

УДК 536.24+66.015.23  
 МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДА РАСЧЕТА ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ  
 В КРУГОВОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ СТЕНКЕ

А. И. КАШПАР, В. Н. ЛАПТИНСКИЙ  
 Государственное научное учреждение  
 «ИНСТИТУТ ТЕХНОЛОГИИ МЕТАЛЛОВ НАН Беларуси»  
 Могилев, Беларусь

В [1] предложен метод решения задачи об определении распределения температуры в круговой цилиндрической оболочке (стенке) с постоянно действующим внутренним источником теплоты с удельной мощностью  $q_v = w_0(1 + bT)$ , которая имеет вид [2, с. 16, 29]:

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} + \frac{w_0}{\lambda}(1 + bT) = 0; \quad T(r_1) = \tilde{T}_1, \quad T(r_2) = \tilde{T}_2, \quad 0 < r_1 < r_2. \quad (1)$$

В данной работе предлагается модификация метода [1], обладающая более высокой скоростью сходимости.

Введем следующие обозначения:  $p = w_0 b / \lambda$ ,  $q = w_0 / \lambda$ . Тогда уравнение (1) примет вид:

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} + pT + q = 0 \quad (2)$$

при тех же граничных условиях.

Решение задачи (2) получено в следующем виде:

$$T''(r) = T_0''(r) + T_1''(r) + T_2''(r) + \dots,$$

где

$$T_0''(r) = \frac{\ln \frac{r_2}{r}}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \tilde{T}_1 + \frac{\ln \frac{r}{r_1}}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \tilde{T}_2 + \frac{\ln \frac{r}{r_1}}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \int_{r_1}^{r_2} \frac{ds}{s} \int_{r_1}^s \sigma q d\sigma - \int_{r_1}^r \frac{ds}{s} \int_{r_1}^s \sigma q d\sigma;$$

$$T_{k+1}''(r) = \frac{\ln \frac{r}{r_1}}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \int_{r_1}^{r_2} \frac{ds}{s} \int_{r_1}^s \sigma p T_k''(\sigma) d\sigma - \int_{r_1}^r \frac{ds}{s} \int_{r_1}^s \sigma p T_k''(\sigma) d\sigma.$$

При исходных данных [1], получим:

$$T(r) \approx \tilde{T}_1''(r) = T_0''(r) + T_1''(r) = 0,69545r^4 + 491,91157r^2 \ln r - 552,71023r^2 - 325,08035 \cdot \ln r + 652,01478;$$

$$T(r) \approx \tilde{T}_2''(r) = T_0''(r) + T_1''(r) + T_2''(r) = -0,040762r^6 - 64,86176r^4 \ln r + 105,30934r^4 + 171,45588r^2 \ln r - 520,6198r^2 + 627,0619 \ln r + 1049,20587 \frac{1}{r} + 415,35121.$$

Сравним полученные приближенные решения  $\tilde{T}_1''(r)$ ,  $\tilde{T}_2''(r)$  с приближенным решением  $\tilde{T}_2(r)$ , полученным в [1], и с точным решением  $T(r)$ , используемым [1] в точках  $r_i = 1 + 0,01i$  ( $i = 0, 1, \dots, 10$ ) (табл. 1):

Табл. 1. Значения в узлах  $r_i$  точного и приближенных решений и их сравнения

| $r$  | $T(r)$    | $\tilde{T}_2(r)$ | $\tilde{T}_1''(r)$ | $\tilde{T}_2''(r)$ | $ T(r) - \tilde{T}_2(r) $ | $ T(r) - \tilde{T}_1''(r) $ | $ T(r) - \tilde{T}_2''(r) $ |
|------|-----------|------------------|--------------------|--------------------|---------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| 1,00 | 100,00000 | 100,0000         | 100,0000           | 100,00000          | 0,000000                  | 0,000000                    | 0,00000000                  |
| 1,01 | 90,677277 | 90,67727         | 90,67717           | 90,677276          | 0,000007                  | 0,000105                    | 0,00000021                  |
| 1,02 | 81,425269 | 81,42522         | 81,42507           | 81,425269          | 0,000049                  | 0,000197                    | 0,00000041                  |
| 1,03 | 72,244333 | 72,24423         | 72,24407           | 72,244332          | 0,000102                  | 0,000265                    | 0,00000055                  |
| 1,04 | 63,134836 | 63,13469         | 63,13453           | 63,134835          | 0,000147                  | 0,000304                    | 0,00000065                  |
| 1,05 | 54,097156 | 54,09699         | 54,09684           | 54,097156          | 0,000169                  | 0,000313                    | 0,00000067                  |
| 1,06 | 45,131685 | 45,13152         | 45,13139           | 45,131685          | 0,000165                  | 0,000293                    | 0,00000063                  |
| 1,07 | 36,238822 | 36,23869         | 36,23858           | 36,238822          | 0,000135                  | 0,000245                    | 0,00000054                  |
| 1,08 | 27,418974 | 27,41889         | 27,41880           | 27,418974          | 0,000086                  | 0,000176                    | 0,00000039                  |
| 1,09 | 18,672559 | 18,67253         | 18,67247           | 18,672559          | 0,000034                  | 0,000092                    | 0,00000020                  |
| 1,10 | 10,000000 | 10,00000         | 10,00000           | 10,000000          | 0,000000                  | 0,000000                    | 0,00000000                  |

Расчет максимальных относительных погрешностей для данного способа в двух случаях дал следующий результат:

$$\sigma_1'' = \max_i \left| \frac{T(r_i) - \tilde{T}_1''(r_i)}{T(r_i)} \right| \cdot 100\% = 0,00068\% ;$$

$$\sigma_2'' = \max_i \left| \frac{T(r_i) - \tilde{T}_2''(r_i)}{T(r_i)} \right| \cdot 100\% = 0,0000015\% .$$

Из анализа полученных результатов видно, что описанные методы решения краевой задачи (1) достаточно удобны для применений, при этом предложенный метод является более эффективным. Заметим, что классический метод решения задачи (1) связан с использованием бесселевых функций. В предложенных методах специальные функции не используются, поэтому он применим к задачам, для которых такие функции заведомо не применимы либо не разработана соответствующая методика их использования.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Кашпар, А. И.** Расчет линейного температурного поля в круговой цилиндрической стенке / А. И. Кашпар, В. Н. Лаптинский // Материалы, оборудование и ресурсосберегающие технологии: материалы Междунар. науч.-техн. конф. – Могилев, 24-25 апреля 2014 г. – Могилев: Беларус.-Рос. ун-т, 2014. – С. 33.
2. Теория тепломассообмена: учебник для вузов / С. И. Исаев [и др.]; под ред. А. И. Леонтьева. – М. : Высшая школа, 1979. – 495 с.