УДК 517.977.58

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ ОБЛАСТИ В ПАКЕТЕ ПРИКЛАДНЫХ ПРОГРАММ MATLAB

В. Д. МИЛЬТО
Научные руководители В. Г. ЗАМУРАЕВ, канд. физ.-мат. наук, доц.;
А. Г. КОЗЛОВ
БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

В 1975 г. французские математики D. Begis и R. Glowinski в работе [1] рассмотрели применение метода конечных элементов к решению несложной модельной задачи оптимизации области, возникающей при изучении явления диффузии. В 2007 г. аргентинские авторы O. Mandrini и G. Sottosanto, опираясь на результаты работы [1], получили численное решение данной задачи в некоторых простейших случаях, используя пакет прикладных программ MATLAB [2]. В настоящей работе рассматривается более общая, чем в [2], задача оптимизации с произвольной непрерывной функцией в правой части уравнения Пуассона. Для решения рассматриваемой задачи применяется метод проекции градиента, решение реализуется в пакете MATLAB.

Постановка задачи. Пусть Ω — плоская область следующего вида:

$$\Omega_c = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| 0 < x < c(y), 0 < y < 1 \right\},$$

где

$$c \in C_{ad} = \left\{ c \in Lip[0,1] \middle| 0 < \alpha \le c \le \beta, |c'| \le k_1, \int_0^1 c(y)\,dy = k_2 \right\},$$

здесь α, β, k_1, k_2 – некоторые постоянные. Обозначим через Γ_c^R часть границы области Ω_c, определяемую соотношением

$$\Gamma_c^R = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| x = c(y), 0 \le y \le 1 \right\}.$$

Пусть заданы постоянные f и u_d. Рассмотрим следующую задачу минимизации:

$$\min_{c \in C_{ad}} \iint_{\Omega_c} \left(u_c(x,y) - u_d \right)^2 dxdy, \qquad (1)$$

где $u_c(x,y)$ – решение (обобщённое) краевой задачи для уравнения Пуассона

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f\,,\ (x,y)\in\Omega_c\,, \tag{2}$$

с граничными условиями

$$u\big|_{\Gamma_c^R}=0\,,\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\bigg|_{\partial\Omega_c\setminus\Gamma_c^R}=0\,. \tag{3}$$

В работе [1] доказано, что задача (1–3) разрешима.

Задача в фиксированной области. С целью упрощения численного решения, задачу (1)–(3) можно преобразовать к следующей задаче минимизации в фиксированной области $\Omega=[0,1]\times[0,1]$:

$$\min_{c\in C_{ad}}\iint_{\Omega} c(y)\big(u(x,y)-u_d\big)^2\,dxdy\,, \tag{4}$$

где $u(x,y)$ – решение (в некотором функциональном пространстве) вариационного уравнения

$$\iint_{\Omega} c\left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\left(x\frac{c'}{c}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(x\frac{c'}{c}\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right]dxdy=\iint_{\Omega} cfvdxdy\,. \tag{5}$$

Естественным обобщением задачи (4–5) является задача, в которой $f(x,y)$ и $u_d(x,y)$ – некоторые непрерывные функции, заданные в области Ω. Такую задачу мы и будем рассматривать.

Приближённая задача. Для численного решения задачи (4–5) её следует приблизить конечномерной задачей. С этой целью можно использовать аппроксимацию по методу конечных элементов [3].

Пусть $n\in\mathbb{N}$. Обозначим

$$h=\frac{1}{n},\ x_i=ih,\ y_j=jh,\ \xi_i=\frac{x_{i-1}+x_i}{2},\ \eta_j=\frac{y_{j-1}+y_j}{2},\ i,j=\overline{1,n}.$$

Пусть

$$C_{ad}^h=\left\{c_h\,\middle|\,c_h\in C_{ad},c_h\big|_{[y_{j-1},y_j]}\in P_1,\ j=\overline{1,n}\right\}.$$

Приближённая конечномерная задача минимизации формулируется следующим образом:

$$\min_{c_h\in C_{ad}^h}\frac{h^2}{4}\sum_{i,j=1}^{n}c_h(\eta_j)\sum_{k=i-1}^{i}\sum_{l=j-1}^{j}\left|u_h(x_k,y_l)-u_d(x_k,y_l)\right|^2, \tag{6}$$

где u_h – решение (в некотором конечномерном пространстве) уравнения

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx \int_{y_{j-1}}^{y_j} c_h(\eta_j) \left[\frac{1}{c_h^2(\eta_j)} \frac{\partial u_h}{\partial x} \frac{\partial v_h}{\partial x} + \left(\xi_i \frac{c_h'}{c_h(\eta_j)} \frac{\partial u_h}{\partial x} - \frac{\partial u_h}{\partial y} \right) \left(\xi_i \frac{c_h'}{c_h(\eta_j)} \frac{\partial u_h}{\partial x} - \frac{\partial u_h}{\partial y} \right) \right] dy =$$

$$= \frac{h^2}{4} \sum_{i,j=1}^{n} c_h(\eta_j) \sum_{k=i-1}^{i} \sum_{l=j-1}^{j} f(x_k, y_l) v_h(x_k, y_l). \qquad (7)$$

В [1] доказана сходимость при $h \to 0$ решений задачи (6–7) к решению задачи (1)–(3) в случае, когда f и u_d — постоянные. В рассматриваемом здесь более общем случае сходимость приближённых решений может быть установлена аналогичными рассуждениями.

Численное решение задачи. Для решения приближённой задачи (6–7) можно использовать известный метод проекции градиента [1], [4]. Алгоритм метода несложно реализуется в пакете прикладных программ MATLAB [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Begis, D.** Application de la méthode des éléments finis à l’approximation d’un problème de domaine optimal. Méthodes de résolution des problèmes approchés / D. Begis, R. Glowinski // Applied Mathematics & Optimization. – 1975. – Vol. 2, No 2. – P.130–169.

2. **Mandrini, O.** Diseño optimo de la forma de un recinto: un modelo y su resolucion numerica / O. Mandrini, G. Sottosanto // Mecánica Computacional. – 2007. – Vol. XXVI. – P. 1892–1905.

3. **Стренг, Г.** Теория метода конечных элементов / Г. Стренг, Дж. Фикс. – М. : Мир, 1977. – 351 с.

4. **Зайченко, Ю. П.** Исследование операций / Ю. П. Зайченко. – Киев : Слово, 2003. – 688 с.

5. **Ануфриев, И. Е.** MATLAB 7 / И. Е. Ануфриев, А. Б. Смирнов, Е. Н. Смирнова. – СПб. : БХВ-Петербург, 2005. – 1104 с.