МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО–РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Финансы и бухгалтерский учёт»

ФИНАНСОВАЯ МАТЕМАТИКА

Методические рекомендации к самостоятельной работе для студентов специальности 1–25 01 04 «Финансы и кредит» заочной формы обучения

Могилев 2022

УДК 336.2
ББК 65.261.4
Ф94

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско–Российского университета

Одобрено кафедрой «Финансы и бухгалтерский учет» «07» февраля 2022 г., протокол № 12

Составитель канд. физ.-мат. наук, доц. В. А. Ливинская

Рецензент канд. экон. наук, доц. И. В. Ивановская

Даны теоретические материалы, примеры тестов и задач для самостоятельной подготовки по дисциплине «Финансовая математика».

Учебно-методическое издание

ФИНАНСОВАЯ МАТЕМАТИКА

Ответственный за выпуск М. С. Александрёнок

Корректор А. А. Подошевко

Компьютерная верстка М. М. Дударева

Подписано в печать 14.04.2022. Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. 1,40 . Уч.-изд. л. 1,54 . Тираж 36 экз. Заказ № 160.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.

Содержание

Введение 4
1 Основные понятия в финансовой математике 5
2 Начисление процентов по простым ставкам 7
3 Начисление процентов по сложным ставкам 11
4 Потоки платежей 15
5 Измерение доходности финансовых операций 18
Список литературы 21

Введение

Цель методических рекомендаций – профессиональная подготовка специалистов высшей квалификации, направленная на закрепление теоретических знаний по дисциплине «Финансовая математика», формирование навыков применения методов количественного анализа экономических явлений, которые они могли бы самостоятельно применять в практической деятельности.

В процессе самостоятельного изучения представленного в методических рекомендациях материала студенты смогут приобрести необходимые научные знания, подготовиться к аудиторной контрольной работе и зачету по дисциплине «Финансовая математика».

Примерное содержание аудиторной контрольной работы: тестовые задания и задачи по темам учебной дисциплины.

Методические рекомендации составлены в соответствии с учебной программой дисциплины и включают теоретический материал по темам лекционных занятий, примерные тестовые задания и примеры задач.

1 Основные понятия в финансовой математике

В процессе управления финансами предприятия возникает необходимость в проведении специальных расчетов, связанных с движением денежных потоков в различные периоды времени. Ключевую роль в этих расчетах играет оценка стоимости денег во времени. Концепция такой оценки базируется на том, что стоимость денег с течением времени изменяется с учетом нормы прибыли, сложившейся на финансовом рынке, в качестве которой выступает ставка ссудного процента или норма доходности по государственным ценным бумагам. В практических финансовых операциях суммы денег вне зависимости от их назначения или происхождения так или иначе, но обязательно, связываются с конкретными моментами или периодами времени. Для этого в контрактах фиксируются соответствующие сроки, даты, периодичность выплат. Вне времени нет денег. Фактор времени, особенно в долгосрочных операциях, играет не меньшую, а иногда даже и большую роль, чем размеры денежных сумм. Необходимость учета временного фактора вытекает из сущности финансирования, кредитования и инвестирования и выражается в принципе неравноценности денег, относящихся к разным моментам времени (time–value of money), или в другой формулировке – принципе изменения ценности денег во времени.

Необходимость учета времени определяется принципом неравноценности денег, относящихся к разным моментам времени. Этот принцип обусловлен следующими основными причинами: деньги могут принести доход при инвестировании на определенный срок; покупательная способность денег снижается со временем вследствие инфляции. Универсальной единицей измерения длительности финансовой операции является год.

Датированная сумма. Неравноценность денег во времени выражается в том, что каждая денежная сумма в финансовом анализе представляет собой датированную сумму, т. е. сумму, отнесенную к определенной дате. Рассредоточение датированных сумм во времени приводит к неправомерности обычных действий с ними, например сложения или вычитания.

Основные денежные суммы. Всякая финансовая операция осуществляется в течение заданного промежутка времени, которому соответствуют две основные денежные суммы.

Текущая (*приведенная*) *стоимость* – это сумма денег, отнесенная на начало финансовой операции.

Итоговая (*будущая*) *стоимость* – это сумма денег, отнесенная к концу финансовой операции. В депозитной операции текущая стоимость – это сумма денег, помещаемая сегодня на депозитный счет, итоговая стоимость – это сумма денег, которая накопится на депозитном счете за определенный промежуток времени. В кредитной операции текущая стоимость – это величина выдаваемого сегодня кредита, итоговая стоимость – это сумма денег, которую следует вернуть через определенный промежуток времени.

Наращение и дисконтирование. В зависимости от того, какая из указанных сумм дана и какую нужно найти, выделяют два направления финансовых расчетов: наращение и дисконтирование.

Наращение – определение величины итоговой стоимости по заданной текущей стоимости.

Дисконтирование – определение текущей стоимости по ожидаемой итоговой сумме в будущем. Термин дисконтирование используется также для определения значения любой стоимостной величины на более ранний момент времени. Коэффициенты наращения и дисконтирования.

Коэффициент наращения К – отношение итоговой стоимости S к текущей стоимости P:

$$K = S / P.$$

Этот показатель характеризует темп роста денежных средств за определенный период.

Коэффициент дисконтирования (*дисконтный фактор*) v – отношение текущей стоимости к итоговой стоимости:

$$v = P / S.$$

Этот показатель характеризует уровень снижения денежных средств при переходе от конца к началу финансовой операции. Указанные коэффициенты могут выступать в качестве оценок эффективности финансовых операций, например в задачах их сравнения. Однако они неприменимы там, где требуется оптимизировать результаты по критерию времени или просто определить время операции, поскольку последнее в явном виде в выражениях для этих коэффициентов отсутствует.

Процент и дисконт. Результат финансовой операции в абсолютном выражении определяется в виде процента или дисконта с учетом заданного промежутка времени.

Процент – это абсолютная величина дохода, получаемая в результате финансовой операции за определенный период при наращении.

Дисконт – это абсолютная величина убытка, получаемая в результате финансовой операции за определенный период при дисконтировании. В общем случае для двух субъектов финансовой операции значение процента для одного из них совпадает со значением дисконта для другого. Например, в ссудной операции дисконт заемщика равен проценту банка.

Процентная ставка. Процентная ставка (ставка) за определенный период времени – это величина, характеризующая относительное изменение денежной суммы F за этот период:

$$i = \Delta F / F \cdot 100,$$

где ΔF – абсолютная величина изменения суммы F.

Определенная таким образом процентная ставка измеряется в процентах. Если относительное изменение денежной суммы не умножать на 100, то ставка будет измеряться в долях единицы (дробях).

Размер процентной ставки зависит от следующих основных факторов:

– общее состояние экономики;
– прогноз динамики денежно-кредитного рынка;
– вид финансовой операции;
– вид валюты;
– срок финансовой операции.

Пример тестового задания.

Процентная ставка – это:

а) относительная величина дохода за фиксированный интервал времени;
б) абсолютная величина дохода от предоставления денег в долг;
в) увеличение первоначальной суммы в связи с капитализацией;
г) все ответы верны.

Литература: [1, 2].

2 Начисление процентов по простым ставкам

В практике существуют различные способы начисления процентов, зависящие от условий контрактов. Соответственно, применяют различные виды процентных ставок. Одно из основных отличий связано с выбором исходной базы (суммы) для начисления процентов. Ставки процентов могут применяться к одной и той же начальной сумме на протяжении всего срока кредита или к сумме с начисленными в предыдущем периоде процентами. В первом случае они называются простыми, а во втором – сложными процентными ставками.

Основные обозначения:

PV (present value) – текущая (современная) величина денежной суммы;
FV (future value) – будущая (наращенная) величина денежной суммы;
$D = FV – PV = FV - PV$ – дисконт;
r, i – ставка наращения процентов (дробь);
n – срок кредита (в годах);
t – число дней кредита;
j – номинальная ставка процента;
m – количество начислений в год.

Наращенная сумма – это первоначальная сумма с начисленными к концу срока процентами:

$$FV = PV(1 + nr),$$

где n – срок кредита;
r – процентная ставка.

Если срок операции n задан в днях, а процентная ставка годовая, то полагают

$$n = t / K,$$

где K – временная база начисления процентов (365, 366 или 360 дней).

Тогда формула принимает вид:

$$FV = PV(1 + t/Kr).$$

В зависимости от применяемой временной базы и способа расчета t (точное по календарю, приближенное – все месяцы по 30 дней), возможны три варианта расчета простых процентов:

1) английская методика: (365/365) – точные проценты с точным числом дней кредита;

2) французская методика: (360/365) – обыкновенные проценты с точным числом дней кредита;

3) немецкая методика: (360/360) – обыкновенные проценты с приближенным числом дней кредита.

Для формулы простых процентов сумма кредита, которую надо выдать в долг, чтобы получить в конце срока сумму FV, равна

$$PV = FV/(1 + nr).$$

В зависимости от вида базы начисления процентов и выбора начала отсчета в периоде начисления процентов различают два метода начисления процентов:

1) декурсивный (последующий);

2) антисипативный (предварительный).

Декурсивный способ начисления процентов – способ, при котором проценты начисляются в конце каждого интервала начисления. Их величина определяется исходя из величины предоставляемого капитала. Соответственно, декурсивная процентная ставка представляет собой выраженное в процентах отношение суммы начисленного за определенный интервал дохода к сумме, имеющейся на начало данного интервала.

При декурсивном способе проценты начисляются по ставке i в конце периода начисления, базой начисления процентов служит текущая стоимость P. Процент I определяется выражением

$$I = P \cdot i/100.$$

Пример 1 – Сумма 80 тыс. р. помещена на депозит на год на условиях начисления процентов в конце срока. Определим начисленный процент и итоговую сумму, если годовая процентная ставка – 12 %.

Дано: $P = 80$; $i = 12$ %.

Найти: I, S.

Решение

$$I = 80 \cdot 12/100 = 9{,}6 \text{ тыс. р.};$$

$$S = 80 + 9{,}6 = 89{,}6 \text{ тыс. р.}$$

Антисипативный способ (предварительный) начисления процентов – это способ, при котором проценты начисляются в начале каждого интервала начисления. Сумма процентных денег определяется исходя из наращенной суммы. Процентной ставкой будет выраженное в процентах отношение суммы дохода, выплачиваемого за определенный интервал, к величине наращенной суммы, полученной по прошествии этого интервала. Определяемая таким способом процентная ставка называется учетной ставкой, или *антисипативным* процентом.

При *антисипативном* способе проценты начисляются по ставке процента i в начале периода начисления, базой начисления служит итоговая стоимость S. Процент I определяется выражением

$$I = S \cdot i/100.$$

Многообразие схем начисления процентов определяется многообразием ставок. В зависимости от способа начисления процентов различают:

– ставки наращения – при декурсивном способе начисления процентов;

– дисконтные ставки – при антисипативном способе начисления процентов.

Ставка наращения (*процентная ставка) i за период* – это доля процента I за этот период в текущей стоимости P:

$$i = I\,/\,P \cdot 100.$$

Процент, начисленный с использованием ставки наращения, называется *истинным* процентом.

Дисконтная ставка d за период – это доля дисконта за этот период в итоговой стоимости:

$$d = D/\,S \cdot 100.$$

Эту ставку иногда еще называют *процент авансом*, поскольку она позволяет начислить процент из суммы, возвращаемой в будущем, а также – *учетной* ставкой, поскольку она используется в операции учета векселя. В последнем случае текущая стоимость P называется выручкой. Дисконт, начисленный с использованием дисконтной ставки, называется *истинным дисконтом*. Ставки наращения и ставки дисконтирования используют как в операциях наращения, так и в операциях дисконтирования.

При дисконтировании в зависимости от того, какая из этих ставок задана, различают два вида моделей:

1) модель математического дисконтирования – для ставки наращения;

2) модель банковского учета – для дисконтной ставки.

В зависимости от ***вариативности базы начисления*** различают:

– простые ставки – при постоянной базе начисления;

– сложные ставки – при переменной базе начисления.

Простая ставка – это ставка при последовательном начислении процентов за несколько периодов на одну и ту же текущую стоимость.

Простой процент (дисконт) – это процент (дисконт), полученный при использовании простой ставки за определенный период.

Сложная ставка – это ставка при последовательном начислении процентов за несколько периодов, в каждом из которых – на итоговую стоимость предыдущего периода.

Сложный процент (дисконт) – это процент (дисконт), полученный при использовании сложной ставки за определенный период.

В зависимости от ***вариативности размера ставок*** различают:

– постоянные ставки – при постоянном значении;

– переменные ставки – при переменном значении.

Постоянная процентная ставка – это процентная ставка, размер которой постоянен в течение всего времени финансовой операции.

Переменная процентная ставка – это процентная ставка, размер которой изменяется в течение времени финансовой операции. Она может быть определена с помощью задания базовой ставки и маржи (надбавки), а также последовательности ставок разного размера.

В зависимости от ***способа определения времени*** различают:

– дискретные процентные ставки – при дискретном времени;

– непрерывные процентные ставки – при непрерывном времени.

Дискретная процентная ставка – это процентная ставка, при которой начисление всякий раз осуществляется за определенный промежуток времени (день, месяц, квартал, год).

Непрерывная процентная ставка – это процентная ставка, при которой начисление процентов осуществляется непрерывно. Она используется в теоретических расчетах для моделирования ситуаций, в которых период начисления очень мал.

Непрерывный процент (дисконт) – процент (дисконт), полученный при начислении с использованием непрерывной процентной ставки. При решении задач в финансовой математике обычно по умолчанию используется годовая постоянная дискретная ставка наращения.

Основные формулы, используемые для вычисления показателей наращения и дисконтирования при антисипативном и декурсивном способах начислении простых процентов, представлены в таблицах 1–2.

Таблица 1 – Модели наращения при декурсивном способе начисления простых процентов

Искомый показатель	Формула	Исходный показатель
Простой процент	$I = P \cdot n \cdot i$	P – текущая стоимость; i – простая ставка наращения; n – время (в годах)
Итоговая сумма	$S = P \cdot (1 + n \cdot i)$	
Множитель наращения	$\nu = (1 + n \cdot i)$	

Таблица 2 – Модели дисконтирования при антисипативном способе начисления простых процентов

Искомый показатель	Формула	Исходный показатель
Итоговая сумма	$S = \dfrac{P}{1-dn}$	P – текущая стоимость; d – простая учетная ставка; n – время (в годах)
Процент	$I = S - P$	
Множитель наращения	$\nu = \dfrac{1}{1-dn}$	

Пример 2 – Кредит был выдан под 12 % годовых с условием возвращения через год 80 тыс. р. Определим доход банка и величину выданного кредита.

Дано: $S = 80$; $i = 12$ %.

Найти: I, P.

Решение

$$I = 80 \cdot 12/100 = 9{,}6 \text{ тыс. р.};$$

$$P = 80 - 9{,}6 = 70{,}4 \text{ тыс. р.}$$

Пример тестового задания.

При декурсивном способе проценты начисляются по ставке *i:*

а) в конце периода начисления, базой начисления процентов служит текущая стоимость P;

б) в начале периода начисления, базой начисления процентов служит итоговая стоимость S;

в) в середине периода начисления, базой начисления процентов служит итоговая стоимость S;

г) один раз за весь период начисления, базой начисления процентов служит текущая стоимость P.

Литература: [1, 2].

3 Начисление процентов по сложным ставкам

База для начисления сложных процентов, в отличие от простых, не остается постоянной – она увеличивается с каждым шагом во времени. Абсолютная сумма начисляемых процентов возрастает, и процесс увеличения суммы долга происходит с ускорением. Наращение по сложным процентам можно представить как последовательное реинвестирование средств, вложенных под простые проценты на один период начисления. Присоединение начисленных процентов к сумме, которая послужила базой для их начисления, часто называют капитализацией процентов. Основные формулы расчетов представлены в таблице 3.

Таблица 3 – Модели наращения при декурсивном способе начисления сложных процентов

Искомый показатель	Формула	Исходный показатель
Итоговая сумма	$S = P \cdot (1 + j)^n$, $S = p \cdot (1 + \frac{j}{m})^{mn}$	P – текущая стоимость; J – процентная ставка наращения за период начисления процентов; m – число периодов начисления процентов в году
Процент	$I = S - P$	
Множитель наращения	$K = (1 + j)^n$, $K = (1+\frac{j}{m})^{mn}$	

Пусть процентная ставка меняется по годам. Первые n_1 лет она равна j_1, n_2 равна j_2 и т. д. Тогда

$$K = (1 + j_1)^{n_1} \cdot (1 + j_2)^{n_2} \cdot \ldots \cdot (1 + j_k)^{n_k};$$

$$K = (1 + \frac{j_1}{m})^{mn_1} \cdot (1 + \frac{j_2}{m})^{mn_2} \cdot \ldots \cdot (1 + \frac{j_k}{m})^{mn_k}.$$

Среди предложений банков по кредитным операциям со сложными процентами можно ориентироваться, если их пересчитать на эффективную годовую ставку.

Если S и P одинаковы, то при одинаковом n и процентной ставке j, обеспечивающей ту же доходность при начислении процентов один раз в году:

$$S = p \cdot (1 + j_{эф})^n.$$

Тогда

$$p \cdot (1 + \frac{j}{m})^{mn} = p \cdot (1 + j_{эф})^n;$$

$$(1 + \frac{j}{m})^m = 1 + j_{эф};$$

$$j_{эф} = (1 + \frac{j}{m})^m - 1.$$

Срок кредита для случая сложных процентов определяется по формуле

$$n = \frac{\lg\left(\frac{S}{p}\right)}{m \cdot \lg\left(1 + \frac{j}{m}\right)}.$$

Номинальная процентная ставка вычисляется по формуле

$$j = m \cdot \left[\left(\frac{S}{p} \right)^{\frac{1}{mn}} - 1 \right].$$

Пример 1 – Кредит выдан на 1,5 года под 12 % годовых (проценты простые). Необходимо определить эквивалентную ему ставку сложных процентов.

Решение

По условию $i_{пр}$ = 12 %; n = 1,5 года.

$$i_{сл} = (1 + 1{,}5 \cdot 0{,}12)^{\frac{1}{1{,}5}} - 1 = 0{,}1167, \text{ или } 11{,}67 \ \%.$$

Проверим результат:

$$i_{пр} = \frac{(1 + 0{,}1167)^{1{,}5} - 1}{1{,}5} = 0{,}12, \text{ или } 12 \ \%.$$

Вывод. Ставка простых процентов в размере 12 % годовых эквивалента ставке сложных процентов в 11,67 %.

Расчет наращенных сумм в условиях инфляции.

Инфляция – это социально–экономическое явление, которое проявляется в переполнении сферы обращения деньгами сверх потребностей товарооборота, что вызывает обесценивание денежной единицы и повышение общего уровня цен в стране. Инфляционные процессы, характерные для экономики многих стран, требуют, чтобы они учитывались в финансовых расчетах. Внешним признаком инфляции является, прежде всего, рост цен и, как следствие, снижение покупательной способности денег. Если индекс цен обозначить $I_ц$, а покупательную способность денег через $I_{пс}$, то

$$I_{пс} = \frac{1}{I_ц}.$$

Так как темп прироста цен α в основном соответствует темпу прироста инфляции, то годовой индекс цен составляет величину 1 + α. За n лет при сохранении предполагаемого среднегодового роста инфляции индекс цен будет равен (1 + α)n. Поэтому наращенная сумма за срок n лет с учетом ее обесценивания в результате инфляции составит

$$S_{инфл} = P \cdot \left(\frac{1 + i}{1 + \alpha} \right)^n.$$

Если же темп прироста инфляции равен ставке начисляемых процентов ($\alpha = i$), то покупательная способность наращенной суммы будет равна покупательной способности первоначальной суммы, то есть $S_{инфл} = P$. В этом случае вкладчик в некоторой степени нейтрализует инфляционный фактор. Если же $\alpha > i$, то полученная наращенная сумма не компенсирует потерю покупательной способности капитала в результате инфляции $S_{инфл} < P$. В этом случае банковскую ставку называют отрицательной. Только в случае, когда $\alpha < i$, может наблюдаться реальный рост покупательной способности вложенного капитала. Такую процентную ставку называют положительной.

Присутствие инфляционных ожиданий в составе номинальной процентной ставки обусловлено необходимостью сохранения покупательской способности денежной суммы, передаваемой во временное пользование, в условиях инфляции. Компенсация инфляционного обесценения не является реальным доходом кредитора и, следовательно, не имеет отношения к «плате за пользование кредитом». Вместе с тем присутствие этого элемента в составе номинальной процентной ставки существенно влияет на «реальную» процентную ставку, обеспечивая ее вероятностный характер.

Пример 2 – Первоначальная сумма 2 000 р. была помещена в банк на условиях капитализации процентного дохода под 16 % годовых на два года. Ежегодно цены растут в среднем на 12 %. Определить номинальную величину наращенной суммы и ее покупательную способность с учетом роста цен.

Решение

По условию P = 2000 р.; i = 0,16; α = 0,12; n = 2 года. По истечении всего срока вклада номинальная наращенная сумма составит

$$S = 2000\cdot(1 + 0{,}16)^2 = 2691{,}2 \text{ р.}$$

Наращенная сумма с учетом ее обесценивания в результате инфляции:

$$S_{инфл} = 2000\cdot\left(\frac{1+0{,}16}{1+0{,}12}\right)^2 = 2145{,}41 \text{ р.}$$

Вывод. Размер наращенной за два года суммы составит 2 691,2 р., однако покупательная способность наращенной суммы с учетом роста цен составит скорректированную величину 2 145,41 р.

Пример тестового задания.

Формула сложных процентов с неоднократным начислением процентов в течение года: j – номинальная ставка, m – число начислений процентов в год; n – число периодов начисления:

а) $P(1 + j / m)^{(m\,n)}$;
б) $P(1 + i)\ mn$;
в) $P / m\ (1 + i)\ n / m$;
г) $P\ (1 + i \cdot m) / mn$.

Литература: [1, 2].

4 Потоки платежей

Потоком платежей называется последовательность денежных сумм, приуроченных к определенным моментам времени. Отдельные денежные суммы, являющиеся членами последовательности, называются членами потока.

Основным принципом конверсии является принцип финансовой эквивалентности. Он заключается в неизменности финансовых взаимоотношений сторон в случае замены финансовых обязательств. Иными словами, при замене обязательств и соблюдении при этом принципа финансовой эквивалентности ни один из участников сделки не должен получить дополнительной выгоды (или потерпеть ущерб).

Конверсия платежей производится в случаях изменения сроков платежей, объединения платежей, замены первоначальной серии платежей на другую серию по суммам и срокам и т. д.

Консолидация платежей.

Консолидация, т. е. объединение платежей, является одним из самых распространенных видов изменения условий контрактов. Пусть платежи S_1, S_2, …, S_m со сроками n_1, n_2, …, n_m заменяются одним платежом в сумме S_0 со сроком n_0. В этом случае возможны две постановки задачи: если задан срок n_0, то находится сумма S_0 и, наоборот, если задана сумма консолидированного платежа, то определяется срок.

Определение размера консолидированного платежа. При решении этой задачи величину S_0 находим как сумму наращенных и дисконтированных платежей. Если применяются простые процентные ставки, то

$$S_0 = \sum_j S_j (1 + \Delta n_j \cdot i) + \sum_k S_k (1 + \Delta n_k \cdot i)^{-1},$$

где S_j – размеры объединяемых платежей со сроками $n_j < n_0$;
S_k – размеры платежей со сроками $n_k > n_0$.

$$\Delta n_j = n_0 - n_j; \quad \Delta n_k = n_k - n_0.$$

Если применяются сложные процентные ставки, то

$$S_0 = \sum_j S_j (1+i)^{\Delta n_j} + \sum_k S_k (1+i)^{-\Delta n_k}.$$

Пример 1 – Два платежа в 1 и 0,5 млн р. со сроками уплаты соответственно 150 и 180 дней объединяются в один со сроком 200 дней. Пусть стороны согласились на применение при консолидации простой ставки 20 % годовых. Найти консолидированную сумму долга. Число дней в году $K = 365$.

Решение

$$S_1 = 1000;\ S_2 = 500;\ t_1 = 150;\ t_2 = 180;\ t_0 = 200.$$

$$S_0 = 1000 \cdot \left(1 + \frac{200-150}{365} \cdot 0{,}2\right) + 500 \cdot \left(1 + \frac{200-180}{365} \cdot 0{,}2\right) = 1532{,}87 \text{ тыс. р.}$$

Пример 2 – Платежи в 1 и 2 млн р. и сроками уплаты через 2 и 3 года объединяются в один со сроком 2,5 года. При консолидации используется сложная ставка 20 % годовых. Найти сумму консолидированного платежа.

Решение

$$S_1 = 1000;\ S_2 = 2000;\ n_1 = 2;\ n_2 = 3;\ n_0 = 2{,}5.$$

$$S_0 = 1000 \cdot (1+0{,}2)^{0{,}5} + 2000 \cdot (1+0{,}2)^{-0{,}5} = 2921{,}187 \text{ тыс. р.}$$

Определение срока консолидированного платежа.

В случае простых процентных ставок уравнение эквивалентности запишется в виде равенства современных стоимостей соответствующих платежей. Из него несложно получить выражение для определения срока n_0:

$$n_0 = \frac{1}{i}\left(\frac{S_0}{\sum_j S_j (1+\Delta n_j \cdot i)^{-1}} - 1\right).$$

Очевидно, что решение может быть получено только при условии

$$S_0 > \sum_j S_j (1+\Delta n_j \cdot i)^{-1},$$

т. е. размер заменяющего платежа не может быть меньше суммы современных стоимостей заменяемых платежей.

При использовании сложной процентной ставки из уравнения эквивалентности может быть получено выражение для определения срока n_0 по формуле

$$n_0 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{Q}\right)}{\ln(1+i)};$$

$$Q = \sum_j S_j (1+i)^{-n_j};$$

$$S_0 > Q.$$

Для частного случая, когда

$$S_0 = \sum S_j,$$

при определении срока консолидированного платежа используют средний взвешенный срок:

$$n_0 = \frac{\sum S_j n_j}{S_0}.$$

Эта формула не требует задания уровня процентной ставки. Однако она дает приближенный результат, который больше точного. Погрешность тем больше, чем выше процентная ставка i.

Пример 3 – Суммы в размере 10, 20 и 15 млн р. должны быть выплачены через 50, 80 и 150 дней соответственно. Стороны согласились заменить их одним платежом в размере 50 млн р. Найти срок выплаты консолидированного платежа, если $i = 0{,}1$, $K = 365$.

Решение

Современная стоимость заменяемых платежей

$$S_0 = 10 \cdot \left(1 + \frac{50}{365} 0{,}1\right)^{-1} + 20 \cdot \left(1 + \frac{80}{365} 0{,}1\right)^{-1} + 15 \cdot \left(1 + \frac{150}{365} 0{,}1\right)^{-1} = 43{,}844 \text{ млн р.}$$

$$n_0 = \frac{1}{0{,}1}\left(\frac{50}{43{,}844} - 1\right) = 1{,}404 \text{ года.}$$

Наряду с *консолидацией*, объединением платежей в финансовой практике возникает задача *разъединения* платежей и вообще замены одной комбинации платежей другой комбинацией. Определение величины новых платежей и сроков их уплаты проводится на основе уравнений эквивалентности.

Пусть в соответствии с договором выплата в размере S должна быть произведена в момент времени t. Предположим, что часть этой выплаты в размере S_1 может быть произведена раньше, в момент t_1. Тогда оставшаяся часть

$$S_2 = S - S_1$$

может быть выплачена позже, в некоторый момент t_1. Для определения этого момента используется расчетная формула

$$t_2 = t + \frac{S_1}{S_2}(t - t_1).$$

Для того чтобы одна серия была эквивалентна другой серии по сложной процентной ставке i, необходимо, чтобы выполнялось равенство

$$\sum_j S_j (1+i)^{-t_j} = \sum_k S'_k (1+i)^{-t'_j}.$$

При изменении условий платежей внимание следует обращать на величину ставки, по которой осуществляется пересчет, а не на дату, относительно которой этот пересчет производится.

Пример тестового задания.

Два платежа считаются эквивалентными, если:

а) приведенные к одному моменту времени они оказываются равными;

б) равны процентные ставки;

в) равны наращенные суммы;

г) равны учетные ставки.

Литература: [1, 2].

5 Измерение доходности финансовых операций

Виды доходности финансовых операций.

Доходность – это количественная мера эффективности финансовых операций. При расчёте доходности любой операции производится анализ затрат и результатов. Рассмотрим основные виды доходности.

1 *Доходность* сделки за период, или инвестиционный доход

$$I = S(T) - S(0),$$

где $S(T)$ – возвращаемая сумма денег через период T;

$S(0)$ – начальная сумма денег, подлежащая инвестированию на время T.

2 *Коэффициент прироста капитала*, называемый также относительным ростом, или процентной ставкой,

$$r_T = \frac{S(T) - S(0)}{S(0)}$$

измеряется в долях или в процентах в зависимости от цели анализа.

3 *Коэффициент дисконтирования, или относительная скидка*

$$d_T = \frac{S(T) - S(0)}{S(T)}.$$

Указанные величины связаны соотношением

$$1 + r_T = \frac{1}{1 - d_T}.$$

При проведении финансовых операций экономический агент должен понимать, что скидка делается с большей (наращенной) суммы, а проценты начисляются на меньшую (исходную), поэтому для той же финансовой операции коэффициент дисконтирования ниже коэффициента прироста капитала. Например, покупателю выгоднее получить скидку 20 % с каждой единицы товара, чем «довесок» в 20 % при сохранении цены, поскольку его скидка в последнем случае составит лишь 16,67 %.

4 *Нормированная* (*эффективная*) *доходность*

$$r_{еф} = \left(1 + r_T\right)^{\frac{1}{T}} - 1.$$

Эффективная ставка доходности совпадает с процентной ставкой, если срок сделки равен одному году.

5 *Инвестиционные критерии* позволяют сделать вывод о целесообразности инвестиций. К ним относятся чистый приведённый доход, внутренняя доходность, или доходность, «обещанная» инвестору по данной сделки, индекс доходности.

Доходность акций.

Инвестор может получить доход с акций двумя способами: за счет роста курсовой стоимости акций и за счет дивидендов.

Основным доходом инвестора по акциям является рост курсовой стоимости акций. Если дела у компании идут хорошо, ее выручка и прибыль растет, компания развивается, выплачивает дивиденды, которые тоже растут, это положительно отражается на цене акций, и она растет. Инвестор, видя такое положение вещей и оценив перспективы, покупает акции компании. Если дела компании продолжают идти так же хорошо, цена акций вырастает, тогда инвестор может продать акции по цене дороже и получить прибыль.

Второй источник дохода – дивиденды – это часть прибыли, которая компания выплачивает акционерам. Дивиденды могут выплачиваться раз в год, раз в полугодие или квартал. Размер дивидендов рекомендуется советом директоров и утверждается на общем собрании акционеров.

Доходность акций складывается из роста курсовой стоимости акций и дивидендов. Доходность акций показывает какой доход в процентом или номинальном выражении принесли акции. Доходность в общем смысле рассчитывается как сумма прибыли, деленная на сумму вложенных средств. Так как по акциям можно получить не только прибыль, но и убыток, то доходность может быть отрицательной.

Дивидендная доходность акций.

Дивидендная доходность акций характеризуется отношением размера дивиденда к цене акции. Дивидендная доходность рассчитывается по формуле

$$r = \frac{D}{P} \cdot 100\,\%,$$

где D – размер дивиденда за год;

P – рыночная цена акции.

Рыночная доходность акций, то есть за счет роста курсовой стоимости, рассчитывается по формуле

$$r = \frac{P_1 - P_0}{P_0} \cdot 100\,\%,$$

где P_1 – цена продажи акции;

P_0 – цена покупки акции.

Текущая доходность акций рассчитывается также и показывает доходность, которую получит инвестор, если продаст акцию по текущей рыночной цене.

Полная доходность акций.

Полная доходность складывается из дивидендов и роста курсовой стоимости:

$$r = \frac{D + P_1 - P_0}{P_0} \cdot 100\,\%.$$

Доходность акций в процентах годовых.

Владеть акцией можно как меньше, так и больше года. Поэтому, чтобы сравнить доходность акций с доходностью другого инструмента, например, депозита, ее нужно привести к равнозначному значению – доходности в процентах годовых. Для этого доходность умножается на коэффициент K = 365 / Количество дней владения акцией.

Пример 1 – Дивиденды по акциям ОАО за 2020 г. были равны 15,24 р. Цена акции 193,6 р.

Дивидендная доходность равна 15,24/193,6 ·100 % = 7,9 %.

Пример 2 – Если цена покупки акций ОАО – 191 р., а цена продажи – 209 р., то доходность равна

$$(209 - 191)/191 \cdot 100\ \% = 9{,}4\ \%.$$

Полная доходность (15,24 + (209 – 191))/191·100 % =17,4 %.

Если акцией владели 250 дней, доходность в процентах годовых рассчитывается так:

$$(15{,}24 + (209 - 191))/191 \cdot (365/250) \cdot 100\ \% = 25{,}4\ \%.$$

Пример 3 – Доллар США, купленный за 2,55 р., продали спустя 2 месяца за 2,58 р. Оцените доходность операции.

Решение

$$i = \frac{(2{,}58 - 2{,}55) \cdot 12}{2{,}55 \cdot 2} = 0{,}07 \quad (\text{или } 7{,}0\ \%).$$

Пример тестового задания.

Оцените доходность операции, если финансовый актив, купленный за 15 тыс. д. е., продали спустя 27 дней за 16 тыс. д. е.:

а) 89 %;

б) 98 %;

в) 17 %;

г) 22 %.

Литература: [1, 2].

Список литературы

1 **Копнова, Е. Д.** Основы финансовой математики: учебное пособие / Е. Д. Копнова. – Москва: Московский финансово-промышленный университет «Синергия», 2019. – 232 с.

2 **Чусавитина, Г. Н.** Основы финансовой математики: учебное пособие / Г. Н. Чусавитина. – 4–е изд., стер. – Москва: ФЛИНТА, 2019. – 170 с.