

УДК 621.787

**А. М. Довгалева, канд. техн. наук, доц., Н. А. Леванович, канд. техн. наук, доц.,  
С. А. Сухоцкий, Д. М. Свирепа**

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МАГНИТНО-ДИНАМИЧЕСКОГО ИНСТРУМЕНТА ДЛЯ УПРОЧНЯЮЩЕЙ ОБРАБОТКИ ПЛОСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

В статье представлены конструкция и математическая модель двухрядного магнитно-динамического инструмента для упрочняющей обработки плоских поверхностей. Приведена система дифференциальных уравнений, описывающих кинематику движения шара-ударника, взаимодействие шара-ударника с деформирующим шаром инструмента, а также зависимость для определения скорости деформирующего шара в момент его взаимодействия с деталью.

Долговечность деталей машин во многом определяется состоянием их поверхностного слоя, сформированного на финишных операциях технологического процесса и непосредственно участвующего в работе. Среди известных способов повышения эксплуатационных свойств поверхностей деталей наиболее эффективными являются методы поверхностного пластического деформирования [1–3].

Поверхностное пластическое деформирование изменяет микроструктуру и физико-механические свойства поверхностного слоя металла, формирует благоприятные остаточные напряжения и выгодную топографию микронеровностей, повышает усталостную прочность, контактную выносливость и износостойкость деталей [4–7].

Большой научно-практический интерес представляет новый метод магнитно-динамического упрочнения (МДУ), при котором силовое взаимодействие деформирующих элементов с обрабатываемой поверхностью детали обеспечивается с применением энергии концентрированного магнитного поля [8–11]. Разработаны конструкции инструментов для осуществления магнитно-динамического упрочнения внутренних и наружных поверхностей вращения [12–15]. На начальной стадии находятся работы по созданию инструментов для упрочняющей обработки плоских по-

верхностей.

**Объект исследований.** Упрочняющую обработку плоских поверхностей деталей осуществляют двухрядным магнитно-динамическим инструментом, представленным на рис. 1.

Инструмент содержит корпус 1 с опорной поверхностью 2 и ротор 3. На роторе 3 соосно закреплены: источник магнитного поля в виде кольцевого постоянного магнита 4 с осевой намагниченностью; магнитопроводный диск 5 с периферийной поверхностью 6, имеющей профиль окружности или периодической кривой; обойма 7. Магнитопроводный диск 5 контактирует с торцом кольцевого постоянного магнита 4. Внутренняя поверхность корпуса 1 и наружная поверхность обоймы 7 образуют кольцевые полости 8, 9, в которых соответственно расположены шары-ударники 10 и деформирующие шары 11. Периферийная поверхность 6 магнитопроводного диска 5 размещена в кольцевой полости 8 рядом с шарами-ударниками 10. Кольцевая полость 9 соединена с кольцевой полостью 8 и выходит на торцовую поверхность инструмента.

Инструмент работает следующим образом. Деталь 12 фиксируют на столе, а ротор 3 инструмента закрепляют в шпинделе станка. Устанавливают требуемый размер статической настройки инструмента, обеспечив зазор  $\Delta$  между

его торцом и обрабатываемой поверхностью. Магнитопроводный диск 5 подводит магнитное поле от кольцевого постоянного магнита 4 к шароударникам

кам 10. В результате шароударники 10 притягиваются к периферийной поверхности 6 магнитопроводного диска 5 магнитной силой.

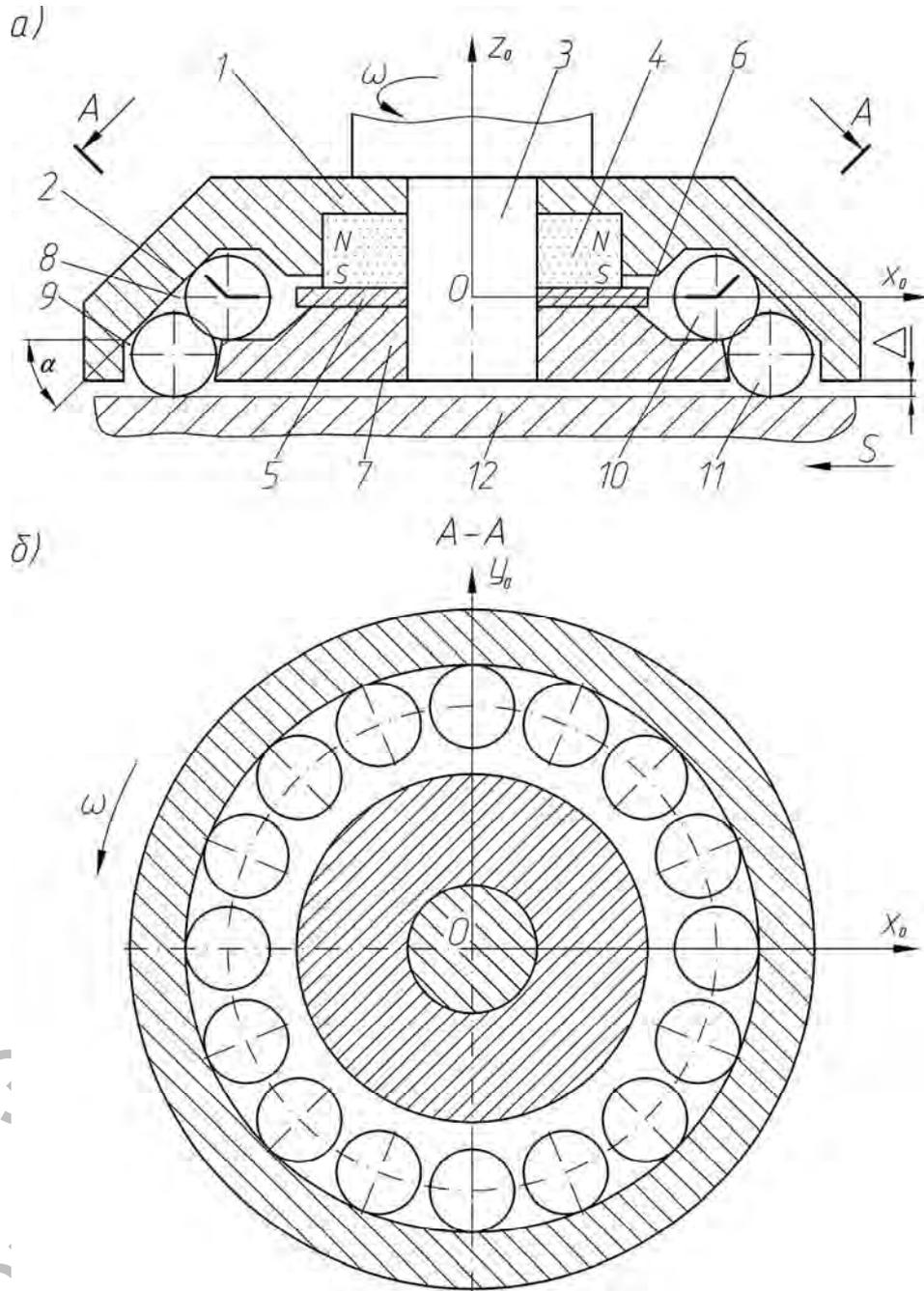


Рис. 1. Схема инструмента для магнитно-динамического упрочнения плоских поверхностей: а – общий вид схемы; б – поперечное сечение инструмента

Ротору 3 сообщают вращение и перемещают деталь 12 с подачей  $S$  относительно инструмента. Шароударники 10 перемещаются магнитным полем вдоль

кольцевой камеры 8. Возникающая при этом центробежная сила смещает шароударники 10 в радиальном направлении и прижимает их к опорной поверхности 2

корпуса 1 инструмента. Перемещаясь по опорной поверхности 2 корпуса 1 инструмента, шары-ударники 10 периодически сталкиваются с поверхностями деформирующих шаров 11 и сообщают им ударный импульс. В результате деформирующие шары 11 осуществляют поверхностно-пластическое деформирование обрабатываемой поверхности. После многократного взаимодействия деформирующих шаров 11 с деталью 12 на ее поверхности формируется новый стохастический рельеф с высокими эксплуатационными свойствами.

### Постановка задачи исследований

В настоящее время отсутствуют теоретические основы кинематики и динамики движения шаров-ударников и деформирующих шаров при их периодическом взаимодействии, что вызывает затруднения при конструировании инструментов для МДУ плоских поверхностей и сдерживает их применение в промышленности.

Данная работа посвящена решению поставленной задачи. Выбор конструктивных параметров магнитно-динамических инструментов для обеспечения заданных чертежом качественных характеристик плоских поверхностей деталей целесообразно осуществлять с использованием системы автоматизированного проектирования (САПР), функционирование которой основано на моделировании работы инструмента.

Математическое моделирование инструмента выполним в следующей последовательности:

- 1) исследуем движение шара-ударника от периферийной поверхности магнитопроводного диска до взаимодействия с деформирующим шаром;
- 2) рассмотрим кинематические характеристики шара-ударника при его перемещении по опорной поверхности корпуса инструмента;
- 3) выполним анализ характеристик взаимодействия шара-ударника с деформирующим шаром инструмента.

При разработке математической модели представленного на рис. 1 инструмента введем следующие допущения:

- продольная ось инструмента расположена вертикально;
- перемещение шаров-ударников и деформирующих шаров осуществляется в различных плоскостях;
- исследуем движение шара-ударника в относительной системе координат;
- шар-ударник и деформирующий шар рассматриваем как материальные точки с массами  $m_1$  и  $m_2$ , помещенными в центр сфер соответствующих радиусов;
- рассматриваем взаимодействие шара-ударника с деформирующим шаром инструмента;
- сила магнитного взаимодействия шара-ударника с магнитопроводным диском направлена по линии, соединяющей их геометрические центры.

**1. Моделирование движения шара-ударника от периферийной поверхности магнитопроводного диска до взаимодействия с деформирующим шаром.** Исследуем движение шара-ударника в системе координат  $Oxy$  (рис. 2).

Запишем основное уравнение динамики движения шара-ударника как материальной точки:

$$m_1 \vec{a}^r = \vec{\phi}^e + \vec{\phi}^k + \vec{F}^{TP} + \vec{F}^M + \vec{N} + \vec{G}, \quad (1)$$

где  $m_1$  – масса шара-ударника;  $\vec{a}^r$  – относительное ускорение материальной точки;  $\vec{\phi}^e$  – переносная сила инерции;  $\vec{\phi}^k$  – кориолисова сила инерции;  $\vec{F}^{TP}$  – сила трения скольжения шара-ударника о поверхность обоймы (на рис. 2 не показана);  $\vec{F}^M$  – сила магнитного притяжения шара-ударника к периферийной поверхности магнитопроводного диска;  $\vec{N}$  – нормальная реакция, действующая на шар-ударник со стороны поверхности обоймы инструмента (на рис. 2 не показана);  $\vec{G}$  – сила тяжести шара-ударника (на рис. 2 не показана).

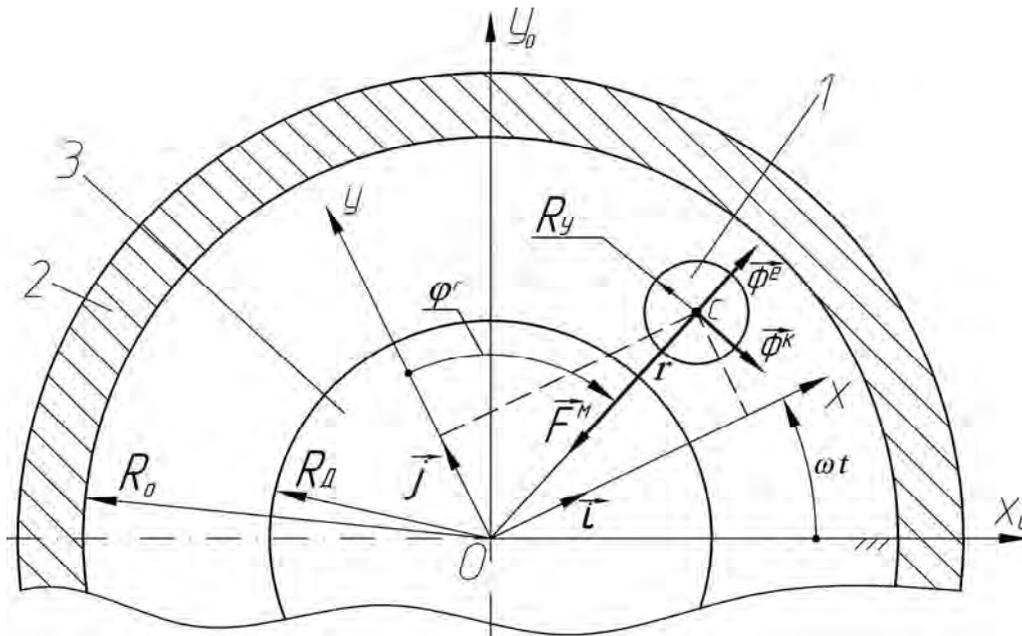


Рис. 2. Схема движения шара-ударника в начальной фазе работы инструмента: 1 – шар-ударник; 2 – корпус инструмента; 3 – магнитопроводный диск, контактирующий с магнитом и имеющий постоянные характеристики магнитного поля

Рассмотрим силы, входящие в уравнение (1).

$$\vec{\phi}^e = -m_1 \vec{a}^e = -m_1 \vec{a}_r^e - m_1 \vec{a}_n^e.$$

Так как  $\omega = const$ ,  $\varepsilon = const = 0$ , то

$$\vec{\phi}^e = -m_1 \vec{a}_n^e; \quad \phi^e = m_1 \omega^2 r;$$

$$\vec{\phi}^k = -m_1 \vec{a}^k;$$

$$\vec{a}^k = 2\vec{\omega} \times \vec{V}^r = -2\omega \cdot \dot{y} \cdot \vec{i} + 2\omega \cdot \dot{x} \cdot \vec{j},$$

где  $\vec{a}^e$ ,  $\vec{a}_n^e$ ,  $\vec{a}_r^e$  – переносное, переносное нормальное и переносное касательное ускорения соответственно;  $\omega$  – угловая скорость вращения корпуса инструмента;  $\vec{V}^r$  – вектор относительной скорости шара-ударника;  $x, y, r, \varphi^r$  – декартовы и полярные координаты шара-ударника соответственно;  $\vec{i}, \vec{j}$  – единичные орты.

Таким образом,

$$\vec{\phi}^k = 2m_1 \omega \cdot \dot{y} \cdot \vec{i} - 2m_1 \omega \cdot \dot{x} \cdot \vec{j}; \quad (2)$$

$$\vec{F}^{TP} = -fN \frac{\vec{V}^r}{V^r} = -fN \frac{\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}, \quad (3)$$

где  $f$  – коэффициент трения скольжения шара-ударника о поверхность обоймы инструмента;  $V^r$  – модуль вектора относительной скорости шара-ударника;  $\dot{x}, \dot{y}$  – проекции вектора относительной скорости на соответствующие оси координат.

Силу магнитного притяжения шара-ударника к периферийной поверхности магнитопроводного диска определим по зависимости

$$\vec{F}^M = \vec{F}^M(\vec{r});$$

$$F^M = \frac{\rho}{r^2},$$

где  $\rho$  – эмпирический коэффициент, зависящий от характеристик магнитного поля, создаваемого кольцевым постоянным магнитом ( $H$  – напряженность магнитного поля;  $B$  – магнитная индукция),  $\rho = f(H, B)$ .

В соответствии с рис. 2 запишем:

$$r^2 = x^2 + y^2; \quad \varphi^r = \arctg\left(\frac{x}{y}\right);$$

$$x = r \sin(\varphi^r); \quad y = r \cos(\varphi^r);$$

$$\sin(\varphi^r) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \cos(\varphi^r) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Спроектируем рассматриваемые силы на оси  $Ox$  и  $Oy$ :

$$\phi_x^{en} = \phi^e \sin(\varphi^r) = m_1 \omega^2 x; \quad (4)$$

$$\phi_y^{en} = \phi^e \cos(\varphi^r) = m_1 \omega^2 y; \quad (5)$$

$$\phi_x^k = 2m_1 \cdot \omega \cdot \dot{y}; \quad (6)$$

$$\phi_y^k = -2m_1 \cdot \omega \cdot \dot{x}; \quad (7)$$

$$F_x^{TP} = -\frac{f \cdot N \cdot \dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}; \quad (8)$$

$$F_y^{TP} = -\frac{f \cdot N \cdot \dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}; \quad (9)$$

$$F_x^M = -F^M \sin \varphi^r = -F^M \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad (10)$$

$$F_y^M = -F^M \cos \varphi^r = -F^M \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad (11)$$

$$N_x = N_y = 0;$$

$$G_x = G_y = 0.$$

Запишем уравнение (1) в проекциях на оси координат  $Oxy$  в форме Коши:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \dot{x}; \\ \frac{dy}{dt} = \dot{y}; \\ \ddot{x} = \omega^2 \cdot x + 2\omega \cdot \dot{y} - \frac{fN}{m_1} \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} - \\ - \frac{F^M}{m_1} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{N_x}{m_1} + \frac{G_x}{m_1}; \\ \ddot{y} = \omega^2 \cdot y - 2\omega \cdot \dot{x} - \frac{fN}{m_1} \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} - \\ - \frac{F^M}{m_1} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{N_y}{m_1} + \frac{G_y}{m_1}. \end{cases} \quad (12)$$

При решении системы (12) методами численного интегрирования следует соблюдать краевые условия координат центра масс и скорости шара-ударника:

– начальные:

$$t = t_0; \quad x = x_0; \quad y = y_0; \quad \dot{x} = \dot{x}_0;$$

$$\dot{y} = \dot{y}_0; \quad \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = R_D + R_Y;$$

– текущие:

$$t = t; \quad x = x; \quad y = y; \quad \dot{x} = \dot{x}; \quad \dot{y} = \dot{y};$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = r;$$

– конечные:

$$t = t_k; \quad x = x_k; \quad y = y_k; \quad \dot{x} = \dot{x}_k;$$

$$\dot{y} = \dot{y}_k; \quad \sqrt{x_k^2 + y_k^2} = R_O - R_Y \cdot \sin \alpha,$$

где  $t_0, t_k, x_0, y_0, x_k, y_k, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{x}_k, \dot{y}_k$  – время, координаты центра шара-ударника и проекции вектора скорости шара-ударника на оси  $Ox$  и  $Oy$  в начальный и конечный моменты фазы движения шара-ударника от магнитопроводного диска до опорной поверхности корпуса инструмента соответственно;  $R_D$  – радиус магнитопроводного диска;  $R_O$  – радиус опорной поверхности инструмента;  $R_Y$  – радиус шара-ударника;  $\alpha$  – угол наклона опорной поверхности корпуса инструмента.

При численном интегрировании следует следить за выполнением условия

$$\sqrt{x_k^2 + y_k^2} \leq R_O - R_Y \cdot \sin \alpha. \quad (13)$$

Абсолютную скорость перемещения центра шара-ударника определяем по теореме сложения скоростей [16]:

$$\vec{V}^a = \vec{V}^e + \vec{V}^r;$$

$$V^e = \omega \cdot r_k = \omega \sqrt{x_k^2 + y_k^2};$$

$$V^r = \sqrt{\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2},$$

где  $\vec{V}^e$  – вектор переносной скорости

шара-ударника;  $V^e$  – модуль вектора переносной скорости шара-ударника.

**2. Моделирование движения шара-ударника при его перемещении по опорной поверхности корпуса инструмента.** Запишем уравнение движения шара-ударника с учетом его магнитного взаимодействия с соседними шарами-ударниками и периодического силового воздействия со стороны деформирующих шаров (рис. 3):

$$m_1 \vec{a}^r = \vec{\phi}^e + \vec{\phi}^k + \vec{F}^{TP} + \vec{F}^M + \vec{F} + \vec{F}' + \vec{F}_D(t) + \vec{F}_1^{TP} + \vec{N} + \vec{N}' + \vec{G}, \quad (14)$$

где  $\vec{F}, \vec{F}'$  – силы магнитного взаимодействия между смежными шарами-ударниками;  $\vec{F}_1^{TP}$  – сила трения шара-ударника об опорную поверхность корпуса инструмента;  $\vec{F}_D(t)$  – сила, действующая на шар-ударник со стороны деформирующих шаров;  $\vec{N}'$  – нормальная реакция, действующая на шар со стороны опорной поверхности.

Значения сил  $\vec{F}^{TP}, \vec{F}^M$  определяем по зависимостям (8)...(11).

$$\omega_1 \neq const, \quad \varepsilon \neq 0;$$

$$\vec{\phi}^e = \vec{\phi}^{en} + \vec{\phi}^{e\tau};$$

$$\phi_x^{en} = \phi^e \sin(\varphi^r) = m_1 \omega_1^2 x;$$

$$\phi_y^{en} = \phi^e \cos(\varphi^r) = m_1 \omega_1^1 y;$$

$$\phi_x^{e\tau} = m_1 \varepsilon_1 y;$$

$$\phi_y^{e\tau} = m_1 \varepsilon_1 x;$$

$$\phi_x^k = 2m_1 \cdot \omega_1 \cdot \dot{y};$$

$$\phi_y^k = -2m_1 \cdot \omega_1 \cdot \dot{x},$$

где  $\omega_1$  – угловая скорость вращения шара-ударника.

Соотношение угловых скоростей вращения шара-ударника и корпуса инструмента определяется выражением

$$\frac{\omega_1}{\omega} = u = f(H, B), \quad (15)$$

где  $u$  – передаточный коэффициент, зависящий от магнитных характеристик используемого кольцевого постоянного магнита ( $0 < u \leq 1$ ).

Для определения сил  $\vec{F}$  и  $\vec{F}'$  исследуем магнитное взаимодействие между шарами-ударниками. В силу одинаковой кинематики и начальных условий движения шаров-ударников полагаем, что они расположены с равномерным угловым шагом (рис. 3).

$$\psi = \frac{2\pi}{n'}, \quad (16)$$

где  $\psi$  – угловой шаг расположения шаров-ударников;  $n'$  – число шаров-ударников.

Величину силы магнитного взаимодействия между смежными шарами-ударниками определим по формуле

$$F' = F = \frac{\gamma \cdot m_1^2}{l^2}, \quad (17)$$

где  $\gamma$  – коэффициент, зависящий от характеристик магнитного поля (для конкретной магнитной системы является величиной постоянной);  $l$  – расстояние между центрами масс соседних шаров-ударников.

Расстояние  $l$  определим по формуле

$$l = 2r \sin \frac{\psi}{2} \quad \text{или} \quad l^2 = 4(x^2 + y^2) \sin^2 \frac{\pi}{n}. \quad (18)$$

Согласно рис. 3 запишем следующее:

$$l^2 = (x - x_{i+1})^2 + (y - y_{i+1})^2, \quad (19)$$

где  $x_{i+1}, y_{i+1}$  – координаты центра масс соседнего шара-ударника;

$$l^2 = (x - x_{i-1})^2 + (y - y_{i-1})^2, \quad (20)$$

где  $x_{i-1}, y_{i-1}$  – координаты центра масс соседнего шара-ударника, расположенного с противоположной стороны от рассматриваемого шара.

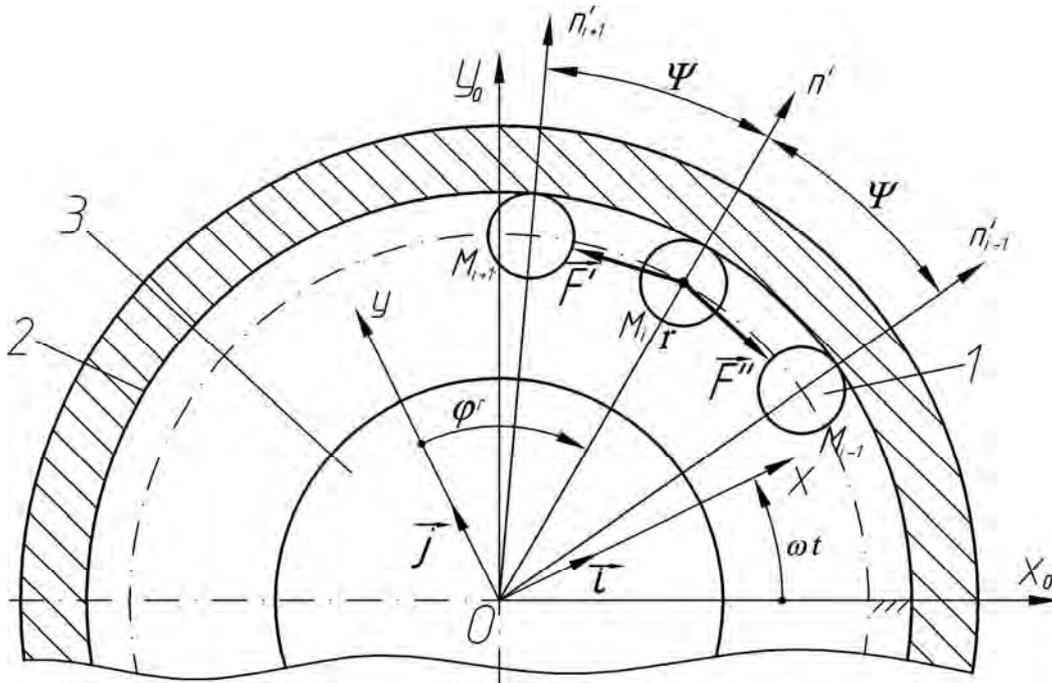


Рис. 3. Схема магнитного взаимодействия между шарами-ударниками: 1 – шары-ударники; 2 – опорная поверхность корпуса инструмента; 3 – магнитопроводный диск

Определим векторы  $\vec{OM}_{i-1}$  и  $\vec{OM}_{i+1}$ :

$$\frac{x - x_1}{m''} = \frac{y - y_1}{n''}, \quad (23)$$

$$\begin{cases} \vec{OM}_{i-1} = \vec{OM}_i + \vec{M}_i \vec{M}_{i-1}; \\ \vec{OM}_{i+1} = \vec{OM}_i + \vec{M}_i \vec{M}_{i+1}, \end{cases} \quad (21)$$

где  $m'' = \cos \beta$ ;  $n'' = \cos \gamma$ ;  $\beta$  – угол между прямой и осью  $Ox$ ;  $\gamma$  – угол между прямой и осью  $Oy$ , причем  $\beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$ .

где  $i$  – номер рассматриваемого шара-ударника.

Определим координаты  $x_{i+1}$ ,  $y_{i+1}$ ,  $x_{i-1}$ ,  $y_{i-1}$ . Спроектируем равенство (21) на оси координат  $Oxy$ :

$$\begin{cases} x_{i-1} = r \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \psi - \varphi^r\right) = r \cdot \sin(\varphi^r + \psi); \\ y_{i-1} = r \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \psi - \varphi^r\right) = r \cdot \cos(\varphi^r + \psi); \\ x_{i+1} = r \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + \psi - \varphi^r\right) = r \cdot \sin(\varphi^r - \psi); \\ y_{i+1} = r \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + \psi - \varphi^r\right) = r \cdot \cos(\varphi^r - \psi). \end{cases} \quad (22)$$

Уравнение для прямой, проходящей через две точки с координатами  $x$ ,  $y$  и  $x_1$ ,  $y_1$ , имеет вид [17]:

Таким образом, имеем:

$$n''(x - x_1) = m''(y - y_1), \text{ или}$$

$$\cos \gamma \cdot (x - x_1) = \cos \beta \cdot (y - y_1); \quad (24)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \cdot (x - x_1) = \cos \beta \cdot (y - y_1); \quad (25)$$

$$\sin \beta \cdot (x - x_1) = \cos \beta \cdot (y - y_1); \quad (26)$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{y - y_1}{x - x_1}; \quad (27)$$

$$\beta = \operatorname{arctg}\left(\frac{y - y_1}{x - x_1}\right). \quad (28)$$

Определим проекции магнитных сил взаимодействия между шарами-ударниками на оси координат  $Oxy$ :

$$\left\{ \begin{aligned} F_x &= F \cos \beta = \\ &= F \cos(\operatorname{arctg}(\frac{y - y_{i-1}}{x - x_{i-1}})); \\ F_y &= -F \cos \gamma = -F \sin \beta = \\ &= -F \sin(\operatorname{arctg}(\frac{y - y_{i-1}}{x - x_{i-1}})); \\ F'_x &= -F \cos \beta = \\ &= -F \cos(\operatorname{arctg}(\frac{y - y_{i+1}}{x - x_{i+1}})); \\ F'_y &= -F \cos \alpha = F \sin \beta = \\ &= F \sin(\operatorname{arctg}(\frac{y - y_{i+1}}{x - x_{i+1}})). \end{aligned} \right. \quad (29)$$

С учетом (22) имеем

$$\left\{ \begin{aligned} y - y_{i-1} &= y - r \cdot \cos(\varphi^r + \psi); \\ x - x_{i-1} &= x - r \cdot \sin(\varphi^r + \psi); \\ y - y_{i+1} &= y - r \cdot \cos(\varphi^r - \psi); \\ x - x_{i+1} &= x - r \cdot \sin(\varphi^r - \psi). \end{aligned} \right. \quad (30)$$

После подстановки значений соответствующих координат  $r$ ,  $\varphi^r$  перепишем выражение (29) в окончательном виде:

$$\left\{ \begin{aligned} F_x &= F \cos(\operatorname{arctg}(\frac{y - \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \cos(\operatorname{arctg} \frac{x}{y} + \psi)}{x - \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sin(\operatorname{arctg} \frac{x}{y} + \psi)})); \\ F_y &= -F \sin(\operatorname{arctg}(\frac{y - \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \cos(\operatorname{arctg} \frac{x}{y} + \psi)}{x - \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sin(\operatorname{arctg} \frac{x}{y} + \psi)})); \\ F'_x &= -F \cos(\operatorname{arctg}(\frac{y - \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \cos(\operatorname{arctg} \frac{x}{y} - \psi)}{x - \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sin(\operatorname{arctg} \frac{x}{y} - \psi)})); \\ F'_y &= F \sin(\operatorname{arctg}(\frac{y - \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \cos(\operatorname{arctg} \frac{x}{y} - \psi)}{x - \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sin(\operatorname{arctg} \frac{x}{y} - \psi)})). \end{aligned} \right. \quad (31)$$

Математическое выражение для определения величины силы магнитного взаимодействия между смежными шарами-ударниками после преобразований имеет вид:

$$\mathbf{F} = \left[ \gamma \cdot m_1^2 \right] / \left[ (x - \sqrt{x^2 + y^2} \times \sin(\operatorname{arctg} \frac{x}{y} + \psi))^2 + (y - \sqrt{x^2 + y^2} \times \cos(\operatorname{arctg} \frac{x}{y} + \psi))^2 \right]; \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \vec{F}_1^{TP} &= -fN' \frac{\vec{V}^r}{V^r} = \\ &= -f(N' + \phi^e \cos(90 - \alpha)) \frac{\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}; \quad (33) \end{aligned}$$

$$F_{1x}^{TP} = -\frac{f(N' + \phi^e \cos(90 - \alpha)) \cdot \dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}; \quad (34)$$

$$F_{1y}^{TP} = -\frac{f(N' + \phi^e \cos(90 - \alpha)) \cdot \dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}; \quad (35)$$

$$F_d = f(t).$$

Дифференциальные уравнения движения шара-ударника при периодическом взаимодействии с деформируемыми элементами в форме Коши имеют окончательный вид:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \dot{x}; \\ \frac{dy}{dt} &= \dot{y}; \\ \ddot{x} &= \omega_1^2 \cdot x + 2\omega_1 \cdot \dot{y} - \frac{fN}{m_1} \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} - \\ &\quad - \frac{F^M}{m_1} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + F_x + F'_x + F_{Dx} + F_{1x}^{TP}; \\ \ddot{y} &= \omega_1^2 \cdot y - 2\omega_1 \cdot \dot{x} - \frac{fN}{m_1} \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} - \\ &\quad - \frac{F^M}{m_1} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + F_y + F'_y + F_{Dy} + F_{1y}^{TP}. \end{aligned} \right. \quad (36)$$

При численном интегрировании соблюдают условие

$$x^2 + y^2 = R_0 - R_v \cdot \sin \alpha. \quad (37)$$

**3. Моделирование взаимодействия шара-ударника с деформирующим шаром** (рис. 4). Вращаясь с угловой скоростью  $\omega_1$  по опорной поверхности корпуса инструмента, шар-ударник 1 (массой  $m_1$ ) периодически взаимодействует с деформирующим шаром 2 (массой  $m_2$ ). При этом считаем, что имеет место центральный удар (импульсы силы направлены по линии, соединяющей их геометрические центры) и в зоне взаимодействия шаров отсутствует ударное трение.

Запишем для каждого из взаимодействующих шаров уравнение сохранения количества движения [17]:

$$m_1 \vec{U}_1 - m_1 \vec{V}_1 = \vec{S}_1, \quad (38)$$

$$m_2 \vec{U}_2 - m_2 \vec{V}_2 = \vec{S}_2, \quad (39)$$

где  $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{U}_1, \vec{U}_2$  – векторы скорости движения шара-ударника 1 и деформирующего шара 2 до и после удара соответственно;  $\vec{S}_1, \vec{S}_2$  – векторы ударного импульса силы, приложенные к шару-ударнику 1 и деформирующему шару 2 соответственно.

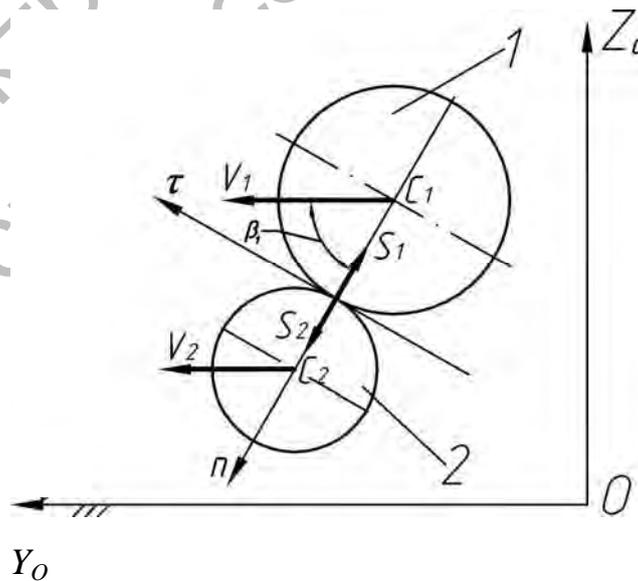


Рис. 4. Схема взаимодействия шара-ударника и деформирующего шара: 1 – шар-ударник; 2 – деформирующий шар

При ударе  $\vec{S}_1 = -\vec{S}_2$ . Тогда запишем следующее:

$$m_1\vec{U}_1 + m_2\vec{U}_2 = m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2. \quad (40)$$

Используя понятие скорости центра массы системы, найдем коэффициент восстановления:

$$k = \frac{U_{2n} - V_{cn}}{V_{cn} - V_{2n}}, \quad (41)$$

где  $k$  – коэффициент восстановления при ударе;  $V_{cn}$  – проекция вектора скорости центра массы системы на нормаль  $n$ ;  $V_{2n}$ ,  $U_{2n}$  – проекции векторов скорости деформирующего шара до и после удара на нормаль  $n$  соответственно.

Из выражения (41) запишем, что

$$U_{2n} = V_{cn} + k(V_{cn} - V_{2n}). \quad (42)$$

Рассмотрим проекцию вектора изменения количества движения шара 2 на нормаль  $n$ :

$$S_{2n} = m_2(U_{2n} - V_{2n}). \quad (43)$$

После подстановки значений в уравнение (43) окончательно имеем следующее:

$$S_{2n} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (1+k)(V_{1n} - V_{2n}), \quad (44)$$

где  $V_{1n}$  – проекция вектора скорости шара-ударника до удара на нормаль  $n$ .

$$V_{1n} = V_1 \cdot \cos \beta_1 = \omega_1 \cdot r \cdot \cos \beta_1; \quad (45)$$

$$V_{2n} = V_2 \cdot \cos \beta_1, \quad (46)$$

где  $\beta_1$  – угол между нормалью  $n$  и осью  $OY$ .

После преобразований окончательно имеем, что

$$S_{2n} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (1+k) \times (V_1 \cos \beta_1 - V_2 \cos \beta_1). \quad (47)$$

Тогда скорость деформирующего шара 2 в направлении нормали  $n$  определяем по зависимости [17]

$$U_{2n} = V_2 \cos \beta_1 + \frac{m_1(1+k)}{m_1 + m_2} \times (V_1 \cos \beta_1 - V_2 \cos \beta_1). \quad (48)$$

Проекция количества движения деформирующего шара на касательную  $\tau$  равна:

$$U_{2\tau} = V_{2\tau} = V_2 \sin \beta_1, \quad (49)$$

где  $V_{2\tau}$ ,  $U_{2\tau}$  – проекции скоростей деформирующего шара на ось  $\tau$  до и после удара соответственно.

Таким образом, скорость деформирующего шара 2 в момент контакта с обрабатываемой поверхностью детали определяется выражением

$$U_2 = \sqrt{U_{2n}^2 + U_{2\tau}^2} = \sqrt{\left(V_2 \cos \beta_1 + \frac{m_1(1+k)}{m_1 + m_2} \times (V_1 \cos \beta_1 - V_2 \cos \beta_1)\right)^2 + (V_2 \sin \beta_1)^2}. \quad (50)$$

### Заключение

В статье представлена конструкция двухрядного магнитно-динамического инструмента для упрочняющей обработки плоских поверхностей. Получены системы дифференциальных уравнений, описывающие кинематику движения шара-ударника и его взаимодействие с деформирующим шаром инструмента при осуществлении процесса магнитно-динамического упрочнения плоских поверхностей. Найдены начальные и конечные условия для численного интегрирования дифференциальных уравнений и определения кинематических характеристик шара-ударника при различных режимах упрочняющей обработки и конструктивных параметрах упрочняющего инструмента. Получена аналитическая зависимость для определения скорости деформирующего шара в момент его взаимодействия с упрочняемой поверхностью детали.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Коновалов, Е. Г.** Чистовая и упрочняющая ротационная обработка поверхностей / Е. Г. Коновалов, В. А. Сидоренко. – Минск : Выш. шк., 1968. – 364 с.
2. **Жасимов, М. М.** Управление качеством деталей при поверхностном пластическом деформировании / М. М. Жасимов. – Алма-Ата : Наука, 1986. – 208 с.
3. **Шнейдер, Ю. Г.** Инструменты для чистовой обработки металлов давлением / Ю. Г. Шнейдер. – Л. : Машиностроение, 1971. – 248 с.
4. **Папшев, Д. Д.** Отделочно-упрочняющая обработка поверхностным пластическим деформированием / Д. Д. Папшев. – М. : Машиностроение, 1978. – 152 с.
5. **Торбило, В. М.** Алмазное выглаживание / В. М. Торбило. – М. : Машиностроение, 1972. – 104 с.
6. **Ящерицын, П. И.** Упрочняющая обработка нежестких деталей в машиностроении / П. И. Ящерицын, А. П. Минаков. – Минск : Наука и техника, 1986. – 215 с.
7. **Минаков, А. П.** Технологические основы пневмовибродинамической обработки нежестких деталей / А. П. Минаков, А. А. Бунос ; под ред. П. И. Ящерицына. – Минск : Наука и техника 1995. – 304 с.
8. **Довгалец, А. М.** Классификация инструментов для магнитно-динамического упрочнения / А. М. Довгалец, Д. М. Свирепа, Д. М. Рыжанков // Вестн. Белорус.-Рос. ун-та. – 2008. – № 2. – С. 30–38.
9. **Двухрядные магнитно-динамические инструменты** / А. М. Довгалец [и др.] // Вестн. Гомельского гос. техн. ун-та им. П. О. Сухого. – 2009. – № 2. – С. 12–20.
10. **Инструменты для магнитно-динамического упрочнения поверхностей деталей машин** / А. М. Довгалец [и др.] // Вестн. Брестского гос. техн. ун-та. – 2009. – № 4. – С. 94–97.
11. **Магнитно-динамические инструменты для упрочнения наружных поверхностей вращения** / А. М. Довгалец [и др.] // Вестн. БГСХА. – 2009. – № 4. – С. 174–178.
12. **Пат. 2052331 РФ, МКИ<sup>6</sup> B24B39/02.** Способ поверхностного пластического деформирования поверхности вращения и инструмент для его осуществления / А. М. Довгалец (РБ). – № 4854644/08 ; заявл. 27.07.90 ; опубл. 20.01.96, Бюл. № 2. – 6 с. : ил.
13. **Пат. 2068770 РФ, МКИ<sup>6</sup> B24B39/02.** Способ поверхностного пластического деформирования и инструмент для его осуществления / А. М. Довгалец (РБ). – № 4922547/27 ; заявл. 29.03.91 ; опубл. 10.11.96, Бюл. № 31. – 7 с. : ил.
14. **Пат. 2089373 РФ, МКИ<sup>6</sup> B24B39/02.** Способ поверхностного пластического деформирования и инструмент для его осуществления / А. М. Довгалец (РБ). – № 4924841/02 ; заявл. 05.04.91 ; опубл. 10.09.97, Бюл. № 25. – 7 с. : ил.
15. **Пат. 2029667 РФ, МКИ<sup>6</sup> B24B39/02.** Способ отделочно-упрочняющей обработки и инструмент для его осуществления / А. М. Довгалец (РБ). – № 4400120/27 ; заявл. 29.03.88 ; опубл. 27.02.95, Бюл. № 6. – 5 с. : ил.
16. **Лойцанский, Л. Г.** Курс теоретической механики / Л. Г. Лойцанский, А. И. Лурье. – 6-е изд., перераб. и доп. – М. : Наука, 1983. – Т. 2. – 640 с.
17. **Воднев, В. Т.** Основные математические формулы / В. Т. Воднев, А. Ф. Наумович, Н. Ф. Наумович ; под ред. Ю. С. Богданова. – Минск : Выш. шк., 1980. – 336 с. : ил.

Белорусско-Российский университет  
Материал поступил 07.10.2010

**A. M. Dovgaley, N. A. Levanovich,  
S. A. Suhotsky, D. M. Svirepa**  
**Mathematical simulation of the magnetic  
dynamic tool for strengthening treatment  
of flat surfaces**

The article deals with the structure and mathematical model of the double-row magnetic dynamic tool for strengthening treatment of flat surfaces. The system of differential equations describing the kinematics of the hammering ball and the interaction of the hammering ball with the deforming ball of the tool is presented; besides, dependence for velocity determination of the deforming ball at the moment of its interaction with the part has been obtained.