \cdot X_{\min}^2 = \lambda \cdot (4;4) + (1-\lambda) \cdot (10;2) = (10-6\lambda; 2+2\lambda),\ 0 \le \lambda \le 1,$$

$$Z_{\min} = 10 - 6\lambda + 3 \cdot (2 + 2\lambda) - 44 = -28.$$

Найдем решение исходной ЗЛП для пяти неизвестных. План $X_{\max}$ определим, подставив координаты точки B в систему (1.1):

$$X_{\max} = (2;10;-16+3\cdot 2+10;12-2-10;-16+2+3\cdot 10) = (2;10;0;0;16).$$

Таким образом, $Z_{\max} = -12$.

План $X_{\min}$ найдём с учётом основной теоремы линейного программирования:

$$X_{\min}^1 = (4;4;-16+3\cdot 4+4;12-4-4;-16+4+3\cdot 4) = (4;4;0;4;0),$$

$$X_{\min}^2 = (10;2;-16+3\cdot 10+2;12-10-2;-16+10+3\cdot 2) = (10;2;16;0;0).$$

Таким образом, $X_{\min} = (10-6\lambda;2+2\lambda;-16\lambda+16;4\lambda;0)$, $Z_{\min} = -28$.

3 Варианты заданий.

1 max (min) $Z = -3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5$, $\quad \begin{cases} -3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 9, \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 - x_5 = 6, \\ 4x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 18, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,5}. \end{cases}$

2 max (min) $Z = -3x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 - x_5$, $\quad \begin{cases} 4x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 = 32, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_4 + x_5 = 24, \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 22, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,5}. \end{cases}$

3 $\max(\min) Z = x_1 - x_3 + x_4 + x_5,$ $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 12, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_5 = 8, \\ 2x_1 + x_3 - x_4 - x_5 = 8, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,5}. \end{cases}$

4 $\max(\min) Z = -x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 - x_5,$ $\begin{cases} -x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 = 19, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 16, \\ -2x_1 + 3x_2 + x_4 = 10, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,5}. \end{cases}$

5 $\max(\min) Z = 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5,$ $\begin{cases} 8x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 24, \\ 6x_1 + 4x_2 - x_3 - x_5 = 18, \\ 10x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 4, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,5}. \end{cases}$

6 $\max(\min) Z = 5x_1 - 5x_2 - x_3 + x_4 - x_5,$ $\begin{cases} -3x_1 + 7x_2 + x_3 - x_4 = 8, \\ 5x_1 - 5x_2 - x_3 + x_5 = 10, \\ -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = -4, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,5}. \end{cases}$

7 $\max(\min) Z = 4x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - x_5,$ $\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 + x_3 - x_4 = 26, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 = 24, \\ 2x_1 + 9x_2 + 2x_3 - x_4 = 42, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,5}. \end{cases}$

8 $\max(\min) Z = 7x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - x_5,$ $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = -8, \\ 4x_1 - x_3 + x_5 = 20, \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 34, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,5}. \end{cases}$

9 $\max(\min) Z = 7x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 + x_5,$ $\begin{cases} x_1 + 6x_2 - x_3 + x_4 = 31, \\ 7x_1 - 2x_2 - x_3 + x_5 = 19, \\ -4x_1 + 9x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 19, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,5}. \end{cases}$

10 $\max(\min) Z = 3x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 - x_5,$ $\begin{cases} x_1 + 7x_2 + x_3 - x_4 = 28, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 + x_5 = 30, \\ 5x_1 + 8x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 50, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,5}. \end{cases}$

11 $\max\ (\min)\ Z = x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 - x_5,$ $\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 - x_3 + x_4 = 18, \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 10, \\ 4x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 22, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,5}. \end{cases}$

12 $\max\ (\min)\ Z = 2x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - x_5,$ $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 14, \\ 2x_1 + x_3 + x_5 = 12, \\ 4x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 21, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,5}. \end{cases}$

13 $\max\ (\min)\ Z = 3x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 - x_5,$ $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 8, \\ 4x_2 + x_4 + x_5 = 16, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 12, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,5}. \end{cases}$

14 $\max\ (\min)\ Z = x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 - x_5,$ $\begin{cases} 4x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 14, \\ 5x_1 + 4x_2 - x_3 + x_5 = 42, \\ 6x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 42, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,5}. \end{cases}$

15 $\max\ (\min)\ Z = -2x_2 + x_3 - x_4 + x_5,$ $\begin{cases} 2x_1 - x_3 - x_4 = 4, \\ 4x_1 + 4x_2 - x_3 - x_5 = 32, \\ 5x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 20, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,5}. \end{cases}$

16 $\max\ (\min)\ Z = -4x_1 + 6x_2 - x_3 - x_4 + x_5,$ $\begin{cases} -x_1 + 6x_2 + x_3 + x_4 = 22, \\ -4x_1 + 4x_2 + x_3 + x_5 = 8, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 15, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,5}. \end{cases}$

17 $\max\ (\min)\ Z = 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5,$ $\begin{cases} 5x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 = 40, \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 - x_5 = 21, \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 - x_5 = 30, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,5}. \end{cases}$

18 $\max\ (\min)\ Z = -4x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 + x_5,$ $\begin{cases} 6x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 24, \\ 2x_1 + 6x_2 - x_3 - x_5 = 8, \\ 7x_1 + 5x_2 - 2x_3 - x_5 = 12, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,5}. \end{cases}$

19 max (min) $Z = 5x_1 + 6x_2 + x_3 - x_4 - x_5$, $\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 - x_3 - x_4 = -21, \\ 6x_1 + 5x_2 - x_3 - x_5 = 35, \\ 10x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 18, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,5}. \end{cases}$

20 max (min) $Z = 2x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 - x_5$, $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = -8, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_5 = 8, \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 34, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,5}. \end{cases}$

Контрольные вопросы

1 Что называется ЗЛП?
2 В чём заключается суть графического метода решения ЗЛП?

2 Лабораторная работа № 11. Симплексный метод решения задачи линейного программирования

Цель работы: изучение решения ЗЛП симплексным методом.

1 Постановка задачи.
Решить ЗЛП симплексным методом.

2 Теоретические сведения.
Пусть дана следующая ЗЛП:

$$\max Z = 3x_1 + 3x_2,$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 \le 45, \\ 3x_1 + 5x_2 \le 30, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Введя новые переменные x_3, x_4, приведём ЗЛП к канонической форме:

$$\max Z = 3x_1 + 3x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4,$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 + x_3 = 45, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_4 = 30, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

Предпочтительными являются переменные x_3, x_4, поэтому их выбираем в качестве базисных. Переменные x_1, x_2 будут свободными, их приравниваем к нулю. Таким образом, получаем начальный опорный план:

$$X_0 = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (0;0;45;30), \qquad Z(X_0) = 0.$$

Составим первую симплексную таблицу (таблица 2.1).

Таблица 2.1

Базисные переменные	l	Свободные переменные		θ
		$-x_1$	$-x_2$	
$x_3 =$	45	$\boxed{6}$	5	15/2
$x_4 =$	30	3	5	10
$Z =$	0	–3	–3	

План X_0 не является оптимальным, т. к. в индексной строке имеются отрицательные элементы. Выполняя симплексные преобразования, получим таблицу 2.2.

Таблица 2.2

Базисные переменные	l	Свободные переменные		θ
		$-x_3$	$-x_2$	
$x_1 =$	15/2	1/6	5/6	9
$x_4 =$	15/2	–1/2	$\boxed{5/2}$	3
$Z =$	45/2	1/2	–1/2	

Получили опорный план $X_1 = (15/2;0;0;15/2)$, при этом значение целевой функции $Z(X_0) = 45/2$. Этот план не является оптимальным, т. к. в индексной строке имеется отрицательный элемент. Продолжая симплексные преобразования, получим таблицу 2.3.

Таблица 2.3

Базисные переменные	l	Свободные переменные	
		$-x_3$	$-x_4$
$x_1 =$	5	1/3	–1/3
$x_2 =$	3	–1/5	2/5
$Z =$	24	2/5	1/5

В индексной строке нет отрицательных элементов, поэтому опорный план $X_2 = (5;3;0;0)$ является оптимальным. Таким образом, $Z_{\max} = Z(X_2) = 24$.

3 Варианты заданий.

Варианты заданий к лабораторной работе № 11 представлены в лабораторной работе № 10.

Контрольные вопросы

1 Что называется канонической формой ЗЛП?
2 В чём заключается суть симплексного метода решения ЗЛП?

3 Лабораторная работа № 12. Целочисленное программирование

***Цель работы*:** изучение решения транспортной задачи в матричной постановке методом потенциалов.

1 Постановка задачи.

Решить транспортную задачу перевозок груза от поставщиков A_i к потребителям B_j, если известны A – матрица запасов груза i-го поставщика, B – матрица потребностей j-го потребителя, C – матрица затрат на перевозку одной единицы груза. Начальный опорный план задачи построить методом минимального элемента. Оптимальный план перевозок груза, при котором общие затраты будут минимальными, найти методом потенциалов.

2 Теоретические сведения.

Пусть транспортная задача перевозок груза от поставщиков A_i к потребителям B_j задана в матричном виде:

$$A = \begin{bmatrix} 30 \\ 40 \\ 20 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 20 \\ 25 \\ 35 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Так как запасы поставщиков $\sum_{i=1}^{3} a_i = 90$ и потребности потребителей $\sum_{j=1}^{3} b_j = 80$ не равны, то имеем задачу открытого типа. Введем фиктивного потребителя B_4, для которого стоимости перевозки груза равны нулю и потребность в грузе составляет 10 единиц.

Составим начальный опорный план методом минимального элемента (таблица 3.1). Для этого последовательно выбираем клетки с наименьшими затратами на перевозку и в них вписываем наибольшее количество груза, который можно доставить от поставщика к потребителю, соответствующих этой клетке.

Таблица 3.1

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	20 [1]	0 [2]	[4]	10 [0]	30
A_2	[2]	25 [1]	15 [3]	[0]	40
A_3	[6]	[3]	20 [2]	[0]	20
b_j	20	25	35	10	90

Полученный опорный план невырожденный, для этого в клетку (1;2) поставлен 0. Транспортные расходы при этом составляют

$$f = 20 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 15 \cdot 3 + 25 \cdot 1 + 20 \cdot 2 + 10 \cdot 0 = 130.$$

Проверим данный опорный план на оптимальность, используя метод потенциалов. Для этого поставим в соответствие i-й строке и j-му столбцу числа (потенциалы) u_i и v_j. Для каждой занятой клетки потенциалы должны удовлетворять условию $u_i + v_j = c_{ij}$. Потенциалы поставщиков и потребителей вычислим непосредственно в таблице (таблица 3.2), положив $u_1 = 0$, тогда остальные потенциалы определятся однозначно.

Таблица 3.2

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	20 [1]	0 [2]	[4]	10 [0]	30	0
A_2	[2]	25 [1]	15 [3]	[0]	40	–1
A_3	[6]	[3]	20 [2]	[0]	20	–2
b_j	20	25	35	10	90	
v_j	1	2	4	0		

Находим оценки свободных клеток по формуле $s_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$:

$$s_{13} = c_{13} - (u_1 + v_3) = 4 - (0 + 4) = 0, \quad s_{21} = c_{21} - (u_2 + v_1) = 2 - (-1 + 1) = 2,$$

$$s_{24} = c_{24} - (u_2 + v_4) = 0 - (-1 + 0) = 1, \quad s_{31} = c_{31} - (u_3 + v_1) = 6 - (-2 + 1) = 7,$$

$$s_{32} = c_{32} - (u_3 + v_2) = 3 - (-2 + 2) = 3, \quad s_{34} = c_{34} - (u_3 + v_4) = 0 - (-2 + 0) = 2.$$

Так как все оценки $s_{ij} \geq 0$, то опорный план, представленный в таблице 3.2, оптимален. При этом среди оценок свободных клеток имеется оценка, равная нулю, следовательно, полученный оптимальный план не единственный.

Таким образом, план перевозок груза от поставщиков к потребителям

$$X^* = \begin{pmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 15 \\ 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}$$

оптимален, при этом минимальные транспортные издержки составляют

$$f_{\min} = 20 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 15 \cdot 3 + 25 \cdot 1 + 20 \cdot 2 + 10 \cdot 0 = 130.$$

По оптимальному плану на складе первого поставщика останется 10 единиц груза.

3 Варианты заданий.

$$1\ \ A = \begin{bmatrix} 12 \\ 25 \\ 18 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 16 \\ 20 \\ 14 \\ 10 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & 4 & 2 \\ 1 & 7 & 6 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$2\ \ A = \begin{bmatrix} 15 \\ 33 \\ 20 \\ 12 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 15 \\ 25 \\ 20 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \\ 8 & 5 & 7 \end{bmatrix}.$$

$$3\ \ A = \begin{bmatrix} 20 \\ 27 \\ 18 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 24 \\ 20 \\ 35 \\ 11 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 7 & 6 \end{bmatrix}.$$

$$4\ \ A = \begin{bmatrix} 15 \\ 30 \\ 18 \\ 12 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 25 \\ 17 \\ 23 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 5 \\ 3 & 7 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$5\ \ A = \begin{bmatrix} 19 \\ 25 \\ 16 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 22 \\ 18 \\ 15 \\ 20 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 5 \\ 2 & 6 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 7 & 4 \end{bmatrix}.$$

6 $A=\begin{bmatrix}18\\30\\25\\17\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}28\\27\\20\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}3&4&2\\5&1&2\\9&6&3\\1&3&7\end{bmatrix}$.

7 $A=\begin{bmatrix}17\\21\\12\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}30\\18\\25\\12\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}7&5&1&4\\3&1&3&2\\5&9&2&6\end{bmatrix}$.

8 $A=\begin{bmatrix}42\\27\\36\\20\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}28\\27\\25\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}4&3&2\\1&2&2\\5&6&1\\8&4&7\end{bmatrix}$.

9 $A=\begin{bmatrix}19\\25\\16\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}23\\17\\15\\20\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}5&4&2&5\\2&6&5&1\\1&3&5&4\end{bmatrix}$.

10 $A=\begin{bmatrix}36\\20\\25\\14\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}23\\27\\25\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}3&5&2\\1&3&2\\8&4&7\\5&2&6\end{bmatrix}$.

11 $A=\begin{bmatrix}20\\32\\18\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}21\\35\\14\\25\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}6&4&7&5\\4&8&3&2\\5&3&9&2\end{bmatrix}$.

12 $A=\begin{bmatrix}20\\26\\21\\18\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}20\\24\\26\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}2&3&1\\5&4&2\\7&4&3\\4&2&5\end{bmatrix}$.

13 $A=\begin{bmatrix}15\\10\\25\\10\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}15\\21\\14\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}2&5&1\\3&4&6\\2&1&4\\3&6&5\end{bmatrix}$.

14 $A=\begin{bmatrix}32\\35\\18\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}18\\20\\15\\12\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}2&3&2&5\\3&6&1&2\\1&4&7&4\end{bmatrix}$.

15 $A=\begin{bmatrix}15\\23\\10\\32\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}16\\24\\10\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}2&3&1\\1&4&5\\4&6&7\\8&4&5\end{bmatrix}$.

16 $A=\begin{bmatrix}15\\23\\22\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}21\\10\\23\\16\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}4&1&2&5\\3&7&2&3\\1&3&6&1\end{bmatrix}$.

17 $A=\begin{bmatrix}25\\27\\18\\30\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}16\\22\\12\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}2&3&1\\8&1&2\\3&6&5\\5&4&7\end{bmatrix}$.

18 $A=\begin{bmatrix}28\\25\\22\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}30\\23\\25\\12\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}5&3&7&4\\8&2&1&2\\5&1&4&6\end{bmatrix}$.

19 $A=\begin{bmatrix}16\\24\\25\\35\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}18\\27\\25\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}5&8&4\\3&2&5\\6&5&7\\1&3&9\end{bmatrix}$.

20 $A=\begin{bmatrix}16\\25\\19\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}34\\20\\24\\17\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}1&2&5&1\\4&5&6&8\\3&4&7&3\end{bmatrix}$.

Контрольные вопросы

1 Какая задача называется транспортной?

2 В чём заключается суть метода потенциалов решения транспортной задачи?

4 Лабораторная работа № 13. Методы отсечений. Метод Гомори. Метод ветвей и границ

Цель работы: изучение метода ветвей и границ, метода Гомори целочисленного программирования.

1 Постановка задачи.

Коммивояжер должен посетить каждый из пяти городов только один раз и вернуться в исходный пункт. Известна матрица расстояний между городами.

Требуется найти маршрут минимальной суммарной длины:

1) методом перебора;

2) методом ветвей и границ.

2 Теоретические сведения.

Пусть дана матрица расстояний между городами

$$\begin{bmatrix} \infty & 10 & 9 & 7 & 8 \\ 8 & \infty & 9 & 10 & \infty \\ 7 & 9 & \infty & 4 & 5 \\ 7 & 11 & 9 & \infty & 8 \\ 10 & 8 & 9 & 11 & \infty \end{bmatrix}.$$

1 Найдем все возможные пути движения коммивояжера и вычислим соответствующие расстояния:

$1-2-3-4-5-1$: $10+9+4+8+10=41$;

$1-2-3-5-4-1$: $10+9+5+11+7=42$;

$1-2-4-3-5-1$: $10+10+9+5+10=44$;

$1-2-4-5-3-1$: $10+10+8+9+7=44$;

$1-3-2-4-5-1$: $9+9+10+8+10=46$;

$1-3-4-5-2-1$: $9+4+8+8+8=37$;

$1-3-5-2-4-1$: $9+5+8+10+7=39$;

$1-3-5-4-2-1$: $9+5+11+11+8=44$;

$1-4-2-3-5-1$: $7+11+9+5+10=42$;

$1-4-3-5-2-1$: $7+9+5+8+8=37$;

$1-4-5-2-3-1$: $7+8+8+9+7=39$;

$1-4-5-3-2-1$: $7+8+9+9+8=42$;

$1-5-2-3-4-1$: $8+8+9+4+7=36$;

$1-5-2-4-3-1$: $8+8+10+9+7=42$;

$1-5-3-2-4-1$: $8+9+9+10+7=43$;

$1-5-3-4-2-1$: $8+9+4+11+8=40$;

$1-5-4-2-3-1$: $8+11+11+9+7=46$;

$1-5-4-3-2-1$: $8+11+9+9+8=45$.

Таким образом, кратчайшее расстояние оказывается на пути $1-5-2-3-4-1$.

2 Рассмотрим метод ветвей и границ.

Найдем минимальные значения u_i в строках и приведем матрицу по строкам:

$$C=\begin{array}{c} \\ \begin{bmatrix} \infty & 10 & 9 & 7 & 8 \\ 8 & \infty & 9 & 10 & \infty \\ 7 & 9 & \infty & 4 & 5 \\ 7 & 11 & 9 & \infty & 8 \\ 10 & 8 & 9 & 11 & \infty \end{bmatrix} \end{array}\begin{array}{c} u_i \\ 7 \\ 8 \\ 4 \\ 7 \\ 8 \end{array} \quad\Rightarrow\quad C'=\begin{bmatrix} \infty & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & \infty & 1 & 2 & \infty \\ 3 & 5 & \infty & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & \infty & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & \infty \end{bmatrix}.$$

Найдем минимальные значения v_j в столбцах и приведем матрицу по столбцам:

$$\begin{array}{cc} C'= & \begin{bmatrix} \infty & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & \infty & 1 & 2 & \infty \\ 3 & 5 & \infty & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & \infty & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & \infty \end{bmatrix} \\ v_j & \begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{matrix} \end{array} \quad\Rightarrow\quad C''=\begin{bmatrix} \infty & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \infty & 0 & 2 & \infty \\ 3 & 5 & \infty & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & \infty & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 3 & \infty \end{bmatrix}.$$

Нижняя граница множества Ω равна $\varphi(\Omega)=\gamma=\sum_{i=1}^{n}u_i+\sum_{j=1}^{n}v_j$.

Таким образом,

$$\gamma=\sum_{i=1}^{5}u_i+\sum_{j=1}^{5}v_j=34+2=36,\quad \varphi(\Omega)=\gamma=36.$$

Определим степени нулевых элементов:

$$\begin{bmatrix} \infty & 3 & 1 & 0^0 & 0^0 \\ 0^0 & \infty & 0^0 & 2 & \infty \\ 3 & 5 & \infty & 0^0 & 0^0 \\ 0^0 & 4 & 1 & \infty & 0^0 \\ 2 & 0^3 & 0^0 & 3 & \infty \end{bmatrix}.$$

Определяем перспективную дугу и строим множества $\Omega^1_{i_0j_0}$ и $\Omega^1_{\overline{i_0j_0}}$. Найдём элемент с максимальной степенью и удалим строки и столбец, в которых он находится. В данном случае $\Omega^1_{i_0j_0}=\Omega^1_{5,2}$:

$$\Omega^1_{5,2} = \begin{bmatrix} \infty & 3 & 1 & 0^0 & 0^0 \\ 0^0 & \infty & 0^0 & 2 & \infty \\ 3 & 5 & \infty & 0^0 & 0^0 \\ 0^0 & 4 & 1 & \infty & 0^0 \\ 2 & \boxed{0^3} & 0^0 & 3 & \infty \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \infty & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \infty \\ 3 & \infty & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \infty & 0 \end{bmatrix}.$$

Запишем данную матрицу в более удобном виде.

$\Omega^1_{5,2}$	1	3	4	5
1	∞	1	0	0
2	0	0	2	∞
3	3	∞	0	0
4	0	1	∞	0

Найдём нижнюю границу множества $\Omega^1_{5,2}$, для этого приводим матрицу сначала по строкам, затем по столбцам.

$\Omega^1_{5,2}$	1	3	4	5	u_i
1	∞	1	0	0	0
2	0	0	2	∞	0
3	3	∞	0	0	0
4	0	1	∞	0	0

$\Rightarrow$

C'	1	3	4	5
1	∞	1	0	0
2	0	0	2	∞
3	3	∞	0	0
4	0	1	∞	0

C'	1	3	4	5
1	∞	1	0	0
2	0	0	2	∞
3	3	∞	0	0
4	0	1	∞	0
v_j	0	0	0	0

$\Rightarrow$

C''	1	3	4	5
1	∞	1	0	0
2	0	0	2	∞
3	3	∞	0	0
4	0	1	∞	0

Таким образом,

$$\Omega^1_{5,2} = C' = C'', \quad \gamma^1_{5,2} = \sum_{i=1}^{5} u_i + \sum_{j=1}^{5} v_j = 0 + 0 = 0.$$

Следовательно, нижняя граница $\varphi(\Omega^1_{5,2}) = \varphi(\Omega) + \gamma^1_{5,2} = 36.$

Рассмотрим теперь множество $\Omega^1_{\overline{i_0 j_0}} = \Omega^1_{\overline{5,2}}$.

$$\Omega^1_{\overline{5,2}} = \begin{bmatrix} \infty & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \infty & 0 & 2 & \infty \\ 3 & 5 & \infty & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & \infty & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 3 & \infty \end{bmatrix}.$$

Приводим матрицу по строкам и по столбцам.

$\Omega^1_{\overline{5,2}}$	1	2	3	4	5	u_i
1	∞	3	1	0	0	0
2	0	∞	0	2	∞	0
3	3	5	∞	0	0	0
4	0	4	1	∞	0	0
5	2	∞	0	3	∞	0

$\Rightarrow$

C'	1	2	3	4	5
1	∞	3	1	0	0
2	0	∞	0	2	∞
3	3	5	∞	0	0
4	0	4	1	∞	0
5	2	∞	0	3	∞

C'	1	2	3	4	5
1	∞	3	1	0	0
2	0	∞	0	2	∞
3	3	5	∞	0	0
4	0	4	1	∞	0
5	2	∞	0	3	∞
v_j	0	3	0	0	0

$\Rightarrow$

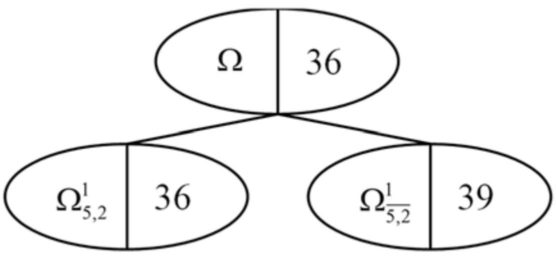
C''	1	2	3	4	5
1	∞	0	1	0	0
2	0	∞	0	2	∞
3	3	2	∞	0	0
4	0	1	1	∞	0
5	2	∞	0	3	∞

Получаем

$$\gamma^1_{\overline{5,2}} = \sum_{i=1}^{5} u_i + \sum_{j=1}^{5} v_j = 0 + 3 = 3.$$

Следовательно, нижняя граница $\varphi(\Omega^1_{\overline{5,2}}) = \varphi(\Omega) + \gamma^1_{\overline{5,2}} = 39$.

Таким образом, получаем следующее.



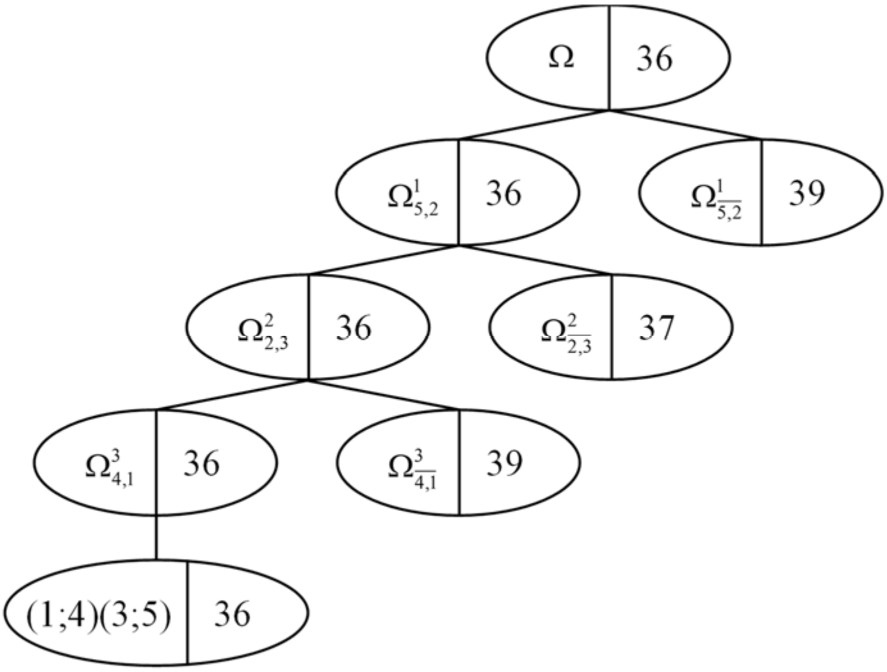
Дальнейшему делению подлежит множество с наименьшей нижней границей, а именно множество $\Omega^1_{5,2}$.

Определим степени нулевых элементов. Найдём элемент с максимальной степенью и удалим строки и столбец, в которых он находится.

$\Omega^1_{5,2}$	1	3	4	5
1	∞	1	0^0	0^0
2	0^0	$\boxed{0^1}$	2	∞
3	3	∞	0^0	0^0
4	0^0	1	∞	0^0

Получаем множества $\Omega^2_{2,3}$ и $\Omega^2_{\overline{2,3}}$. С ними поступаем так, как это делали ранее.

В результате последовательных преобразований получаем гамильтонов контур следующего вида: $1-5-2-3-4-1$.



Таким образом, допустимый план

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Функция цели $f = 36$.

Для решения целочисленной задачи методом Гомори вначале её необходимо преобразовать в задачу линейного программирования, которую решают без учета целочисленности. Далее среди дробных чисел выбирается элемент с наибольшей дробной частью и составляется дополнительное ограничение. Неравенство преобразуется в уравнение путем введения дополнительной неотрицательной переменной. Полученная задача решается симплексным методом.

3 Варианты заданий.

$$1\begin{bmatrix} \infty & 16 & 9 & 12 & 11 \\ 8 & \infty & 7 & 8 & 9 \\ 10 & 9 & \infty & 12 & 7 \\ 12 & 9 & 10 & \infty & 14 \\ 11 & 8 & 9 & 15 & \infty \end{bmatrix}.$$

$$2\begin{bmatrix} \infty & 8 & 12 & 7 & 11 \\ 14 & \infty & 11 & 10 & 9 \\ 10 & 9 & \infty & 12 & 7 \\ 12 & 11 & 9 & \infty & 8 \\ 10 & 8 & 9 & 13 & \infty \end{bmatrix}.$$

$$3\begin{bmatrix} \infty & 5 & 9 & \infty & 10 \\ 8 & \infty & 7 & 6 & 9 \\ 5 & 6 & \infty & 9 & 7 \\ 11 & 9 & 7 & \infty & 9 \\ 12 & 8 & 9 & 6 & \infty \end{bmatrix}.$$

$$4\begin{bmatrix} \infty & 12 & 9 & 12 & 11 \\ 8 & \infty & 7 & 8 & 9 \\ 12 & 9 & \infty & 14 & 10 \\ 13 & 9 & 10 & \infty & 15 \\ 14 & 8 & 9 & 10 & \infty \end{bmatrix}.$$

$$5\begin{bmatrix} \infty & 6 & 9 & 7 & 5 \\ 8 & \infty & 7 & 8 & 9 \\ 11 & 9 & \infty & 10 & 9 \\ 10 & 9 & 8 & \infty & 15 \\ 12 & \infty & 9 & 12 & \infty \end{bmatrix}.$$

$$6\begin{bmatrix} \infty & 12 & 8 & 7 & 11 \\ 13 & \infty & 10 & 12 & 9 \\ 11 & 9 & \infty & 10 & 13 \\ 10 & 9 & 15 & \infty & 14 \\ 8 & \infty & 9 & 8 & \infty \end{bmatrix}.$$

$$7\begin{bmatrix} \infty & 12 & 9 & 7 & 11 \\ 8 & \infty & 7 & 8 & 9 \\ 11 & 9 & \infty & 10 & 13 \\ 10 & 9 & 15 & \infty & 11 \\ 12 & \infty & 10 & 9 & \infty \end{bmatrix}.$$

$$8\begin{bmatrix} \infty & 11 & 9 & 9 & 5 \\ 12 & \infty & 7 & 10 & 9 \\ 11 & 12 & \infty & 10 & 9 \\ 8 & 9 & 7 & \infty & 10 \\ 13 & \infty & 9 & 12 & \infty \end{bmatrix}.$$

$$9\begin{bmatrix} \infty & 6 & 9 & 7 & 5 \\ 8 & \infty & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 9 & \infty & 6 & 9 \\ 11 & 9 & 8 & \infty & 10 \\ 9 & \infty & 9 & 5 & \infty \end{bmatrix}.$$

$$10\begin{bmatrix} \infty & 16 & 9 & 11 & 12 \\ 10 & \infty & 11 & 14 & 9 \\ 11 & 13 & \infty & 10 & 15 \\ 10 & 9 & 17 & \infty & 11 \\ 13 & \infty & 16 & 12 & \infty \end{bmatrix}.$$

$$11\begin{bmatrix} \infty & 20 & 19 & 16 & 12 \\ 18 & \infty & 17 & 14 & 21 \\ 11 & 19 & \infty & 10 & 15 \\ 14 & 19 & 16 & \infty & 15 \\ 20 & \infty & 21 & 19 & \infty \end{bmatrix}.$$

$$12\begin{bmatrix} \infty & 10 & 9 & 7 & 8 \\ 7 & \infty & 11 & 8 & 9 \\ 9 & 7 & \infty & 10 & 9 \\ 11 & 9 & 8 & \infty & 12 \\ 6 & \infty & 9 & 8 & \infty \end{bmatrix}.$$

$$13\begin{bmatrix}\infty & 9 & 12 & 10 & 11\\ 14 & \infty & 13 & 8 & 9\\ 10 & 15 & \infty & 11 & 8\\ 12 & 10 & 11 & \infty & 15\\ 10 & 8 & 9 & 12 & \infty\end{bmatrix}. \qquad 17\begin{bmatrix}\infty & 10 & 19 & 11 & 18\\ 13 & \infty & 16 & 15 & 9\\ 11 & 14 & \infty & 10 & 17\\ 10 & 9 & 17 & \infty & 12\\ \infty & 16 & 9 & 11 & \infty\end{bmatrix}.$$

$$14\begin{bmatrix}\infty & 9 & 11 & 10 & 8\\ 6 & \infty & 7 & 8 & 9\\ 10 & 15 & \infty & 16 & 13\\ 12 & 9 & 10 & \infty & 15\\ 9 & 10 & 8 & 14 & \infty\end{bmatrix}. \qquad 18\begin{bmatrix}\infty & 9 & 8 & 11 & 9\\ 11 & \infty & 8 & 10 & 9\\ 7 & 8 & \infty & 9 & 10\\ 12 & 9 & 13 & \infty & 12\\ \infty & 10 & 9 & 11 & \infty\end{bmatrix}.$$

$$15\begin{bmatrix}\infty & 24 & 25 & 19 & 15\\ 18 & \infty & 17 & 20 & 17\\ 18 & 19 & \infty & 21 & 25\\ 26 & 18 & 21 & \infty & 20\\ 15 & \infty & 18 & 21 & \infty\end{bmatrix}. \qquad 19\begin{bmatrix}\infty & 7 & 9 & 8 & 11\\ 13 & \infty & 7 & 10 & 9\\ 11 & 12 & \infty & 10 & 9\\ 10 & 9 & 9 & \infty & 12\\ \infty & 8 & 9 & 11 & \infty\end{bmatrix}.$$

$$16\begin{bmatrix}\infty & 10 & 14 & 9 & 8\\ 11 & \infty & 7 & 10 & 9\\ 6 & 9 & \infty & 12 & 7\\ 12 & 11 & 9 & \infty & 13\\ 10 & \infty & 9 & 13 & \infty\end{bmatrix}. \qquad 20\begin{bmatrix}\infty & 12 & 11 & 10 & 8\\ 9 & \infty & 10 & 8 & 9\\ 11 & 6 & \infty & 10 & 7\\ 10 & 9 & 7 & \infty & 12\\ \infty & 6 & 9 & 11 & \infty\end{bmatrix}.$$

Контрольные вопросы

1 В чём заключается суть метода ветвей и границ?
2 В чём заключается суть метода Гомори?

5 Лабораторная работа № 14. Оптимизационные задачи на графах

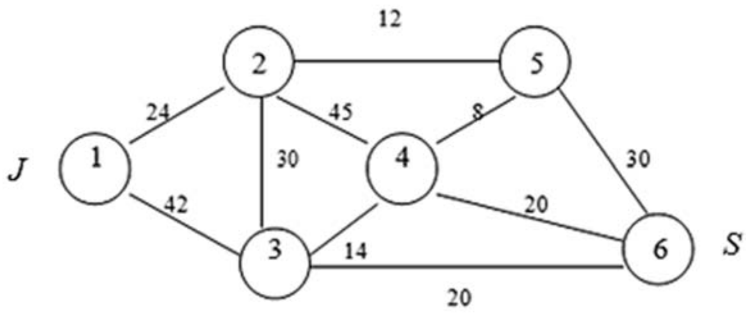
Цель работы: изучение метода формирования потока максимальной мощности на транспортной сети.

1 Постановка задачи.

На заданной транспортной сети сформировать поток максимальной мощности, направленный от истока J в сток S, при условии, что пропускные способности ребер в обоих направлениях одинаковы. Выписать ребра, образующие на сети разрез минимальной пропускной способности.

2 Теоретические сведения.

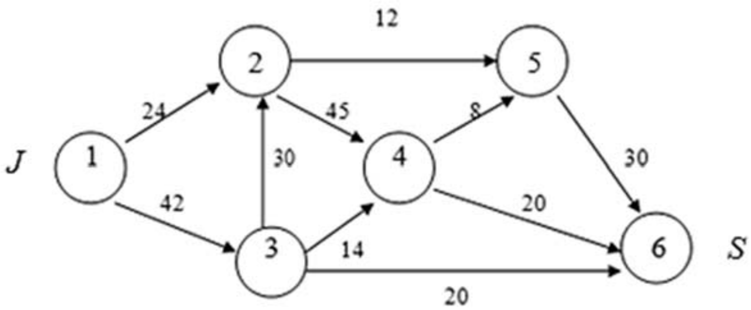
Пусть дана следующая транспортная сеть.



Составим матрицу пропускной способности $R = \left(r_{ij}\right)_{n \times n}$ сети.

R	1	2	3	4	5	6
1		24	42			
2	24					
3	42	30				20
4		45	14		8	20
5				8		30
6			20	20	30	

Сформируем на сети с матрицей R первоначальный поток $X = \left(x_{ij}\right)_{n \times n}$, удовлетворяющий всем правилам построения потока.



Запишем полные пути от истока J к стоку S и укажем, сколько вещества перемещается по данному пути. Учитываем, что поток по каждому ребру (i, j) не может превышать его пропускной способности.

Рассмотрим путь L_1: $1 - 2 - 5 - 6$. Наименьшее число единиц некоторого вещества на данном пути равно

$$\min\{24;12;30\} = 12.$$

Следовательно, по данному пути можно пропустить 12 единиц вещества.

Ребро $(2;5)$ становится насыщенным.

Рассмотрим путь L_2: $1-2-4-5-6$. Наименьшее число единиц некоторого вещества на данном пути равно

$$\min\{24-12;45;8;30-12\}=\min\{12;45;8;18\}=8.$$

Следовательно, по данному пути можно пропустить 8 единиц вещества. Ребро $(4;5)$ становится насыщенным.

Рассмотрим путь L_3: $1-2-4-6$. Наименьшее число единиц некоторого вещества на данном пути равно

$$\min\{24-12-8;45-8;20\}=\min\{4;37;20\}=4.$$

Следовательно, по данному пути можно пропустить 4 единиц вещества. Ребро $(1;2)$ становится насыщенным.

Рассмотрим путь L_4: $1-3-2-4-6$. Наименьшее число единиц некоторого вещества на данном пути равно

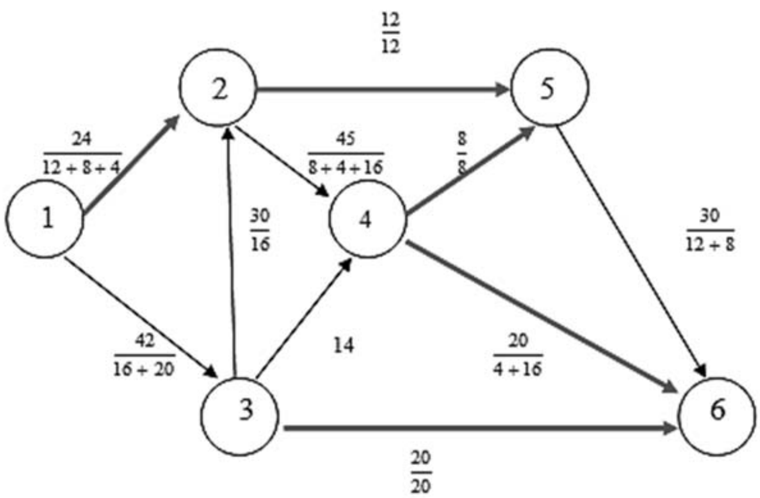
$$\min\{42;30;45-8-4;20-4\}=\min\{42;30;33;16\}=16.$$

Следовательно, по данному пути можно пропустить 16 единиц вещества. Ребро $(4;6)$ становится насыщенным.

Рассмотрим путь L_5: $1-3-6$. Наименьшее число единиц некоторого вещества на данном пути равно

$$\min\{42-16;20\}=\min\{26;20\}=20.$$

Следовательно, по данному пути можно пропустить 20 единиц вещества. Ребро $(3;6)$ становится насыщенным.



Строим множество A – множество вершин, достижимых из истока J по ненасыщенным ребрам.

Из истока по ненасыщенным ребрам можно попасть в вершину 3, т. к. $r_{13} - x_{13} = 6$. Далее из вершины 3 по ненасыщенным ребрам можно попасть в вершины 2 и 4, из вершины 2 также можно попасть в вершину 4. Следовательно, множество A состоит из четырёх вершин:

$$A = \{1; 2; 3; 4\}.$$

Множество B составят остальные вершины:

$$B = \{5; 6\}.$$

Получаем разрез на сети

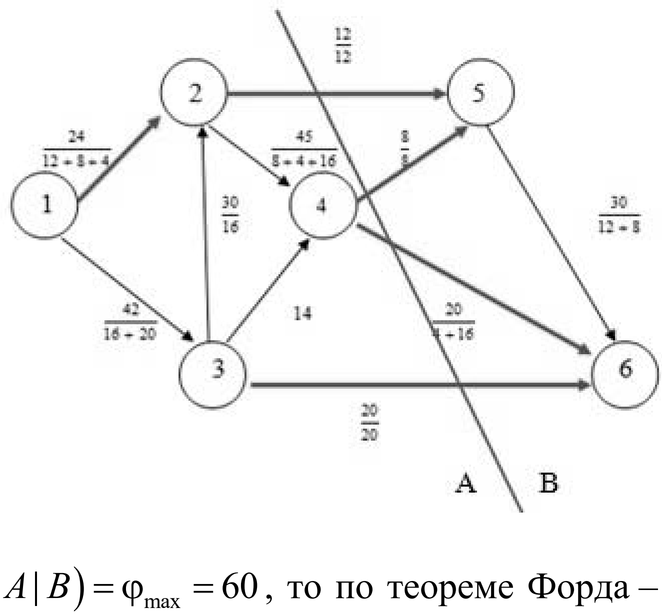
$$A \mid B = \{(2;5), (4;5), (4;6), (3;6)\}.$$

Минимальная пропускная способность разреза

$$R_{\min}(A \mid B) = \sum_{(i,j)\in A|B} r_{ij} = 12 + 8 + 20 + 20 = 60.$$

Максимальная величина потока, направленного от истока J в сток S,

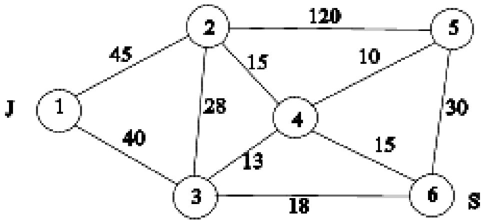
$$\varphi_{\max} = 12 + 8 + 4 + 16 + 20 = 60.$$



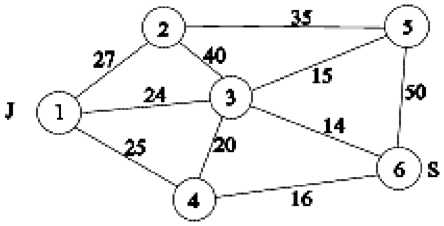
Так как $R_{\min}(A \mid B) = \varphi_{\max} = 60$, то по теореме Форда – Фалкерсона построенный поток является потоком максимальной мощности.

3 Варианты заданий.

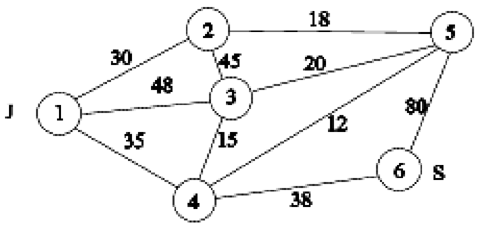
1



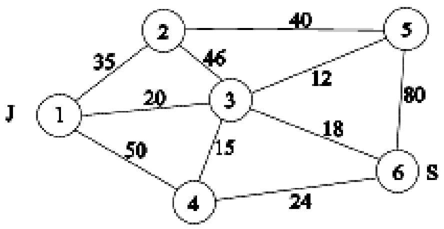
2



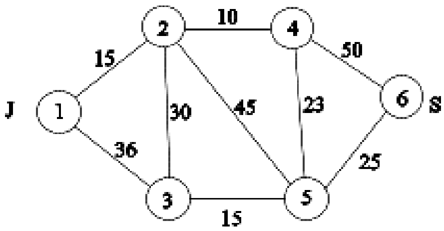
3



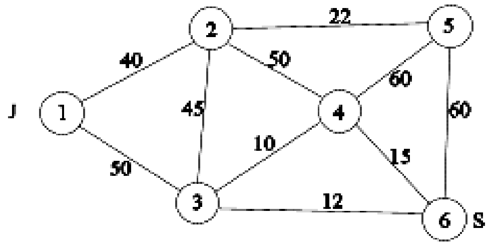
4



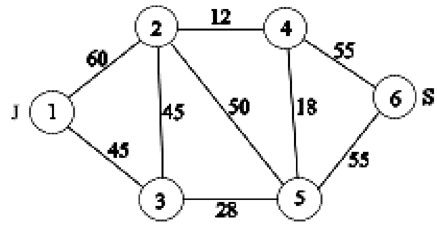
5



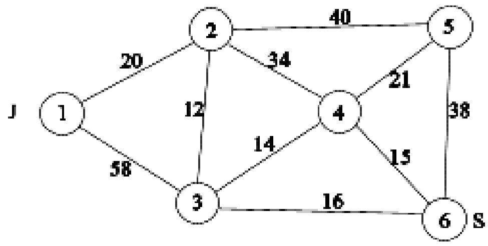
6



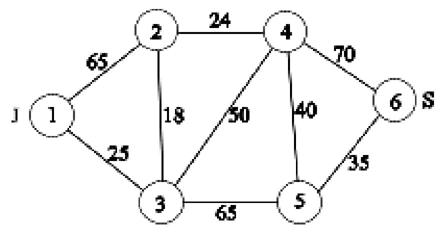
7



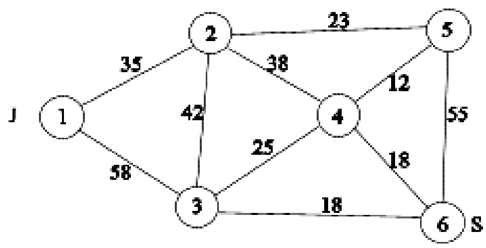
8



9

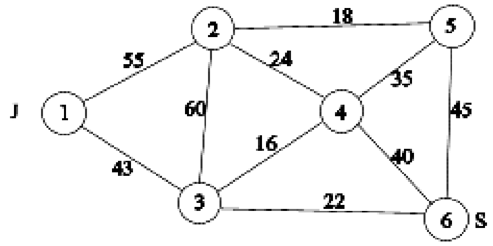


10

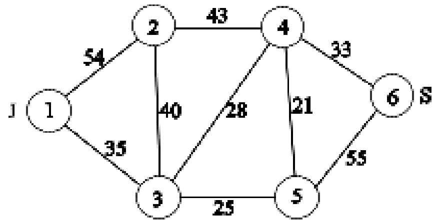


*

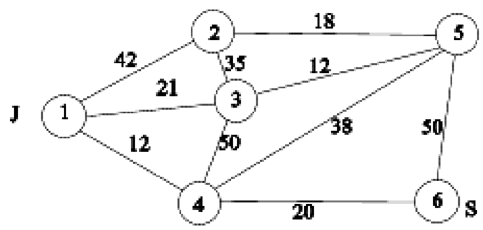
11



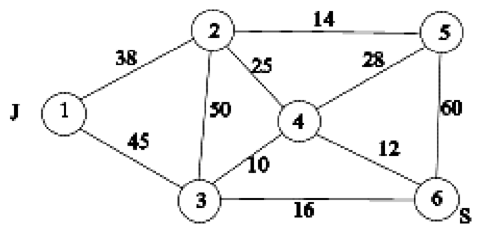
12



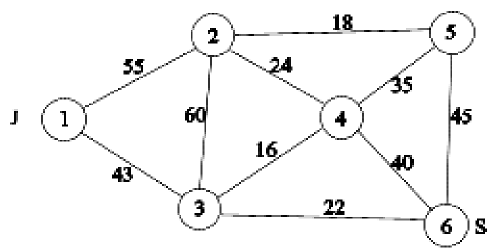
13



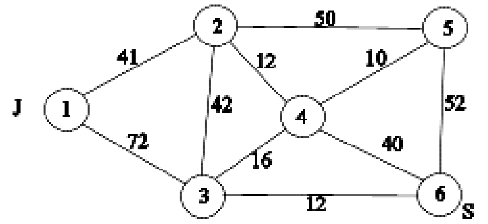
14



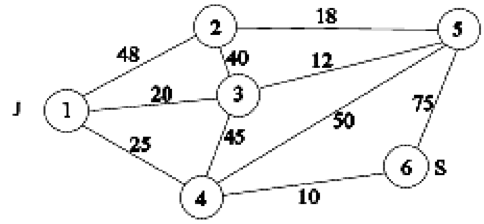
15



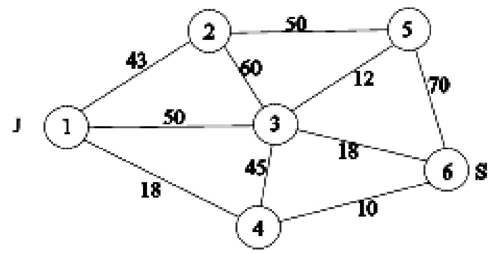
16



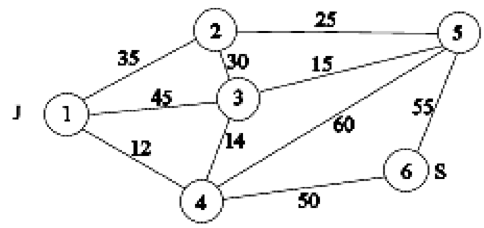
17



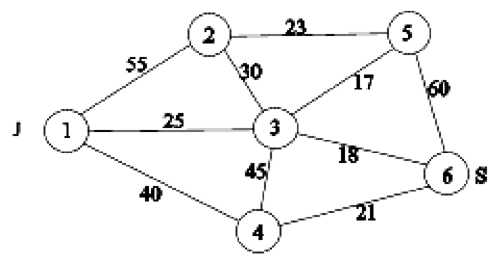
18



19



20



Контрольные вопросы

1 Что такое транспортная сеть?

2 Как на транспортной сети сформировать поток максимальной мощности?

6 Лабораторная работа № 15. Алгоритм Саати. Метод ранга. Метод предпочтений

Цель работы: изучение метода ранга, метода предпочтений экспертного анализа.

1 Постановка задачи.

На конкурс представлено n проектов. Для оценки проектов оргкомитет конкурса создал экспертную комиссию из m экспертов. Каждый эксперт присвоил каждому проекту оценку в соответствии с его приоритетом, причем оценка 1 присваивался самому лучшему, оценка 2 – второму по привлекательности и т. д. Оценки всех проектов приведены в обобщенной таблице. Представить итоговое предложение по наилучшему проекту. Решить задачу методом рангов и методом предпочтений.

2 Теоретические сведения.

Алгоритм метода ранга:
– составляется матрица оценок экспертов;
– составляется матрица нормированных оценок;
– вычисляются искомые веса целей;
– делается вывод.

Алгоритм метода предпочтений:
– составляется исходная матрица предпочтений;
– составляется модифицированная матрица предпочтений;
– находятся суммарные оценки предпочтений по каждой цели;
– вычисляются исходные веса целей;
– делается вывод.

3 Варианты заданий.

С помощью генератора случайных чисел задать таблицу оценок $n = 20$ проектов комиссией из $m = 10$ экспертов.

Контрольные вопросы

1 В чём заключается суть метода ранга?
2 В чём заключается суть метода предпочтений?

7 Лабораторная работа № 16. Матричные игры

Цель работы: изучение метода решения матричной игры в смешанных стратегиях.

1 Постановка задачи.

Две конкурирующие компании участвуют в реконструкции четырёх объектов. Прибыль компаний зависит от объёма капитальных вложений в объекты и условий инвестирования. Считается, что прибыль первой компании равна величине убытка второй и представлена платёжной матрицей.

Требуется определить оптимальные стратегии компаний, для чего:

1) произвести возможные упрощения платёжной матрицы;

2) найти решение матричной игры сведением к паре задач линейного программирования.

2 Теоретические сведения.

Пусть дана платёжная матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & 0 & -2 \\ -2 & -3 & -4 & 4 \\ -5 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

1 В данной задаче две конкурирующие компании представляют игроков A и B. Платежная матрица имеет следующий вид.

$A \setminus B$	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	1	0	–1	5
A_2	–2	1	0	–2
A_3	–2	–3	–4	4
A_4	–5	1	0	–3

Определим верхнюю α и нижнюю β цены игры:

$$\alpha = \max_i\{\alpha_i\} = \max_i \min_j\{a_{ij}\}, \quad \beta = \min_j\{\beta_i\} = \min_j \max_i\{\alpha_{ij}\}.$$

$A \setminus B$	B_1	B_2	B_3	B_4	α_i
A_1	1	0	–1	5	$\boxed{-1}$
A_2	–2	1	0	–2	–2
A_3	–2	–3	–4	4	–4
A_4	–5	1	0	–3	–5
β_j	1	1	$\boxed{0}$	5	$\alpha = -1; \beta = 0$

Так как $\alpha \neq \beta$, то данная игра не имеет седловой точки. Следовательно, игра не разрешима в чистых стратегиях. Для игр без седловых точек оптимальные стратегии игроков находятся в области смешанных стратегий.

Смешанной стратегией игрока A является вектор $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3, p_4)$, компоненты которого удовлетворяют условиям $p_i \geq 0$ $(i = \overline{1,4})$, $\sum_{i=1}^{4} p_i = 1$.

Смешанной стратегией игрока B является вектор $\vec{q} = (q_1, q_2, q_3, q_4)$, компоненты которого удовлетворяют условиям $q_j \geq 0$ $(j = \overline{1,4})$, $\sum_{j=1}^{4} q_j = 1$.

Замечание. *Компоненты* p_i *и* q_j *– вероятности, с которыми игроки* A *и* B *выбирают свои чистые стратегии* A_i *и* B_j.

Произведем возможные упрощения платежной матрицы.

$p \backslash q$	q_1	q_2	q_3	q_4
p_1	1	0	–1	5
p_2	–2	1	0	–2
p_3	–2	–3	–4	4
p_4	–5	1	0	–3

Так как элементы четвёртого столбца больше (или равны) соответствующих элементов первого столбца (стратегия B_1 доминирует над стратегией B_4), удаляем из платежной матрицы четвёртый столбец.

$p \backslash q$	q_1	q_2	q_3
p_1	1	0	–1
p_2	–2	1	0
p_3	–2	–3	–4
p_4	–5	1	0

Элементы второго столбца больше соответствующих элементов третьего столбца, т. е. стратегия B_3 доминирует над стратегией B_2, удаляем из платежной матрицы второй столбец.

$p \backslash q$	q_1	q_3
p_1	1	–1
p_2	–2	0
p_3	–2	–4
p_4	–5	0

Элементы третьей строки меньше соответствующих элементов первой строки (стратегия A_1 доминирует над стратегией A_3), удаляем из платежной матрицы третью строку.

$p \setminus q$	q_1	q_3
p_1	1	–1
p_2	–2	0
p_4	–5	0

Элементы четвёртой строки меньше соответствующих элементов второй строки (стратегия A_2 доминирует над стратегией A_4), удаляем четвёртую строку.

$p \setminus q$	q_1	q_3
p_1	1	–1
p_2	–2	0

Таким образом, в результате упрощения получили платежную матрицу размерности 2×2. Избавимся от отрицательности, прибавив ко всем элементам матрицы $|-2|$.

$p \setminus q$	q_1	q_3
p_1	3	1
p_2	0	2

При этом введём новую цену игры $v' = v + 2$, где $\alpha < v < \beta$, т. е. $0 < v < 1$.

2 Решим матричную игру сведением к паре задач линейного программирования. По критерию оптимальности можно записать следующее:

$$\begin{cases} 3 \cdot p_1 + 0 \cdot p_2 \geq v', \\ 1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 \geq v', \\ p_1 + p_2 = 1; \end{cases} \tag{7.1}$$

$$\begin{cases} 3 \cdot q_1 + 1 \cdot q_3 \leq v', \\ 0 \cdot q_1 + 2 \cdot q_3 \leq v', \\ q_1 + q_3 = 1. \end{cases} \tag{7.2}$$

Разделим каждое неравенство и равенство систем (7.1) и (7.2) на $v' > 0$. Введем обозначения:

$$\frac{p_1}{v'} = x_1, \quad \frac{p_2}{v'} = x_2, \quad \frac{q_1}{v'} = y_1, \quad \frac{q_3}{v'} = y_2.$$

Цель первого игрока – максимизировать свой выигрыш (прибыль), следовательно, функция цели $F = \dfrac{1}{v'} \to \min$.

Цель второго игрока – минимизировать свой проигрыш (убытки), поэтому функция цели $Z = \dfrac{1}{v'} \to \max$.

Таким образом, получаем пару двойственных задач линейного программирования в симметричном виде:

$$F = x_1 + x_2 \to \min, \qquad Z = y_1 + y_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} 3 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 \geq 1, \\ 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \geq 1, \\ x_1 \geq 0, \;\; x_2 \geq 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} 3 \cdot y_1 + 1 \cdot y_2 \leq 1, \\ 0 \cdot y_1 + 2 \cdot y_2 \leq 1, \\ y_1 \geq 0, \;\; y_2 \geq 0. \end{cases}$$

Решим задачу на max симплексным методом. Введем дополнительные переменные y_3, y_4:

$$Z = y_1 + y_2 + 0 \cdot y_3 + 0 \cdot y_4 \to \max,$$

$$\begin{cases} 3y_1 + y_2 + y_3 = 1, \\ 2y_2 + y_4 = 1, \\ y_j \geq 0, \quad j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

Внесем данные в первую симплексную таблицу (таблица 7.1).

Таблица 7.1

Базисные переменные	l	Свободные переменные	
		$-y_1$	$-y_2$
$y_3 =$	1	3	1
$y_4 =$	1	0	2
$Z =$	0	–1	–1

Проводя последовательно симплексные преобразования, получим таблицу 7.2.

Таблица 7.2

Базисные переменные	l	Свободные переменные	
		$-y_3$	$-y_4$
$y_1 =$	1/6	1/3	–1/6
$y_2 =$	1/2	0	1/2
$Z =$	2/3	1/3	1/3

Оптимальный план задачи на $\max$ имеет вид:

$$Y^* = \left(\frac{1}{6}; \frac{1}{2}; 0; 0\right), \quad Z\left(Y^*\right) = \frac{2}{3}.$$

Введя дополнительные переменные x_3, x_4 в ограничения задачи на $\min$, получим

$$F = x_1 + x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 \to \min,$$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_4 = 1, \\ x_i \geq 0, \quad x_i = \overline{1,4}. \end{cases}$$

Учитывая соответствие между переменными канонических форм двойственных ЗЛП, найдем значения компонент оптимального вектора задачи на $\min$:

$$\begin{array}{cc|cc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ y_3 & y_4 & y_1 & y_2 \\ \hline \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{array}.$$

Таким образом, имеем

$$\begin{cases} x_1^* = \dfrac{1}{3}, \\ x_2^* = \dfrac{1}{3}; \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1^* = \dfrac{1}{6}, \\ y_2^* = \dfrac{1}{2}; \end{cases} \qquad F = Z = \frac{2}{3}.$$

Следовательно,

$$v' = \frac{1}{F} = \frac{1}{Z} = \frac{3}{2};$$

$$p_1^* = x_1^* \cdot v' = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{2}; \qquad p_2^* = x_2^* \cdot v' = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{2};$$

$$q_1^* = y_1^* \cdot v' = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{4}; \qquad q_3^* = y_2^* \cdot v' = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4}.$$

Цена игры при этом

$$v = v' - 2 = \frac{3}{2} - 2 = -\frac{1}{2}.$$

Вывод: оптимальные смешанные стратегии игроков A и B (т. е. первой и второй компаний) соответственно имеют вид

$$\vec{p}^{\,*} = \left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0;0\right), \qquad \vec{q}^{\,*} = \left(\frac{1}{4};0;\frac{3}{4};0\right).$$

Понимать это решение следует так: чтобы первая компания максимизировала свою прибыль, ей следует применять первую и вторую стратегии в одинаковом количестве, третью и четвертую стратегии применять не рекомендуется. Для того чтобы вторая компания минимизировала свои убытки, ей следует применять первую и третью стратегии, вторую и четвертую использовать нецелесообразно, причем на одно применение первой стратегии третью следует использовать трижды.

3 Варианты заданий.

1 $\begin{pmatrix} 3 & -5 & -4 & 6 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

5 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ -5 & 1 & -3 & -2 \\ 1 & -3 & -5 & -2 \end{pmatrix}$.

2 $\begin{pmatrix} 5 & 3 & -5 & -4 \\ 9 & 0 & 2 & -1 \\ 8 & 4 & 1 & 2 \\ 7 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

6 $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 & -3 \\ -4 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

3 $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 4 \\ -2 & 4 & -2 & 5 \\ 3 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

7 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 2 & 6 \\ 5 & -1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

4 $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & -3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$.

8 $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.

9 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & -1 & 3 \\ -5 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}$.

10 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ -5 & -4 & 2 & -4 \\ -3 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

11 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ -3 & -5 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

12 $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & -5 & -2 \end{pmatrix}$.

13 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -2 & -2 \\ -5 & -4 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$.

14 $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 & -3 \\ -4 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

15 $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -3 & 3 \\ -2 & 1 & -3 & -5 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

16 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & 6 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ -5 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

17 $\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 5 \\ -1 & 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

18 $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 & -2 \\ -3 & -1 & 0 & -4 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

19 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 4 & 4 \\ -3 & -2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

20 $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Контрольные вопросы

1 Какая игра называется матричной?

2 В чём заключается суть метода решения матричной игры в смешанных стратегиях?

8 Лабораторная работа № 17. Статические игры

Цель работы: изучение критериев оптимальности чистых стратегий.

1 Постановка задачи.

Руководство супермаркета заказывает товар некоторого вида. Известно, что спрос на данный вид товара лежит в пределах от $K+11$ до $K+14$ единиц. Если заказанного товара окажется недостаточно для удовлетворения покупательского спроса, то руководство супермаркета может срочно заказать и завезти недостающее количество. Причем расходы по срочному заказу и завозу единицы товара составляют $0{,}5\cdot(K+5)$ денежных единиц. Если же спрос будет меньше наличного количества товара, то нереализованный товар хранится на складе в супермаркете, причем расходы за хранение единицы товара составляют 8 денежных единиц.

Требуется придать описанной ситуации игровую схему и составить платежную матрицу игры; найти оптимальные чистые стратегии, пользуясь:

1) критерием Вальда;

2) критерием Байеса (считать вероятности соответственно равными 0,1; 0,3; 0,4; 0,2);

3) критерием Лапласа;

4) критерием Гурвица (взяв значение параметра равным 0,7);

5) критерием Сэвиджа.

2 Теоретические сведения.

Рассмотрим поставленную задачу в случае $K=0$.

В данной задаче в качестве игрока A (статистик) выступает руководство супермаркета, которое заинтересовано в получении оптимального выигрыша. В качестве игрока B (объективная реальность) выступает покупательский спрос на товар. Таким образом, имеем статическую игру.

Игрок B может иметь четыре состояния, т. е. спрос на товар может быть равен 11, 12, 13 и 14 единицам. Игрок A при выборе стратегии также может ориентироваться на четыре состояния покупательского спроса.

Таким образом, получим платежную матрицу $(a_{ij})_{4\times 4}$, где a_{ij} – выигрыш, который может получить игрок A, если он воспользуется i-й стратегией, а спрос на товар окажется в j-м состоянии.

Определим элементы платёжной матрицы.

Вычислим элемент a_{11}. В данном случае руководство супермаркета заказывает 11 единиц товара и покупательский спрос оказывается равный 11 единицам, т. е. руководству супермаркета не приходится срочно завозить товар или хранить нереализованный товар на складе. Таким образом, выигрыш игрока A в ситуации (A_1, B_1) равен нулю, т. е. $a_{11}=0$.

Аналогичная ситуация возникает и в случае (A_i, B_j), когда $i=j$ $(i,j=\overline{1,4})$, т. е. в платёжной матрице по главной диагонали будут стоять нули.

Вычислим элемент a_{12}. В данном случае руководство супермаркета заказывает 11 единиц товара, однако спрос на товар оказывается равным 12 единицам, поэтому руководству необходимо срочно завозить еще одну единицу товара, на что расходуется $1 \cdot 2,5 = 2,5$ денежных единиц, т. е. $a_{12} = -2,5$.

Вычислим элемент a_{21}. Руководство супермаркета заказывает 12 единиц товара, однако покупательский спрос оказывается равный 11 единицам. Поэтому одну нереализованную единицу товара необходимо хранить на складе, на что расходуется $1 \cdot 8 = 8$ денежных единиц, т. е. $a_{21} = -8$.

Аналогично вычисляем остальные элементы:

$$a_{13} = -2 \cdot 2,5 = -5; \qquad a_{14} = -3 \cdot 2,5 = -7,5;$$

$$a_{23} = -1 \cdot 2,5 = -2,5; \qquad a_{24} = -2 \cdot 2,5 = -5;$$

$$a_{31} = -2 \cdot 8 = -16; \qquad a_{32} = -1 \cdot 8 = -8; \qquad a_{34} = -1 \cdot 2,5 = -2,5;$$

$$a_{41} = -3 \cdot 8 = -24; \qquad a_{42} = -2 \cdot 8 = -16; \qquad a_{43} = -1 \cdot 8 = -8.$$

Таким образом, платежная матрица имеет следующий вид.

$A \setminus B$	$B_1(11)$	$B_2(12)$	$B_3(13)$	$B_4(14)$
$A_1(11)$	0	–2,5	–5	–7,5
$A_2(12)$	–8	0	–2,5	–5
$A_3(13)$	–16	–8	0	–2,5
$A_4(14)$	–24	–16	–8	0

Определим оптимальные чистые стратегии, пользуясь указанными различными критериями.

1 По критерию Вальда в качестве оптимальной чистой стратегии выбирается стратегия, которая гарантирует выигрыш в наихудших условиях, т. е. соответствующая значению $\alpha = \max_i \min_j (a_{ij})$.

$A \setminus B$	$B_1(11)$	$B_2(12)$	$B_3(13)$	$B_4(14)$	α_i
$A_1(11)$	0	–2,5	–5	–7,5	–7,5
$A_2(12)$	–8	0	–2,5	–5	–8
$A_3(13)$	–16	–8	0	–2,5	–16
$A_4(14)$	–24	–16	–8	0	–24

Значит, $\alpha = -7,5$. По критерию Вальда в качестве оптимальной чистой стратегии следует взять стратегию A_1 и руководству супермаркета следует заказывать и завозить 11 единиц товара.

2 Согласно критерию Байеса оптимальной считается стратегия, соответствующая максимальному среднему выигрышу, т. е. соответствующая значению $\overline{a} = \max_i \overline{a}_i = \max \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j$. Вычислим следующее:

$$\overline{a}_1 = 0 \cdot 0{,}1 - 2{,}5 \cdot 0{,}3 - 5 \cdot 0{,}4 - 7{,}5 \cdot 0{,}2 = -4{,}25;$$

$$\overline{a}_2 = -8 \cdot 0{,}1 + 0 \cdot 0{,}3 - 2{,}5 \cdot 0{,}4 - 5 \cdot 0{,}2 = -2{,}8;$$

$$\overline{a}_3 = -16 \cdot 0{,}1 - 8 \cdot 0{,}3 + 0 \cdot 0{,}4 - 2{,}5 \cdot 0{,}2 = -4{,}5;$$

$$\overline{a}_4 = -24 \cdot 0{,}1 - 16 \cdot 0{,}3 - 8 \cdot 0{,}4 + 0 \cdot 0{,}2 = -10{,}4.$$

$A \setminus B$	$B_1(11)$	$B_2(12)$	$B_3(13)$	$B_4(14)$	$\overline{a}_i$
$A_1(11)$	0	–2,5	–5	–7,5	–4,25
$A_2(12)$	–8	0	–2,5	–5	–2,8
$A_3(13)$	–16	–8	0	–2,5	–4,5
$A_4(14)$	–24	–16	–8	0	–10,4
q_j	0,1	0,3	0,4	0,2	

Значит, $\overline{a} = -2{,}8$. Следовательно, по критерию Байеса в качестве оптимальной чистой стратегии следует взять стратегию A_2, т. е. руководству супермаркета следует заказывать и завозить 12 единиц товара.

3 Согласно критерию Лапласа оптимальной считается чистая стратегия, обеспечивающая максимум выигрыша при равновероятных состояниях покупательского спроса на товар (при $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = 0{,}25$), т. е. обеспечивающая $\max_i \overline{a}_i = \frac{1}{n} \cdot \max \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$, $i = \overline{1,m}$. Вычислим следующее:

$$a_1 = 0{,}25 \cdot \left(0 - 2{,}5 - 5 - 7{,}5\right) = -3{,}75; \qquad a_2 = 0{,}25 \cdot \left(-8 + 0 - 2{,}5 - 5\right) = -3{,}875;$$

$$a_3 = 0{,}25 \cdot \left(-16 - 8 + 0 - 2{,}5\right) = -6{,}625; \qquad a_4 = 0{,}25 \cdot \left(-24 - 16 - 8 + 0\right) = -12.$$

Таким образом, $a = -3{,}75$. Следовательно, по критерию Лапласа в качестве оптимальной чистой стратегии следует взять стратегию A_1, т. е. руководству супермаркета следует заказывать и завозить 11 единиц товара.

4 По критерию Гурвица в качестве оптимальной выбирается чистая стратегия, соответствующая числу $\gamma = \max_i (\lambda \min_j a_{ij} + \left(1 - \lambda\right) \max_j a_{ij})$, $0 \le \lambda \le 1$. В данном случае $\max_j a_{ij} = 0 \;\; (j = \overline{1,4})$, следовательно, $\gamma = \max_i (\lambda \min_j a_{ij})$, $\lambda = 0{,}7$.

$A \setminus B$	$B_1(11)$	$B_2(12)$	$B_3(13)$	$B_4(14)$	$0,7\min\limits_i a_{ij}$
$A_1(11)$	0	–2,5	–5	–7,5	–5,25
$A_2(12)$	–8	0	–2,5	–5	–5,6
$A_3(13)$	–16	–8	0	–2,5	–11,2
$A_4(14)$	–24	–16	–8	0	–16,8

Так как $\gamma = -5,25$, то по критерию Гурвица в качестве оптимальной выбираем стратегию A_1. Поэтому руководству супермаркета следует заказывать и завозить 11 единиц товара.

5 Оптимальной по критерию Сэвиджа считается та чистая стратегия, при которой минимизируется величина r_i максимального риска, т. е. обеспечивается $\min\limits_i \max\limits_j r_{ij}$. Построим матрицу риска, элементы которой вычисляются по формуле $r_{ij} = \max\limits_i \left(a_{ij}\right) - a_{ij}$.

$A \setminus B$	$B_1(11)$	$B_2(12)$	$B_3(13)$	$B_4(14)$	$\max\limits_i r_{ij}$
$A_1(11)$	0	2,5	5	7,5	7,5
$A_2(12)$	8	0	2,5	5	8
$A_3(13)$	16	8	0	2,5	16
$A_4(14)$	24	16	8	0	24

Таким образом, $\min\limits_i \max\limits_j r_{ij} = 7,5$. Следовательно, по критерию Сэвиджа в качестве оптимальной выбираем стратегию A_1, т. е. руководству супермаркета следует заказывать и завозить 11 единиц товара.

3 Варианты заданий.

Решить задачу в случае, когда значение K равно порядковому номеру студента в общем списке учебной группы.

Контрольные вопросы

1 Какая игра называется статической?

2 Какие критерии оптимальности чистых стратегий вы можете назвать?

9 Лабораторная работа № 18. Задачи теории расписаний

Цель работы: изучение метода решения задачи теории расписаний с двумя последовательными обслуживающими устройствами.

1 Постановка задачи.

Имеется n деталей и два станка. Каждая деталь должна сначала пройти обработку на первом станке, а затем – на втором. При этом i-я деталь обрабатывается на первом станке за a_i времени, а на втором – за b_i времени. Каждый станок в каждый момент времени может работать только с одной деталью. Требуется составить такой порядок подачи деталей на станки, чтобы итоговое время обработки всех деталей было бы минимальным.

2 Теоретические сведения.

Пусть информация о времени обработки задана таблицей 9.1.

Таблица 9.1

i	1	2	3	4	5
a_i	3	4	1	5	2
b_i	2	4	8	3	6

Шаг 1. Минимальное из значений соответствует a_3 – третья деталь обрабатывается первой.

Шаг 2. Минимальное из значений соответствует a_5 – пятая деталь обрабатывается второй.

Шаг 3. Минимальное из значений равно 2 и соответствует b_1 – первая деталь обрабатывается пятой.

Шаг 4. Минимальное из значений равно 3 и соответствует b_4 – четвёртая деталь обрабатывается четвёртой.

Шаг 5. Минимальное из значений соответствует a_2 – вторая деталь обрабатывается третьей.

В результате получаем следующий порядок подачи деталей на станки (таблица 9.2).

Таблица 9.2

i	3	5	2	4	1
a_i	1	2	4	5	3
b_i	8	6	4	3	2

Время простоя второй машины при первичном порядке равно

$$\max\{3;3+4-2;3+4+1-2-4;3+4+1+5-2-4-8;3+4+1+5+2-2-4-8-3\} = \\ = \max\{3;5;2;-1;-2\} = 5.$$

Время простоя при оптимальной перестановке равно

$$\max\{1;1+2-8;1+2+4-8-6;1+2+4+5-8-6-4;1+2+4+5+3-8-6-4-3\} = \\ = \max\{1;-5;-7;-6;-6\} = 1.$$

3 Варианты заданий.

С помощью генератора случайных чисел задать таблицу времени для обработки $n = 20$ деталей на двух станках.

Контрольные вопросы

1 Какие задачи изучаются в теории расписаний?

2 В чём заключается суть метода решения задачи теории расписаний с двумя последовательными обслуживающими устройствами?

Список литературы

1 **Андронов, С. А.** Методы оптимального проектирования / С. А. Андронов. – Санкт-Петербург : С.-Петерб. ГУАП, 2001. – 169 с.

2 **Банди, Б.** Методы оптимизации: вводный курс / Б. Банди. – Москва : Радио и связь, 1988. – 128 с.

3 **Дворецкий, С. И.** Компьютерное моделирование и оптимизация технологических процессов и оборудования: учебное пособие / С. И. Дворецкий, А. Ф. Егоров, Д. С. Дворецкий. – Тамбов : ТГТУ, 2003. – 224 с.

4 **Калиткин, Н. Н.** Численные методы / Н. Н. Калиткин. – Санкт-Петербург : БХВ-Петербург, 2011. – 592 с.

5 **Кузнецов, А. В.** Высшая математика: Математическое программирование / А. В. Кузнецов, В. А. Сакович, Н. И. Холод. – Минск : Вышэйшая школа, 1994. – 286 с.

6 **Мину, М.** Математическое программирование. Теория и алгоритмы / М. Мину. – Москва : Наука, 1990. – 486 с.

7 **Таха, Х. А.** Введение в исследование операций / Х. А. Таха. – Москва : Вильямс, 2005. – 912 с.