

УДК 536.24+66.015.23
 МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДА РАСЧЕТА ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ
 В КРУГОВОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ СТЕНКЕ

А. И. КАШПАР, В. Н. ЛАПТИНСКИЙ
 Государственное научное учреждение
 «ИНСТИТУТ ТЕХНОЛОГИИ МЕТАЛЛОВ НАН Беларуси»
 Могилев, Беларусь

В [1] предложен метод решения задачи об определении распределения температуры в круговой цилиндрической оболочке (стенке) с постоянно действующим внутренним источником теплоты с удельной мощностью $q_v = w_0(1 + bT)$, которая имеет вид [2, с. 16, 29]:

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} + \frac{w_0}{\lambda}(1 + bT) = 0; \quad T(r_1) = \tilde{T}_1, \quad T(r_2) = \tilde{T}_2, \quad 0 < r_1 < r_2. \quad (1)$$

В данной работе предлагается модификация метода [1], обладающая более высокой скоростью сходимости.

Введем следующие обозначения: $p = w_0 b / \lambda$, $q = w_0 / \lambda$. Тогда уравнение (1) примет вид:

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} + pT + q = 0 \quad (2)$$

при тех же граничных условиях.

Решение задачи (2) получено в следующем виде:

$$T''(r) = T_0''(r) + T_1''(r) + T_2''(r) + \dots,$$

где

$$T_0''(r) = \frac{\ln \frac{r_2}{r}}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \tilde{T}_1 + \frac{\ln \frac{r}{r_1}}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \tilde{T}_2 + \frac{\ln \frac{r}{r_1}}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \int_{r_1}^{r_2} \frac{ds}{s} \int_{r_1}^s \sigma q d\sigma - \int_{r_1}^r \frac{ds}{s} \int_{r_1}^s \sigma q d\sigma;$$

$$T_{k+1}''(r) = \frac{\ln \frac{r}{r_1}}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \int_{r_1}^{r_2} \frac{ds}{s} \int_{r_1}^s \sigma p T_k''(\sigma) d\sigma - \int_{r_1}^r \frac{ds}{s} \int_{r_1}^s \sigma p T_k''(\sigma) d\sigma.$$

При исходных данных [1], получим:

$$T(r) \approx \tilde{T}_1''(r) = T_0''(r) + T_1''(r) = 0,69545r^4 + 491,91157r^2 \ln r - 552,71023r^2 - 325,08035 \cdot \ln r + 652,01478;$$

$$T(r) \approx \tilde{T}_2''(r) = T_0''(r) + T_1''(r) + T_2''(r) = -0,040762r^6 - 64,86176r^4 \ln r + 105,30934r^4 + 171,45588r^2 \ln r - 520,6198r^2 + 627,0619 \ln r + 1049,20587 \frac{1}{r} + 415,35121.$$

Сравним полученные приближенные решения $\tilde{T}_1''(r)$, $\tilde{T}_2''(r)$ с приближенным решением $\tilde{T}_2(r)$, полученным в [1], и с точным решением $T(r)$, используемым [1] в точках $r_i = 1 + 0,01i$ ($i = 0, 1, \dots, 10$) (табл. 1):

Табл. 1. Значения в узлах r_i точного и приближенных решений и их сравнения

r	$T(r)$	$\tilde{T}_2(r)$	$\tilde{T}_1''(r)$	$\tilde{T}_2''(r)$	$ T(r) - \tilde{T}_2(r) $	$ T(r) - \tilde{T}_1''(r) $	$ T(r) - \tilde{T}_2''(r) $
1,00	100,00000	100,0000	100,0000	100,00000	0,000000	0,000000	0,00000000
1,01	90,677277	90,67727	90,67717	90,677276	0,000007	0,000105	0,00000021
1,02	81,425269	81,42522	81,42507	81,425269	0,000049	0,000197	0,00000041
1,03	72,244333	72,24423	72,24407	72,244332	0,000102	0,000265	0,00000055
1,04	63,134836	63,13469	63,13453	63,134835	0,000147	0,000304	0,00000065
1,05	54,097156	54,09699	54,09684	54,097156	0,000169	0,000313	0,00000067
1,06	45,131685	45,13152	45,13139	45,131685	0,000165	0,000293	0,00000063
1,07	36,238822	36,23869	36,23858	36,238822	0,000135	0,000245	0,00000054
1,08	27,418974	27,41889	27,41880	27,418974	0,000086	0,000176	0,00000039
1,09	18,672559	18,67253	18,67247	18,672559	0,000034	0,000092	0,00000020
1,10	10,000000	10,00000	10,00000	10,000000	0,000000	0,000000	0,00000000

Расчет максимальных относительных погрешностей для данного способа в двух случаях дал следующий результат:

$$\sigma_1'' = \max_i \left| \frac{T(r_i) - \tilde{T}_1''(r_i)}{T(r_i)} \right| \cdot 100\% = 0,00068\% ;$$

$$\sigma_2'' = \max_i \left| \frac{T(r_i) - \tilde{T}_2''(r_i)}{T(r_i)} \right| \cdot 100\% = 0,0000015\% .$$

Из анализа полученных результатов видно, что описанные методы решения краевой задачи (1) достаточно удобны для применений, при этом предложенный метод является более эффективным. Заметим, что классический метод решения задачи (1) связан с использованием бесселевых функций. В предложенных методах специальные функции не используются, поэтому он применим к задачам, для которых такие функции заведомо не применимы либо не разработана соответствующая методика их использования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Кашпар, А. И.** Расчет линейного температурного поля в круговой цилиндрической стенке / А. И. Кашпар, В. Н. Лаптинский // Материалы, оборудование и ресурсосберегающие технологии: материалы Междунар. науч.-техн. конф. – Могилев, 24-25 апреля 2014 г. – Могилев: Беларус.-Рос. ун-т, 2014. – С. 33.
2. Теория тепломассообмена: учебник для вузов / С. И. Исаев [и др.]; под ред. А. И. Леонтьева. – М. : Высшая школа, 1979. – 495 с.